

二重相反法に基づく BEM を用いた非均質材料の熱伝導率同定解析

IDENTIFICATIONS OF THERMAL CONDUCTIVITY DISTRIBUTION IN INHOMOGENEOUS MATERIALS
BY MEANS OF DRM-BASED BEM松本 敏郎¹⁾, 田中 正隆²⁾, 末吉 耕平³⁾, Artur GUZIK⁴⁾

Toshiro MATSUMOTO, Masataka TANAKA, Kohei SUEYOSHI and Artur GUZIK

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 3) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: k-sueyoshi@artist.shinshu-u.ac.jp)
 4) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: guzik@homer.shinshu-u.ac.jp)

The paper presents the DRM-based boundary element method for determining the thermal conductivity distribution in inhomogeneous materials. The governing equation is first transformed to a boundary integral equation. The Dual Reciprocity Method (DRM) is used to transform the resulting domain integral term to an equivalent boundary integral. Then, the system is solved for the coefficients of the DRM approximation using the given values of boundary temperature and heat flux. The coefficients are used to iteratively estimate thermal conductivity in original differential equation. The method does not require the domain discretization. An numerical example, demonstrating the efficiency and accuracy of the method is included.

Key Words: Boundary Element Method, Dual Reciprocity Method, Inhomogeneous Thermal Conductivity, Heat Conduction Problem, Singular Value Decomposition

1. 緒言

傾斜機能材料などの高機能性材料が機械構造物に使用されるようになり、好ましい特性を有するような材料定数の分布の設計や既存の材料における材料特性パラメータの分布の同定手法の開発が工学上重要なテーマの一つとなっている。この問題はいわゆる材料特性の同定逆問題の一つであり、材料が非均質な問題を扱う必要から、その解析手法としては有限要素法などの領域型の解法が主に用いられていた。一方最近では、このような領域型の問題についても、境界積分のみを用いた境界要素法⁽¹⁾による取り扱いが可能となってきた^{(2)~(6)}。特に、二重相反法⁽²⁾ (Dual Reciprocity Method: DRM) を用いることにより、傾斜機能材料の熱伝導解析⁽⁷⁾や温度依存性の熱伝導率を考慮した時間依存で非線形の熱伝導解析⁽⁸⁾も、領域メッシュレス型の境界要素法を用いて、境界積分だけにに基づく解析が可能となっている。

そこで本研究では、熱伝導率が場所ごとに変化する2次元の非均質材料について、境界上の温度と熱流束から境界や領域内部での熱伝導率の分布を求める問題に DRM に基づく境界要素法を適用した。すなわち、非均質材料の定常熱伝導問題を考え、非均質性に由来する項を仮想的なソース項とみなすことにより、Poisson 方程式として境界要素法の定式化を

行い、仮想的なソース項の分布を求める問題に帰着させた。ソース分布を同定する問題を DRM に基づく境界要素法で解析する方法は既にいくつか示されている^{(9)~(11)}。これらの方法では、境界の温度と熱流束を既知量として扱い、ソース分布を直接求める代わりに、それを Radial Basis Function (RBF)⁽¹²⁾ の線形結合で近似したときの係数を直接の未知量として求めている。本研究の場合、積分方程式は同様の定式化が可能であるが、境界の熱流束が与えられても境界の熱伝導率が未知量となるため、熱流束に関する境界積分は既知量に帰着しない。そこで、既知量として与えられる境界の温度を用いて、DRM と同様の RBF を用いた近似を行い、得られた流束と熱流束との比から熱伝導率の第1近似を求めて用いる。さらに、得られた仮想的なソース分布から熱伝導率の分布を計算するアルゴリズムを示す。最後に、提案した方法を矩形領域の熱伝導率の分布を計算する問題に適用し、その有効性を検討する。

2. 理論

2.1. 支配微分方程式

熱伝導率が場所ごとに変化する2次元定常熱伝導問題に対する支配微分方程式は、内部発熱がないものとするとき次式と

なる。

$$\nabla \cdot \{\lambda(x)\nabla u(x)\} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $u(x)$ は温度、 $\lambda(x)$ は熱伝導率である。また、境界条件は次式となる。

$$u(x) = \bar{u}, \quad x \in \Gamma_u \quad (2)$$

$$q(x) = -\lambda(x)q_n(x) = \bar{q}, \quad x \in \Gamma_q \quad (3)$$

上式において、 $q_n(x)$ は温度 $u(x)$ の法線方向勾配、 $q(x)$ は熱流束、 Γ_u は Dirichlet 型境界、 Γ_q は Neumann 型境界を意味する。ここで、式 (1) を次のように書き直す。

$$\nabla^2 u(x) = \frac{1}{\lambda(x)} \nabla \lambda(x) \cdot \nabla u(x) \quad (4)$$

式 (4) の右辺を、熱伝導率の非均質性に由来するソース項と見なして、Laplace 方程式の基本解を用いて境界要素法を定式化することができる。

2.2. 積分方程式

積分方程式を導出するために Laplace 方程式の基本解を $u^*(x, y)$ を用いる。 $u^*(x, y)$ は 2 次元問題の場合次式となる。

$$u^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (5)$$

ここで、 x, y は領域内の異なる 2 点であり、 r は 2 点 y と x の間の距離を表す。式 (4) の両辺に基本解 $u^*(x, y)$ を掛け、考察領域全体で積分し、部分積分を 2 回行うと、最終的に次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u^*(x, y) q_n(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} q_n^*(x, y) u(x) d\Gamma - u(y) \\ &= \int_{\Omega} u^*(x, y) \left\{ -\frac{1}{\lambda(x)} \nabla \lambda(x) \cdot \nabla u(x) \right\} d\Omega \quad (6) \end{aligned}$$

ここで、 $q_n^*(x, y)$ は基本解 $u^*(x, y)$ の点 x における法線方向の勾配であり、次式のように書くことができる。

$$q_n^*(x, y) = \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (7)$$

式 (6) から分かるように、左辺については境界積分に変換することができるが、右辺のソース項に由来する領域積分項はそのまま残る。この領域積分項は領域を内部セルに分割して計算しなければならず、その作業は大変手間がかかってしまい境界要素法の利点を損なってしまう。そこで、DRM を用いて領域積分項を境界積分に変換して評価を行う^{(2)~(7)}。

2.3. DRM による領域積分項の境界積分への変換

本研究では DRM により、領域積分項を境界積分に変換して評価する。まず式 (4) 右辺のソース項に関する部分を次式で近似する。

$$-\frac{1}{\lambda(x)} \nabla \lambda(x) \cdot \nabla u(x) \equiv b(x) = \sum_{l=1}^{N+L} \alpha_l f(x, z^l) \quad (8)$$

ここで、 N は境界節点数、 L は内部選点数、 α_l は未知係数、 z^l は DRM 選点、 $f(x, z^l)$ は近似関数で観測点 x と DRM 選点

z^l 間の距離の関数であり本研究では次の Radial Basis Function (RBF) を用いる。

$$f(x, z^l) = \begin{cases} (1-r^l)^5 [8(r^l)^2 + 5r^l + 1], & r^l \leq 1 \\ 0, & r^l \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

ただし、

$$r^l = \frac{|x - z^l|}{a} \quad (10)$$

であり、 a はサポートの大きさである。

ここで、 $f(x, z^l)$ に関して、次の微分方程式の特解を $\hat{u}(x, z^l)$ とする。

$$\nabla^2 \hat{u}(x, z^l) = f(x, z^l) \quad (11)$$

この特解 $\hat{u}(x, z^l)$ を用いると、式 (4) は次式のように書き表すことができる。

$$\nabla^2 u(x) = \sum_{l=1}^{N+L} \alpha_l \nabla^2 \hat{u}(x, z^l) \quad (12)$$

式 (8) に式 (12) を用いれば、式 (6) の領域積分項を部分積分により境界積分に変換することができ、式 (6) は次式となる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u^*(x, y) q_n(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} q_n^*(x, y) u(x) d\Gamma - u(y) \\ &= \sum_{l=1}^{N+L} \alpha_l \left(\int_{\Gamma} u^*(x, y) \hat{q}_n(x, z^l) d\Gamma \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Gamma} q_n^*(x, y) \hat{u}(x, z^l) d\Gamma - u(y, z^l) \right) \quad (13) \end{aligned}$$

ただし、 $\hat{q}_n(x, z^l)$ は特解 $\hat{u}(x, z^l)$ の法線方向勾配を表す。式 (13) よりすべて境界積分で表すことができ、正則化すると最終的な境界積分方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} q_n^*(x, y) \{u(x) - u(y)\} d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x, y) q_n(x) d\Gamma \\ &= \sum_{l=1}^{N+L} \alpha_l \left(\int_{\Gamma} q_n^*(x, y) \{ \hat{u}(x, z^l) - u(y, z^l) \} d\Gamma \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Gamma} u^*(x, y) \hat{q}_n(x, z^l) d\Gamma \right) \quad (14) \end{aligned}$$

2.4. 熱伝導率の逆解析

本研究では、前節で示した境界積分方程式を通常境界要素法の離散化手法を適用したうえで、熱伝導率を境界上の温度と熱流束の節点値から同定する問題を考える。熱伝導率の非均質性に由来する部分は、DRM により近似した近似係数であり、この近似係数を同定することでソースを同定するものとする。

2.4.1. 熱伝導率の非均質性に由来するソース項の同定

式 (14) は点 y を境界上のすべての点にとることにより次式のようなマトリックス形式で書き表すことができる。

$$[H]\{u\} - [G]\{q_n\} = ([H][\hat{U}] - [G][\hat{Q}_n])\{\alpha\} \quad (15)$$

ここで、 $[H]$ 、 $[G]$ 、 $[\hat{U}]$ 、 $[\hat{Q}_n]$ は形状に依存するマトリックスで $\{u\}$ は境界節点での温度、 $\{q_n\}$ はその温度の法線方向勾配を表すベクトルであり、 $\{q_n\}$ は境界節点の温度を式 (9) の RBF を用いて近似したものより求められる。式 (15) より

α を求める。このとき、DRM 選点を領域内部にしている場合、未知数の数が方程式の数を上回る。そこで特異値分解⁽⁷⁾を用いて最小ノルム型の解を求めている。また、式(8)をマトリックス形式で表した式を次式で示す。

$$\{b\} = [F]\{\alpha\} \quad (16)$$

求めた α を式(16)に代入することでソースを同定する。

2.4.2. 熱伝導率の計算

熱伝導率をソース項から計算するために、式(8)に基づく次式を用いて反復計算を行う。

$$-\frac{1}{\lambda^i} \nabla \lambda^{i+1} \nabla u = \sum_{l=1}^{N+L} \alpha_l f(x, z^l) \quad (17)$$

ここで、 λ^i は $(i-1)$ 回目の計算で求められた熱伝導率、 λ^{i+1} は i 回目の計算で求める熱伝導率を表している。また、1 回目の計算に必要な λ^1 は Fourier の法則⁽¹³⁾ から次式で求めている。

$$\lambda^1 = -\frac{q}{q_n} \quad (18)$$

ただし、 q は境界上の熱流束である。断熱条件 ($q=0$) が与えられている点や内部選点では、この式で λ^1 を求めることはできないので、他の点で求めた λ^1 を補間して求める。

また、式(17)の計算には、内部選点での温度も必要となる。その際、式(13)を用いることになるが、ソース項の評価に必要な α_l は式(15)で求めた値を用いることができる。さらに、前小節で式(17)の右辺は求められている。

以上より、式(17)から λ^{i+1} を求める。式(17)を式変形すると次式となる。

$$\sum_{m=1}^2 \frac{\partial \lambda^{i+1}}{\partial x_m} \frac{\partial u}{\partial x_m} = - \left(\sum_{l=1}^{N+L} \alpha_l f(x, z^l) \right) \lambda^i \quad (19)$$

式(19)において λ^{i+1} 、 u の座標微分を評価するために DRM を適用したときと同様の近似関数を用いて以下のように近似する。

$$\lambda^{i+1} = \sum_{l=1}^{N+L} \beta_l^{i+1} f(x, z^l) \quad (20)$$

$$u = \sum_{l=1}^{N+L} \gamma_l f(x, z^l) \quad (21)$$

ここで、 β_l^{i+1} 、 γ_l は未知係数、 $f(x, z^l)$ は近似関数を表す。式(20)、(21)を1回微分することにより座標による偏微分を評価でき、以下ようになる。

$$\frac{\partial \lambda^{i+1}}{\partial x_m} = \sum_{l=1}^{N+L} \beta_l^{i+1} \frac{\partial f(x, z^l)}{\partial x_m} \quad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} = \sum_{l=1}^{N+L} \gamma_l \frac{\partial f(x, z^l)}{\partial x_m} \quad (23)$$

式(22)、(23)を式(19)に代入し、観測点と DRM 選点をすべての点に適用すると式(19)は次式のようにマトリックス形式で書き表すことができる。

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{m=1}^2 \text{diag}\{[F_{x_m}]\{\gamma\}\}[F_{x_m}] \right) \{\beta^{i+1}\} \\ & = -\text{diag}\{[F]\{\alpha\}\}\{\lambda^i\} \end{aligned} \quad (24)$$

ただし、 $[F_{x_m}]$ は $[F]$ の x_m 方向への偏微分を表し、

$$[F] = \begin{bmatrix} f(x^1, z^1) & \dots & f(x^1, z^{N+L}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x^{N+L}, z^1) & \dots & f(x^{N+L}, z^{N+L}) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$[F_{x_m}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^1, z^1)}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial f(x^1, z^{N+L})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x^{N+L}, z^1)}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial f(x^{N+L}, z^{N+L})}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (26)$$

である。

式(21)において、点 x をすべての境界節点と内部選点に適用した式を用いることにより、未知係数 γ_l を求めることができ、次式となる。

$$\{\gamma\} = [F]^{-1}\{u\} \quad (27)$$

ただし、 $[F]^{-1}$ は $[F]$ の逆マトリックスを表す。式(27)より式(24)は次式となる。

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{m=1}^2 \text{diag}\{[F_{x_m}][F]^{-1}\{u\}\}[F_{x_m}] \right) \{\beta^{i+1}\} \\ & = -\text{diag}\{[F]\{\alpha\}\}\{\lambda^i\} \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)を境界上の断熱境界の節点と内部選点で考える。式(28)は λ^i から β^{i+1} を求める式となっているが、断熱境界以外の境界節点では、式(28)の代わりに次式を用いることにより、 β^{i+1} を求める。

$$[F]\{\beta^{i+1}\} = \{\lambda^i\} \quad (29)$$

このように、式(28)と(29)を連立することにより β^{i+1} を求めることができる。

β^{i+1} が求まれば、式(20)をマトリックス形式で表した次式により、 λ^{i+1} を計算することができる。

$$\{\lambda^{i+1}\} = [F]\{\beta^{i+1}\} \quad (30)$$

λ^i と λ^{i+1} との差が十分小さくなるまで以上の計算を繰り返し、熱伝導率を同定する。

3. 数値解析例

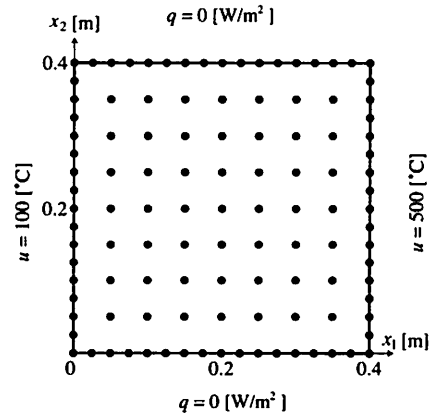


Fig.1 Analysis model

本手法の有効性を示すために、Fig.1 に示すような正方形モデルにおいて、場所ごとに変化する熱伝導率の同定を行う。境界節点を 64 点、境界を 2 次要素を用いて 32 要素に分割し、内部選点は 49 点を図のように配置した。境界上の温度と熱流束は順問題を解いたものを用いた。順問題の境界条件は $x_1 = 0$ で温度 $u = 100$ [°C], $x_1 = 0.4$ で温度 $u = 500$ [°C], $x_2 = 0, 0.4$ で断熱境界条件 $q = 0$ [W/m²] とした。求めるべき熱伝導率の分布は以下の 2 つの場合を考えた。

$$\text{Case 1} \quad \lambda(x) = 60 + 100x_1 \quad (31)$$

$$\text{Case 2} \quad \lambda(x) = 60 + 250x_1^2 \quad (32)$$

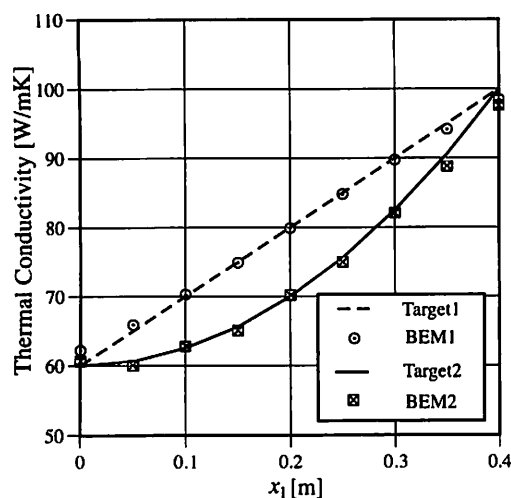


Fig.2 Estimation results at $x_2 = 0.2$

熱伝導率の同定に際しては、用いた境界の温度と熱流束の値には誤差がないものとした。Fig.2 に、これら 2 つの場合について、同定した熱伝導率の x_1 方向の分布を示す。Fig.2 に示すように、境界の近くで少し誤差があるものの、おおむね熱伝導率を精度よく求めることができている。境界の近くで誤差が出るのは、断熱境界以外の境界で式 (29) を常に用いているためと考えられる。断熱境界以外の境界における λ_1 の改良は、今後の検討課題である。

4. 結 言

本論文では、非均質な熱伝導率を有する場の 2 次元定常熱伝導問題において、境界上の温度と熱流束から熱伝導率の分布を求める問題を、DRM に基づく領域メッシュレス型の境界要素法で解析する方法を示した。開発した解析プログラムにより、矩形領域中の熱伝導率を同定する問題について数値解析例を示した。今後は、より複雑な形状を有する場に対する問題、温度と熱流束に誤差が含まれる場合、3 次元問題への適用等についての検討が必要である。

謝 辞 本研究の一部は、平成 15~16 年度科学研究費基盤研究 (C) (課題番号 15560068) の支援により行われたものである。ここに記して謝意を表す。

- (1) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, (1991), 培風館.
- (2) P.W. Partridge, C.A. Brebbia, and L.C. Wrobel: The Dual Reciprocity Boundary Element Method, (1992), *Computational Mechanics Publications*.
- (3) C.S. Chen, C.A. Brebbia, and H. Power: Dual Reciprocity Method Using Compactly Supported Radial Basis Functions, *Commun. Numer. Meth. Engng.* **15** (1999) pp. 225-242.
- (4) P.W. Partridge: Towards Criteria for Selecting Approximation Functions in the Dual Reciprocity Method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **24** (2000), pp. 519-529.
- (5) P.A. Ramachandran, K. Balakrishnan: Radial Basis Functions as Approximate Particular Solutions: Review of Recent Progress, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **24** (2000), pp. 575-582.
- (6) J.C. Jo, W.K. Shin, and C.Y. Choi: Multidimensional Phase Change Problems by the Dual Reciprocity Boundary Element Method, *Numerical Heat Transfer, Part B*, **36** (1999), pp. 95-113.
- (7) 田中正隆, 松本敏郎, 須田裕輔: 傾斜機能材料の定常熱伝導問題に対する DRM 境界要素法, 境界要素法論文集, **17** (2000) pp. 11-16.
- (8) Masa. Tanaka, T. Matsumoto and S. Takakuwa: DRM applied to the time-stepping BEM for transient heat conduction, Gallego, R, Aliabadi, MH (eds.) *Proceedings BeTeQ Conference*, (2003), Granada, Spain, pp. 79-84.
- (9) Y. Kagawa, Y. Sun, and O. Matsumoto: Inverse solution for Poisson equations using DRM boundary element models — identification of space charge distribution, *Inverse Problems in Engineering*, **1** (1993), pp. 247-265.
- (10) A. Farcas, L. Elliott, D.B. Ingham, D. Lesnic, and N.S. Mera: A dual reciprocity boundary element method for the regularized numerical solution of the inverse source problem associated to the Poisson equation, *Inverse Problems in Engineering*, **11-2** (2003), pp. 123-139.
- (11) T. Matsumoto, Masa. Tanaka, and T. Tsukamoto: Source identification using boundary element method with dual reciprocity method, *Advances in Boundary Element Techniques*, R. Gallego and M.H. Aliabadi (Eds.), Queen Mary, University of London, (2003), pp. 177-182.
- (12) H. Wendland: Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree, *Adv. Comput. Math.*, **4** (1995), pp. 389-396.
- (13) 関信弘: 伝熱工学 (1988), 森北出版.