

## 地震・火山の破壊現象の効率的数値解析

EFFICIENT NUMERICAL ANALYSIS METHOD FOR  
FRACTURE PROBLEMS OF EARTHQUAKES AND VOLCANOガルティ ホム ナト<sup>1)</sup>, 堀 宗朗<sup>2)</sup>, 小国 健二<sup>3)</sup>

Garhti Hom NATH, Muneo HORI and Kenji OGUNI

- 1) 東京大学地震研究所 (〒113-0032 文京区弥生 1-1-1, E-mail: garhti@eri.u-tokyo.ac.jp)  
 2) 東京大学地震研究所 (〒113-0032 文京区弥生 1-1-1, E-mail: hori@eri.u-tokyo.ac.jp)  
 3) 東京大学地震研究所 (〒113-0032 文京区弥生 1-1-1, E-mail: oguni@eri.u-tokyo.ac.jp)

This paper presents the application of FEM- $\beta$  to analyze failure problems of earthquake and volcano. The major characteristics of FEM- $\beta$ , the high efficiency in solving failure problem, is explained in the viewpoint of function discretization and failure criterion treatment. Example problems of earthquake and volcano failure are shown, emphasizing effects of the material and structure heterogeneity upon the variability in fault and volcano behaviors.

**Key Words:** Failure Problem, Discretization of Function, Numerical Analysis Method, Earthquake and Volcano

## 1. はじめに

地震・火山は地殻規模の破壊現象である。特に、地震を引き起こす断層の破壊や火山の噴火に起因する山体崩壊を予測することは、力学的問題としても勿論、防災上も重要な研究課題である。しかし予測は容易ではない。その一因としてモデル構築が難しいことがあげられる。地殻や火山は不均一であり、地質構造や材料特性の分布を完全に計測することは不可能である。代替としてモデルをさまざまに変えたモンテカルロシミュレーションが考えられるが、効率的な数値解析手法が要求される。

上記を背景として、著者のグループは、互いに重ならない基底関数を使った離散化を利用した境界値問題の効率的な数値解析手法 FEM- $\beta$  を考案している(岩井他, 2003, 小国他, 2004)。互いに重ならない基底関数は、変位関数の不連続性である破壊を表現することに適している。特に、対象を適当に分割した領域の特性関数を基底関数に選ぶと、変形する物体に対し、連続体モデルと等価なパーティクルフィジックス的描像を与える。すなわち、FEM- $\beta$  の描像はいわゆる RBSM(rigid body spring model) と同一であり、また、DEM(discrete element method) に似通った解法でもある。しかし、FEM- $\beta$  は連続体の境界値問題の解法であるため、RBSM や DEM と異なり、連続体の材料特性を正しく利用する他、通常の FEM と同様の精度を持つという特徴を持つ。

本論文は、FEM- $\beta$  を利用した地震・火山の破壊現象の数値解析を紹介する。第 2 章と第 3 章において FEM- $\beta$  の特徴である関数の離散化と破壊条件の取扱いを説明する。そして第 4 章において地震と火山の数値解析の具体例を示す。なお、本論文は直交座標系を用いる。ベクトル等を成分表示し、偏微分を添え字の前のカンマで表す。また総和規約を用いる。

## 2. 特性関数を使った関数と微係数の離散化

簡単のため 2 次元空間の関数  $f(\mathbf{x})$  を例にとり、特性関数を使った離散化を説明する。関数の領域を  $V$  とし、この  $V$  内の点の組  $\{\mathbf{x}^\alpha\}$  を母点とした  $V$  のポロノイ分割を  $\{\Phi^\alpha\}$  とする。各  $\Phi^\alpha$  は点  $\mathbf{x}^\alpha$  を含む多角形であり、その特性関数を  $\phi^\alpha$  とする。次の  $f$  の離散化を考える。

$$f^d(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} f^{\alpha} \phi^{\alpha}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

誤差  $E^f = \int_V (f - f^d)^2 ds$  を最小とすることで係数は

$$f^{\alpha} = \frac{\int_V f(\mathbf{x}) \phi^{\alpha}(\mathbf{x}) ds}{\int_V \phi^{\alpha}(\mathbf{x}) ds} \quad (2)$$

として決定される。次に  $\{\Phi^\alpha\}$  に共役なテラネー分割  $\{\Psi^\alpha\}$  を使って  $x_i$  方向の微係数  $f_{,i}$  の次の離散化を考える。

$$g_i^d(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} g_i^{\alpha} \psi^{\alpha}(\mathbf{x}). \quad (3)$$

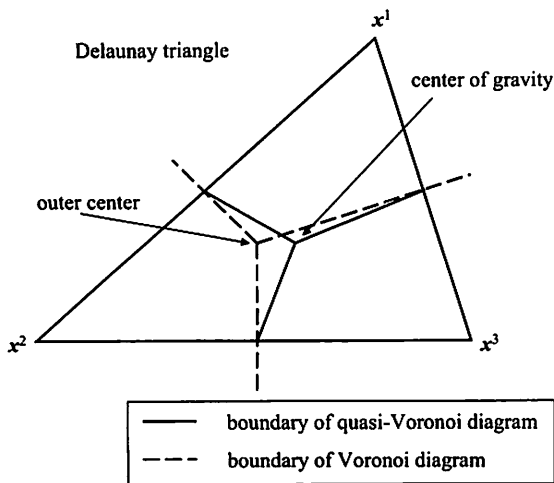


Fig. 1 歪ボロノイ分割.

ここで  $\psi^\alpha$  は  $\Psi^\alpha$  の特性関数である. 誤差  $E^g = \int \sum_i (f_i^d - g_i^d)^2 ds$  を最小とすることで係数は

$$g_i^\alpha = \frac{1}{\int_V \phi(x) ds} \sum_\beta \left( \int_V \psi^\alpha(x) \phi_{,i}^\beta(x) ds \right) f_i^\beta \quad (4)$$

として決定される. ここで  $\phi_{,i}^\beta$  はボロノイ分割の境界に沿ったデルタ関数であり, 積分の値は  $\Psi^\alpha$  と  $\Phi^\alpha$  の境界の二つの交点を結んだ積分に変換される. すなわち, ボロノイ分割やデラネー分割の境界には依存しない.

領域  $V$  に対してボロノイとデラネー分割以外の分割が与えられても, 同様な方法で関数と微係数の特性関数を使った離散化が決定できる. どの分割が最適かを定めるため, 誤差

$$E^c = \left| \int_V f^d - (g_1^d x_1 + g_2^d x_2) ds \right| \quad (5)$$

を考える. 共役なボロノイとデラネー分割を使うと,  $E^c$  は関数によって値を変える. これはボロノイ分割の母点  $x^\alpha$  がデラネー三角形の外心となっているためである. そこで母点の代わりにデラネー三角形の重心を使った分割を考える. この分割を歪ボロノイ分割とする (Fig. 1 参照). 式 (1) と式 (3) と同様の形式で関数と微係数を離散化すると,  $E^f$  と  $E^g$  を最小化することで係数が決定されるが, 共役な歪ボロノイ分割とデラネー分割を使った離散化は常に  $E^c = 0$  とする.

以上, 歪ボロノイ分割とデラネー分割を使うことで, 任意の関数に対し, 関数と微係数の特性関数を用いた最適の離散化が可能である. 最適とは3つの誤差  $E^{g,f,c}$  を0にすることを意味する. また, 離散化に使われた特性関数は互いに重なり合わないため, 亀裂のような不連続な変位関数を表すには都合が良い.

### 3. 破壊条件の表現

FEM- $\beta$  は, 前章で示された特性関数を使った離散化を使って, 境界値問題の解を数値解析で求める. 線形弾性体の境界値問題では, 変位と応力を, それぞれ, 歪ボロノイ分割とデラネー分割の特性関数を使って分割する. 以下, 歪ボロノイ

分割の領域と特性関数を  $\Phi^\alpha$  と  $\phi^\alpha$  とすると, 境界値問題を次の汎関数を使った変分問題,

$$J(u, \sigma) = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} c_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} ds \quad (6)$$

に変換する. ここで  $u_i$ ,  $\epsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  は変位, 歪, 応力であり,  $c_{ijkl}$  は弾性係数である. また変位境界条件が設定されている. 変位と応力の離散化,  $u_i = \sum u_i^\alpha \phi^\alpha$  と  $\sigma_{ij} = \sum \sigma_{ij}^\alpha \psi^\alpha$ , を代入すると  $\{\sigma_{ij}^\alpha\}$  が求められ  $\{u_i^\alpha\}$  に対するマトリクス方程式が導かれる. このマトリクス方程式は一定歪三角形要素を使ったFEMの全体剛性マトリクスと一致する. すなわち, 互いに重ならない特性関数を使って関数を離散化したにもかかわらず, FEM- $\beta$  は三角形要素FEMと同じ精度で  $\{u_i^\alpha\}$  を求めるのである.

変位を離散化した  $\{\phi^\alpha\}$  は互いに重なり合わないため, 変位の不連続性である破壊を表現することが容易である. これはRBSMの枠組みで考えると理解が早い. すなわち,  $\Phi^\alpha$  では変位が  $u_i^\alpha$  で一定であるから, これを剛体変位する剛体とみなす. すると, 式 (6) から導かれるマトリクスは, 弾性係数から決定される剛体間のスプリングを与える. したがって, このスプリングを切れれば良いのである. 最も簡単な引張強度  $\sigma^t$  が破壊条件として与えられる場合を考える. 応力はデラネー三角形で離散化されており, デラネー三角形には3つの歪ボロノイ分割の境界が含まれている. したがってデラネー三角形  $\Psi^\beta$  の応力  $\sigma_{ij}^\beta$  の主引張応力が  $\sigma^t$  に達すると, 破壊, すなわち,  $\Psi^\beta$  内のスプリングが切断される. この時,  $\Psi^\beta$  では応力が一定であるため, 「歪ボロノイ分割の3つの境界のどれを切断すべきか」が問題となる. これは, 弾塑性体の変形局所化現象の数値解析に共通する問題である.

FEM- $\beta$  は変位の離散化に剛体回転を加えることでデラネー三角形の歪場を非一様とし, 3つの境界の中から切断すべき境界を選ぶことができる. 領域  $\Phi^\alpha$  の剛体回転を  $\theta^\alpha$  とすると変位場の離散化は次式で与えられる.

$$u_i(x) = \sum_\alpha (u_i^\alpha + \epsilon_{ij3} x_j \theta^\alpha) \phi^\alpha(x). \quad (7)$$

なお  $x_i$  座標の原点は何処にとってもよいが,  $\Phi^\alpha$  の重心を原点とすることが力学的には適当であり, さらに式 (6) から導かれるマトリクス方程式が簡単になる. なお,  $\{\theta^\alpha\}$  を使っても  $\{u_i^\alpha\}$  はさほど大きく変化はしない. 十分細かく離散化をすれば, 歪同様, 回転 (変位勾配の非対称部分) は  $\{u_i^\alpha\}$  によって表すことができるため, 局所的な回転を表す  $\theta^\alpha$  を加えても解の精度がさほど向上しないためである. しかし, 亀裂先端等, 特異性のある変位場を離散化するときには, その微分である回転は発散し局所的にも大きな値をとる. このような場合には  $\{thta\}$  が解の精度を上げる.

### 4. 地震・火山の破壊現象の数値計算

地震・火山の破壊現象の重要な点は挙動のばらつきにある. 外力のばらつきを除けば, 挙動のばらつきは地殻や火山の不均一性に起因する. 構造や材料特性の分布を変えたシミュレーションの結果から, 不均一性に起因する挙動のばらつき

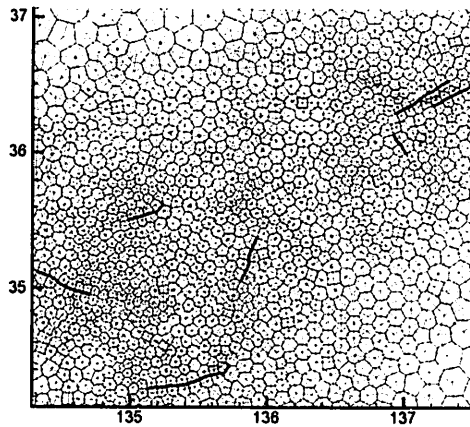


Fig. 2 断層系モデル.

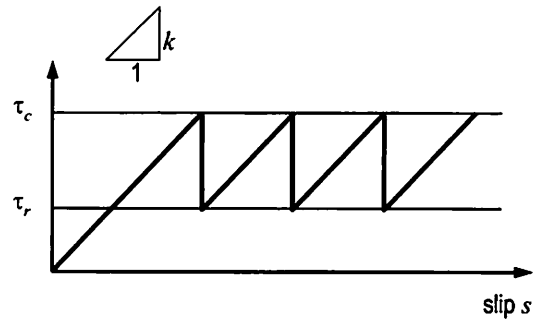


Fig. 3 断層の構成則モデル.

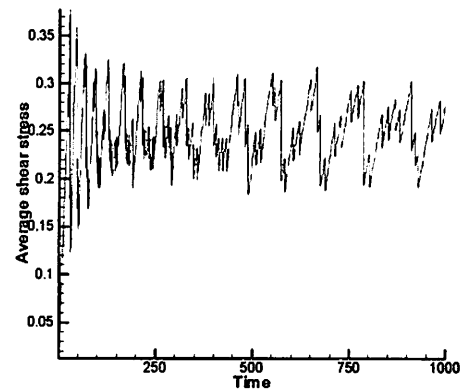
を定量的に評価することはできる。地震・火山の挙動予測をする際に、この評価は予測の幅として利用できる。

最初に地震現象のばらつきを考える。特定の断層から生じる地震はある程度規則的に発生するものの、発生の間隔にはばらつきがあることが観測されている。さまざまな原因があるが、断層付近の材料の不均一性は一つの原因である。材料の不均一性に起因するばらつきを定量的に評価するため、簡単な地殻のモデルを設定し、FEM-βを用いたシミュレーションを行った。シミュレーションでは、断層の強度の分布を変えた場合の両方を行った。

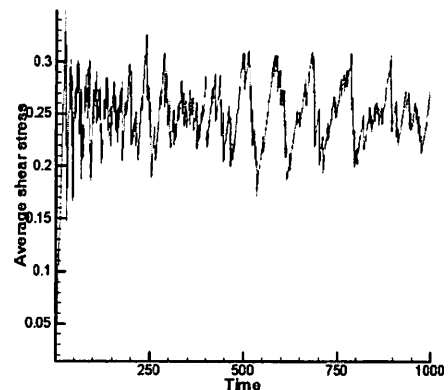
シミュレーションの対象とした中部日本の断層系のモデルを Fig. 2 に示す。図内の太線が断層を表す。地殻を線形弾性体とし、ヤング率  $E = 1[\text{MPa}]$ 、ポアソン比を  $\nu = 0.3$  とした。断層の構成則を Fig. 3 に示す。強度  $\tau_c = 1[\text{kPa}]$ 、残留強度  $\tau_r = 0.5[\text{kPa}]$ 、また、すべりのバネ定数を  $k = 1[\text{MPa m}]$  とした。境界条件として、プレートの運動に対応する一様変位速度を遠方で与える。断層の強度  $\tau_r$  を一様な場合と 10% の標準偏差を与えて断層毎に変えた場合の 2 ケースでシミュレーションを行い、一つの断層での地震発生の様子を Fig. 4 に示す。横軸は時間、縦軸は断層の平均せん断応力である。せん断応力が突然低下した時間が地震の発生時間である。また、せん断応力の低下の度合いは地震の規模に対応する。地震発生の様子は要素分割には依存しない。したがって、強度分布が一様な場合、地震発生の間隔のばらつきは断層間の相互作用の結果であることがわかる。そして、強度の不均一性はこのばらつきを助長することがわかる。

次に火山現象のばらつきを考える。山体崩壊は、内部のマグマの圧力増加に伴う火山の破壊現象である。引張強度を与えた簡単な山体のモデルを設定し、圧力の増加に伴う破壊の進展の様子を FEM-β を用いてシミュレートした。

山体をモルクーロンの破壊基準に従う線形弾性体としてモデル化する (Fig. 5 参照)。ヤング率  $E = 1[\text{MPa}]$ 、ポアソン比  $\nu = 0.3$  とし、破壊基準のせん断角を  $\mu = 0.3$  とした。山体の比重を 2.0 とし、重力加速度  $g = 9.8[\text{m/sec}^2]$  を与える。山体の壁面に働く一様な圧力としてマグマをモデル化し、圧



a) homogeneous



b) heterogeneous

Fig. 4 断層の地震発生の様子.

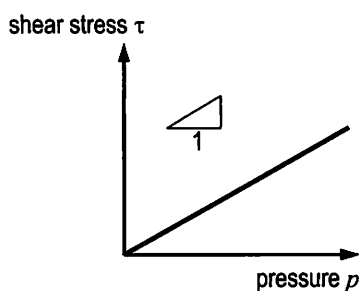


Fig. 5 山体の破壊基準.



a) homogeneous



b) heterogeneous

Fig. 6 山体の破壊パターン.

力を徐々に上げていく。地震と同様、せん断角を一様とした場合と、10%の標準偏差を与えて要素にランダムに割振り不均一にした場合の破壊の様子を Fig. 6 に示す。一様な場合、マグマ先端に応力が集中するため、先端から破壊が進展する。破壊は亜ポロノイ分割の境界に沿って進展するため、ギザギザとなり、その様子は分割毎に変わる。しかし、破壊は常にマグマの先端付近の分割から進展し、山体の上部に達する。しかし、ある限界を超えた不均一性を強度分布に与えた場合には、必ずしも先端から破壊が進展するとは限らない。また、破壊が山体の上部に達するとも限らない。実際、Fig. 6b) では、山体が下部から崩壊した様子を捉えている。山体中のマグマの溜まり方や山体の形状等、幾何学的な不均一性も原因として考えられるが、強度の不均一性が山体崩壊のパターンをばらつかせる原因であることを明瞭に示している。

## 5. おわりに

FEM- $\beta$ を用いたモンテカルロシミュレーションによって、不均一性に起因した地震・火山の挙動のばらつきを評価できることが示された。多数のシミュレーションが必要なモンテカルロシミュレーションでは数値解析手法の効率性が重要であり、通常のFEMによる破壊現象の解析に比べて効率的なFEM- $\beta$ はモンテカルロシミュレーションに適していること

が実証された。

地震・火山現象の観測技術は著しい進歩を見せている。観測されたデータは数値解析に貴重であるが、現象の予測に必要な観測の対象や精度を明らかにすると、観測技術のさらなる発展をもたらすことも期待できる。地震・火山現象のモンテカルロシミュレーションでは数値解析手法の効率性は重要であり、この点からもFEM- $\beta$ の有効性を示すことが必要である。

## 参考文献

- (1) 岩井俊英・小国健二・堀宗朗：FEM- $\beta$  -破壊現象の解析に適したFEM，応用力学論文集，6(2003)，pp. 648-656.
- (2) 小国健二・堀宗朗・阪口秀：破壊現象の解析に適した有限要素法の提案，土木学会論文集，(in print).