

# 均質化理論を用いたクロスプライ積層板の層間および その近傍における微視的 3 次元解析

## THREE-DIMENSIONAL MICROSCOPIC ANALYSIS OF INTERLAMINAR AREA IN CROSS-PLY LAMINATE USING A HOMOGENIZATION THEORY

松田 哲也<sup>1)</sup>, 奥村 大<sup>2)</sup>, 大野 信忠<sup>3)</sup>, 徳田 正孝<sup>4)</sup>

Tetsuya MATSUDA, Dai OKUMURA, Nobutada OHNO and Masataka TOKUDA

- 1) 三重大学創造開発研究センター (〒514-8507 津市上浜町 1515, E-mail: matsuda@mach.mie-u.ac.jp)  
 2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: okumura@mech.nagoya-u.ac.jp)  
 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ohno@mech.nagoya-u.ac.jp)  
 4) 三重大学工学部機械工学科 (〒514-8507 津市上浜町 1515, E-mail: tokuda@mach.mie-u.ac.jp)

In this study, the microscopic interaction between 0° and 90° layer in the interlaminar area of a CFRP cross-ply laminate is investigated by the three-dimensional microscopic analysis based on a homogenization theory. In the present formulation, the point-symmetry of internal structure in the laminate is employed to reduce the domain of analysis by half. Moreover, the substructure method is combined with the homogenization theory in order to decrease computational costs. We then analyze stress distributions in the interlaminar area of a carbon fiber/epoxy cross-ply laminate subjected to in-plane off-axial tensile load. It is thus shown that interlaminar shear stress occurs significantly at the interface between 0° and 90° layer. It is also shown that the microscopic interaction between two plies markedly appears only in the vicinity of the interface.

*Key words:* Homogenization, Long Fiber-Reinforced Laminate, Interlaminar Stress

### 1. 緒言

長繊維強化積層板は、一方向強化ラミナを積層した材料であるから、ラミナ同士の接着面である層間を有する。この部分においては、層間はく離などの微視的損傷が生じやすく、このような損傷は、積層板の巨視的破壊を引き起こす原因となり得る。したがって、層間およびその近傍での微視的な応力・ひずみ分布を解析することは、積層板の強度評価上、不可欠な課題である。このような層間での微視的解析を行う場合、層間が微視的応力・ひずみ場に影響を及ぼす層間近傍においては、ラミナの微視構造、すなわち繊維と母材からなる構造を考える必要がある。しかし逆に、層間の影響が及ばない層間から十分離れた領域では、ラミナを等価な一様材料として扱うことができる。したがって、層間の影響が微視的どの程度の範囲に及ぶかを調べることは、工学的に重要である。

これまでに組み込まれてきた積層板の層間における応力・ひずみ解析は、ラミナを一様材料と考える場合がほとんどで、このような解析では、層間やその近傍における微視的

な応力・ひずみ分布を求めることはできない。これに対して、強化相と母材からなるラミナの微視構造を考慮した層間の有限要素解析では、層間における応力・ひずみ分布を微視的に解析できる<sup>(1)-(4)</sup>。しかし文献<sup>(1)-(3)</sup>では、一方向強化積層板を対象とした 2 次元解析あるいは一般化 2 次元解析の場合に限られている。長繊維強化積層板は 3 次元構造を有するから、層間の微視的解析としては 3 次元解析を行う必要がある。なお文献<sup>(4)</sup>では、重合メッシュ法を利用して粒子強化複合材料の層間における 3 次元解析を行っているが、層間の影響が及ぶ範囲に関しては議論されていない。

ところで著者らは、前報<sup>(5),(6)</sup>において、時間依存変形の均質化理論<sup>(7),(8)</sup>と古典積層理論を組み合わせ、長繊維強化積層板の面内弾-粘塑性変形を解析した。この均質化理論は、いわゆるユニットセル問題<sup>(9),(10)</sup>に基づく理論であり、複合材料の巨視的特性とともに材料内部の微視的な応力・ひずみ分布も解析できるという特徴を有する。前報では、まず、各ラミナの微視構造として繊維と母材からなるユニットセルを取り、上述の均質化理論を用いてラミナ内での微視的応力・ひ

ずみ速度場を解析し、次に、それらのユニットセルでの体積平均を各ラミナの巨視的応力・ひずみ速度として古典積層理論を適用した。したがって前報の方法では、ラミナ内部の微視的応力・ひずみ分布は求まっても、層間およびその近傍での応力・ひずみ分布は解析できなかった。

しかし、均質化理論を用いて層間およびその近傍での微視的解析を可能にする方法がある。すなわち、後出の図1に示すように積層板の微視構造を仮定し、積層板全体に対してユニットセルを取ればよい。このような層間を含むユニットセルを取れば、上に述べた均質化理論の特徴を生かし、積層板の巨視的特性とともに、層間およびその近傍での微視的応力・ひずみ分布を3次元的に解析することができる。したがって、層間での微視的応力・ひずみ分布に加え、層間の影響が層間からどの程度離れた領域まで及ぶかを調べることができる。

そこで本研究では、積層板に対するユニットセルを上述のように取り、均質化理論を適用することで、クロスプライ積層板の層間およびその近傍における微視的3次元解析を行う。この解析では、解析領域が広範囲にわたるため、自由度が非常に大きくなるから、まず、積層板の内部構造における点対称性を利用して、解析領域を半減する<sup>(11)</sup>。さらに、サブストラクチャ法<sup>(12)</sup>を均質化理論に導入することで、計算負荷を低減する<sup>(13)</sup>。これらの方法を用いて、炭素繊維/エポキシクロスプライ積層板に面内引張負荷を与えた場合の、層間およびその近傍における微視的応力分布を解析する。さらに、この解析結果から、層間の影響が及ぶ範囲について検討を行う。

## 2. クロスプライ積層板の層間における微視的解析

### 2.1. 問題設定

本研究では、図1に示すようなクロスプライ積層板を考える。積層板を構成する一方向強化ラミナは、横方向繊維配列として正方配列を有しており、積層方向に2N本の繊維を含

むとする。このような積層板が、0°プライの繊維軸方向から $y_1$ 軸周りに角度 $\psi$ だけ偏った方向に巨視的面内引張を受け弾性変形する場合に、層間およびその近傍における応力分布を解析する。このため、緒言でも述べたように、均質化理論<sup>(9),(10)</sup>を適用する。

### 2.2. 均質化理論<sup>(9),(10)</sup>

まず、積層板に対して層間を含むユニットセル $Y$ を取る(図1)。この $Y$ の各構成相、すなわち繊維および母材は弾性体であるとし、それぞれ次の構成式に従うとする。

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1)$$

ここで、 $\sigma_{ij}$ と $\varepsilon_{kl}$ は微視的な応力とひずみであり、 $c_{ijkl}$ は弾性剛性テンソルを示す。このとき、弾性変形の均質化理論<sup>(9),(10)</sup>を適用すると、積層板の巨視的応力 $\Sigma_{ij}$ と巨視的ひずみ $E_{ij}$ 、および微視的応力 $\sigma_{ij}$ が、それぞれ次のように関係付けられる。

$$\Sigma_{ij} = \langle c_{ijpq} (\delta_{pk} \delta_{ql} + \chi_{p,q}^k) \rangle E_{kl} \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijpq} (\delta_{pk} \delta_{ql} + \chi_{p,q}^k) E_{kl} \quad (3)$$

ここで、 $(\cdot)_i$ は $y_i$ に関する微分を表し、 $\delta_{ij}$ はKroneckerのデルタを示す。また、 $\langle \cdot \rangle$ は $Y$ に関する体積平均を表し、 $Y$ の体積を $|Y|$ とすると、 $\langle \cdot \rangle = |Y|^{-1} \int_Y \cdot dY$ と定義される。さらに、式(2)と(3)における $\chi_i^k$ は、次の境界値問題

$$\int_Y c_{ijpq} \chi_{p,q}^k v_{i,j} dY = - \int_Y c_{ijkl} v_{i,j} dY \quad (4)$$

を $Y$ -周期境界条件のもとに解くことで得られる $Y$ -周期関数であり、特性関数と呼ばれる。ここで、 $v_i$ は $Y$ -周期性を満足する任意の変分を表す。一般に、境界値問題(4)は有限要素法を用いて解かれるから、有限要素法に基づき離散化すると、次式を得る。

$$K\chi^k = F^k, \quad (kl = 11, 22, \dots, 31) \quad (5)$$

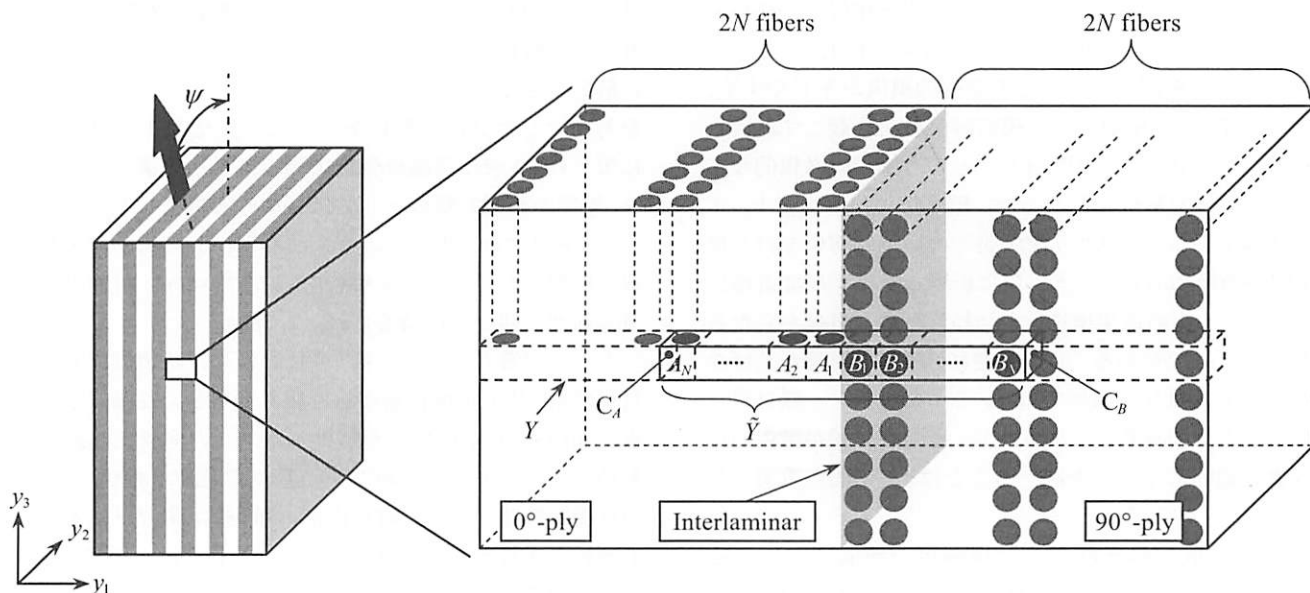


Fig. 1. Cross-ply laminate subjected to in-plane uniaxial tensile load, unit cell  $Y$ , and semiunit cell  $\tilde{Y}$  with cubic substructures  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) and  $B_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ).

ここで  $\chi^M$  は、特性関数  $\chi_i^M$  の節点値ベクトルを示す。また、 $K$  と  $F^M$  はそれぞれ

$$K = \int_Y B^T C B dY, \quad F^M = - \int_Y B^T C^M dY \quad (6)$$

と表される。ここで、 $B$  はひずみ-変位マトリックス、 $C$  は  $c_{ijkl}$  に基づく弾性剛性マトリックス、添字 T は転置を意味し、 $C^M = \{c_{11M} \ c_{22M} \ c_{33M} \ c_{12M} \ c_{23M} \ c_{31M}\}^T$  である。

式(5)を解き、 $\chi^M$  が求まれば、式(2)と(3)に基づき積層板の巨視的弾性挙動および微視的応力分布を計算できる。すなわち、積層板の層間およびその近傍での応力やひずみの分布を調べることができる。

### 2.3. 半ユニットセルによる解析領域の半減<sup>(11)</sup>

前節では、均質化理論を用いた層間の微視的解析法について述べた。しかしこの場合、図1に示すように、各ラミナは積層方向に多数の繊維を有しているため、ユニットセル  $Y$  は非常に大きくなり、これに伴い式(5)の  $K$  が大きくなるから、解析に要する記憶容量と計算時間が膨大になる。そこでこの節では、積層板の内部構造の点対称性を利用することで、解析領域の半減<sup>(11)</sup>を行う。

いま、図1に示すようなユニットセル  $Y$  の半分の領域  $\tilde{Y}$  (今後、半ユニットセルと呼ぶ)に着目する。このとき、図1からわかるように、積層板の内部構造は、 $\tilde{Y}$  の左右端面の中心  $C_A$  と  $C_B$  に関して点対称となる。この結果、特性関数  $\chi_i^M$  も、これらの点に関する点対称性を満足する。このような点対称分布を境界条件に用いることで、 $Y$  の代わりに  $\tilde{Y}$  を解析領域に取ることができ、式(4)は次式のような  $\tilde{Y}$  に関する境界値問題となる<sup>(11)</sup>。

$$\int_{\tilde{Y}} c_{ipq} \chi_{p,q}^M v_{i,j} d\tilde{Y} = - \int_{\tilde{Y}} c_{ijm} v_{i,j} d\tilde{Y} \quad (7)$$

この境界値問題(7)は、ユニットセル  $Y$  に対する境界値問題(4)と解析領域を除いて形が変わらない。したがって、境界値問題(4)と同じく有限要素法を用いて解くことができるから、前節と同様に離散化すると、

$$\tilde{K} \tilde{\chi}^M = \tilde{F}^M, \quad (kl = 11, 22, \dots, 31) \quad (8)$$

を得る。ここで  $\tilde{K}$  と  $\tilde{F}^M$  はそれぞれ次式で表される。

$$\tilde{K} = \int_{\tilde{Y}} B^T C B d\tilde{Y}, \quad \tilde{F}^M = - \int_{\tilde{Y}} B^T C^M d\tilde{Y} \quad (9)$$

ただし、 $\tilde{Y}$  の左右端面においては、 $Y$ -周期境界条件ではなく、点  $C_A$  と  $C_B$  に関する点対称境界条件を適用する。

### 2.4. サブストラクチャ法<sup>(12)</sup>の導入

半ユニットセル  $\tilde{Y}$  を解析領域とした場合、ユニットセル全体の場合に比べ、節点数が約 1/2 になる。したがって、計算負荷はかなり低減されるが、依然として相当に大規模である。そこで本節では、式(8)の解法としてサブストラクチャ法<sup>(12)</sup>を導入する。

図1に示すように、半ユニットセル  $\tilde{Y}$  が立方体セル  $A_i$  と  $B_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) からなることに着目し、 $A_i$  と  $B_i$  をサブストラクチャとして  $\tilde{Y}$  を分割する。このときまず、サブストラ

クチャ  $A_i$  に対する境界値問題が次のように導かれる。

$$K_A \chi_A^M = F_A^M, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (10)$$

ここで、 $\chi_A^M$  は  $A_i$  における特性関数の節点値ベクトルを示し、 $K_A$  と  $F_A^M$  は次式のように表される。

$$K_A = \int_{A_i} B^T C B dA_i, \quad F_A^M = - \int_{A_i} B^T C^M dA_i \quad (11)$$

ただし、 $\chi_A^M$  は隣接するサブストラクチャの共有節点において連続する必要があるから、境界値問題(10)は各サブストラクチャにおいて独立に解くことはできない。なお、本研究の特徴として、 $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) はそれぞれ形状および材料特性が同一であるから、式(11)の  $K_A$  と  $F_A^M$  は  $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) において共通となることに留意する。

つづいて、 $\chi_A^M$  の成分を  $A_i$  の内部節点と境界節点に関する成分に分離し、境界値問題(10)から内部節点に関する成分を消去すると、

$$\bar{K}_A^{(r)} \chi_A^{M(r)} = \bar{F}_A^{M(r)}, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (12)$$

を得る(付録参照)。ここで  $\chi_A^{M(r)}$  は、 $A_i$  の境界における特性関数の節点値ベクトルを示す。また  $\bar{K}_A^{(r)}$  と  $\bar{F}_A^{M(r)}$  は、それぞれ付録の式(17)および式(18)に示すマトリックスおよびベクトルを表す。上式は、サブストラクチャ  $B_i$  に関してまったく同様に導かれるから、次式を得る。

$$\bar{K}_B^{(r)} \chi_B^{M(r)} = \bar{F}_B^{M(r)}, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (13)$$

最後に、式(12)と(13)を一つにまとめることにより、サブストラクチャの境界節点のみに関する境界値問題が次のように導かれる。

$$K^{(r)} \chi^{M(r)} = F^{M(r)} \quad (14)$$

ここで、 $K^{(r)}$  は  $\bar{K}_A^{(r)}$  と  $\bar{K}_B^{(r)}$  から構成されるマトリックス、 $F^{M(r)}$  は  $\bar{F}_A^{M(r)}$  と  $\bar{F}_B^{M(r)}$  から構成されるベクトル、 $\chi^{M(r)}$  はサブストラクチャ  $A_i$  と  $B_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) の境界節点における特性関数の節点値ベクトルをそれぞれ表す。この境界値問題(14)を、 $Y$ -周期境界条件および2.3で述べた点対称境界条件に加え、隣接するサブストラクチャの共有節点における特性関数の連続条件のもとに解くことで、サブストラクチャの境界節点における特性関数が求まる。つづいて、付録の式(16)によりサブストラクチャの内部節点での特性関数が計算でき、 $\tilde{Y}$  の全節点での特性関数が得られる。

一般に、全サブストラクチャの境界節点数を合計しても、半ユニットセル  $\tilde{Y}$  全体の節点数には及ばないため、式(14)の  $K^{(r)}$  は、式(8)の  $\tilde{K}$  より小さくなる。したがって、解析に必要な記憶容量を低減できる。なお Okumura ら<sup>(13)</sup>は、この節で述べた方法を六角形ハニカムの面内座屈解析に適用している。

## 3. 解析条件および解析結果

この章では、2章で述べた方法を用いて、炭素繊維/エポ

キシクロスプライ積層板が面内引張負荷を受け弾性変形する場合の、層間およびその近傍における微視的応力分布を解析する。積層板を構成する一方向強化ラミナは、一般的なプリプレグを想定し、積層方向に16本の炭素繊維を含むとする ( $N=8$ )。また繊維体積率は、前報<sup>(5),(6)</sup>と同じく56%とする。

### 3.1. サブストラクチャおよび有限要素分割

前章で述べたように、半ユニットセル  $\bar{Y}$  を立方体サブストラクチャ  $A_i$  および  $B_i$  ( $i=1, 2, \dots, 8$ ) に分割し、さらにこの  $A_i$  と  $B_i$  をそれぞれ有限要素分割する。有限要素分割されたサブストラクチャ (要素数 4320, 節点数 5005) を図2に示す。

なお、本論文で提案した方法を使用せず、従来通りユニットセル  $Y$  に対して解析を行った場合、 $Y$  の総節点数は154921となるから、式(5)における自由度は  $154921 \times 3 = 464763$  となる。これに対して本解析の場合、各サブストラクチャの境界節点数がそれぞれ1298であるから、式(14)における自由度は  $1298 \times 16 \times 3 = 62304$  となる。このことから、本解析法により計算負荷が大幅に低減されることがわかる。

### 3.2. 材料特性

炭素繊維は横等方弾性体、エポキシは等方弾性体とし、これらの材料定数を前報<sup>(5),(6)</sup>と同じく表1のように設定する。この表において、炭素繊維の材料定数の添字 L と T は、それぞれ繊維の軸方向および横方向を意味する。

### 3.3. 負荷条件

負荷方向として、 $\psi = 45^\circ$  の場合を考える。引張方向における巨視的弾性ひずみが  $E_v = 0.5\%$  となるように面内負荷を与え、巨視的平面応力条件のもとに解析を行う。

### 3.4. 解析結果

まず、層間 ( $A_i$  と  $B_i$  の境界面) とその近傍 ( $A_1$  と  $A_2$  の境界面)、および層間からもっとも離れたラミナ中央面 ( $A_8$

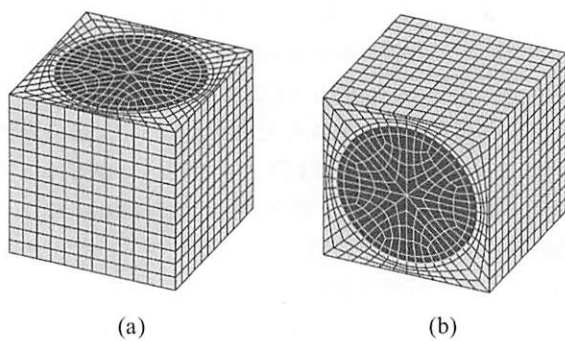


Fig. 2. Substructures and finite element meshes; (a)  $A_i$  ( $0^\circ$ -ply), (b)  $B_i$  ( $90^\circ$ -ply).

Table 1. Material constants<sup>(5),(6)</sup>.

Carbon fiber	$E_{LL} = 240$ [GPa]	$\nu_{TT} = 0.49$
	$E_{TT} = 15.5$ [GPa]	$\nu_{LT} = 0.28$
	$G_{LT} = 24.7$ [GPa]	
Epoxy	$E = 3.5$ [GPa]	$\nu = 0.35$

の左側面) における合成せん断応力  $[(\sigma_{12})^2 + (\sigma_{31})^2]^{1/2}$  のベクトル分布を図3に示す。ただし、 $\psi = 45^\circ$  の引張の場合、 $0^\circ$  および  $90^\circ$  プライの応力分布は対称性を有するから、 $0^\circ$  プライの結果のみを示す。はじめに図3(c)を見ると、積層板に対して巨視的には面内引張負荷しか与えていないにもかかわらず、微視的には層間においてかなり大きなせん断応力が発生していることがわかる。これは、 $0^\circ$  および  $90^\circ$  プライの繊維軸がそれぞれ引張負荷軸に向かって回転するからであり、このようにして生じる合成せん断応力の最大値は約9MPaに達している。この値は、Mises の相当応力に換算すると、積層板に作用している巨視的引張応力 (73MPa) の約21%に及ぶ。これに対して図3(b)を見ると、層間近傍ではすでにこのようなせん断応力は生じておらず、また図3(a)に示すように、プライ中央面においてもせん断応力は生じていない。この結果から、層間の影響が及ぶ範囲は非常に局所的であることがわかる。

つづいて、面外垂直応力  $\sigma_{11}$  の分布を図4に示す。この図を見ると、上述した層間でのせん断応力の場合と同様に、積層板には面内引張負荷しか与えていないが、微視的に見ると面外方向に引張・圧縮応力を生じていることがわかる。このような引張・圧縮応力は、層間せん断応力と比べるとかなり小さいが、層間とそれ以外の部分での応力分布がかなり異なるという点では、せん断応力の場合と共通している。すなわち層間においては、図4(c)に示すように、 $\psi = 45^\circ$  方向に沿って圧縮応力が、逆に  $\psi = -45^\circ$  方向に沿って引張応力が生じており、これは両プライの繊維軸がそれぞれ引張負荷軸に向かって回転することによると考えられる。これに対して層間近傍では、図4(b)に示すように、 $\sigma_{11}$  は  $y_3$  軸方向に関して一様に分布しており、これは  $0^\circ$  プライ中央面の応力分布 [図4(a)] とほとんど同じである。このことから、層間の影響が及ぶ範囲は非常に局所的であると言える。

なお、 $\psi = 0^\circ$  の引張の場合においても上述のように微視的応力分布を調べたが、 $\psi = 45^\circ$  の場合と同様の傾向が見られた。

## 4. 結言

本研究では、面内引張負荷を受ける CFRP クロスプライ積層板の層間とその近傍における微視的な応力分布を、均質化理論に基づき解析した。この解析の際、積層板の内部構造の点対称性を利用して解析領域を半減するとともに、サブストラクチャ法を適用して、解析に要する記憶容量および計算時間を低減した。解析の結果、層間で発生する合成せん断応力の最大値は、Mises の相当応力に換算すると、積層板に作用している巨視的引張応力の約21%に達することがわかった。これに対して、層間から繊維一本分ほど離れた層間近傍では、すでにラミナ中央部と同じ応力分布となっており、層間が影響を及ぼす範囲は極めて局所的であることが示された。したがって、本解析のような場合、層間では繊維と母材からなる微視構造を考慮する必要があるが、層間から繊維一本分程度以上離れた領域では、等価な均質体による置き換えが可能であると考えられる。

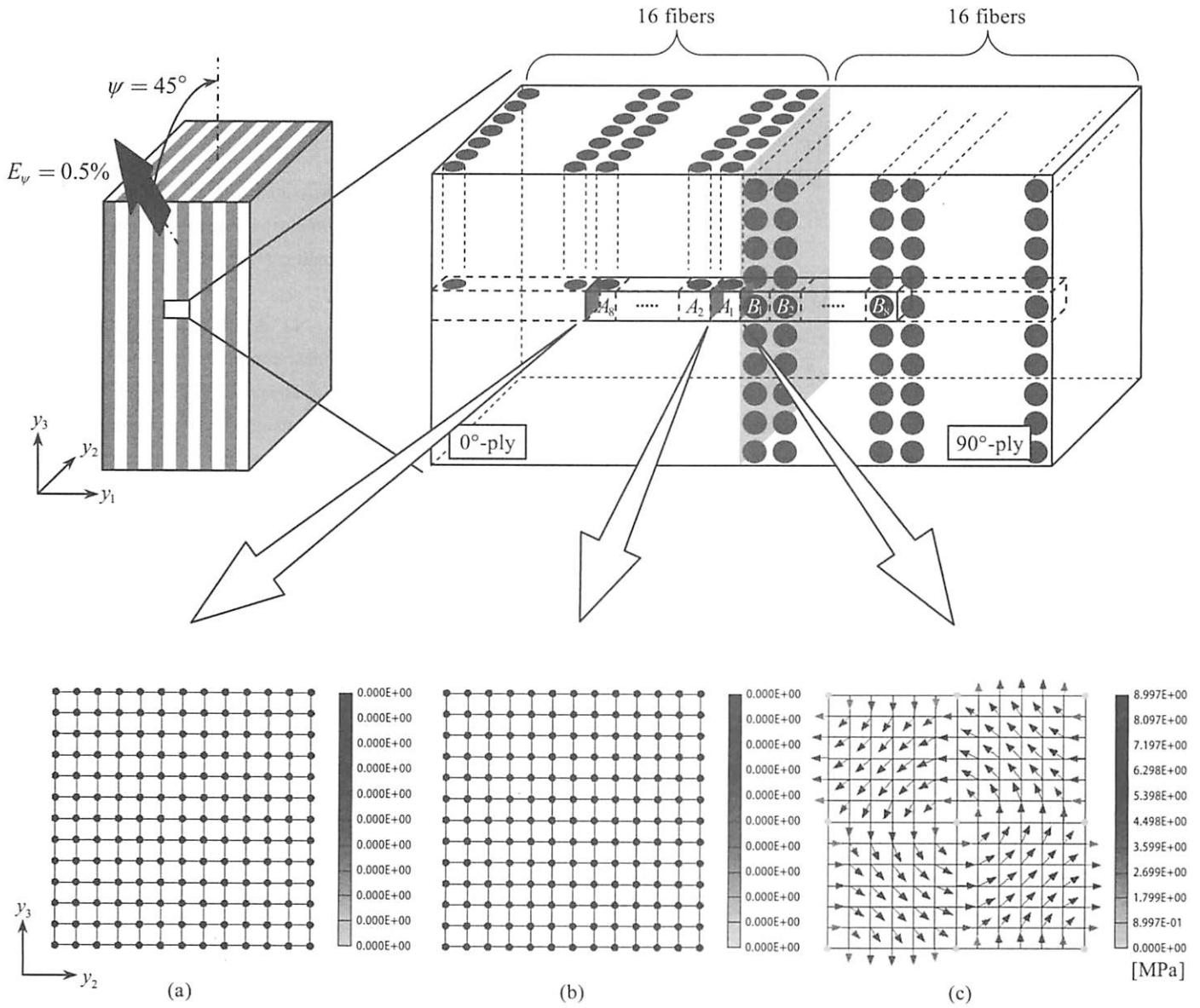


Fig. 3. Distribution of resultant shear stress  $[(\sigma_{12})^2 + (\sigma_{31})^2]^{1/2}$  on boundary surfaces of substructures at  $E_v=0.5\%$  ( $\psi = 45^\circ$ ); (a) left lateral surface of  $A_8$  (mid-plane of  $0^\circ$ -ply), (b) interface between  $A_1$  and  $A_2$ , (c) interface between  $A_1$  and  $B_1$  (interlaminar plane).

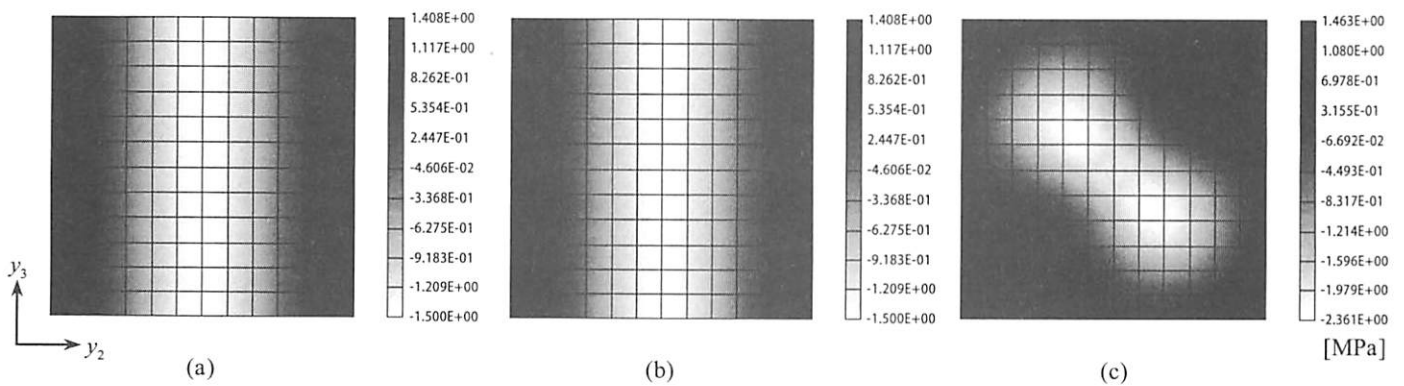


Fig. 4. Distribution of microscopic out-of-plane normal stress  $\sigma_{11}$  on boundary surfaces of substructures at  $E_v=0.5\%$  ( $\psi = 45^\circ$ ); (a) left lateral surface of  $A_8$  (mid-plane of  $0^\circ$ -ply), (b) interface between  $A_1$  and  $A_2$ , (c) interface between  $A_1$  and  $B_1$  (interlaminar plane).

付録

ここでは、式(12)の導出について説明する<sup>(12)</sup>。2.4でも述べたように、 $\chi_A^{\mu}$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) をサブストラクチャの内部節点に関する成分  $\chi_A^{\mu(\Omega)}$  と境界節点に関する成分  $\chi_A^{\mu(\Gamma)}$  に分離することで、境界値問題(10)は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_A^{(\Omega)} & \mathbf{K}_A^{(\Omega\Gamma)} \\ \mathbf{K}_A^{(\Gamma\Omega)} & \mathbf{K}_A^{(\Gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_A^{\mu(\Omega)} \\ \chi_A^{\mu(\Gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A^{\mu(\Omega)} \\ \mathbf{F}_A^{\mu(\Gamma)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

と表され、この式より

$$\chi_A^{\mu(\Omega)} = \left( \mathbf{K}_A^{(\Omega)} \right)^{-1} \left( \mathbf{F}_A^{\mu(\Omega)} - \mathbf{K}_A^{(\Omega\Gamma)} \chi_A^{\mu(\Gamma)} \right) \quad (16)$$

が導かれる。上式を式(15)に代入することで  $\chi_A^{\mu(\Omega)}$  を消去でき、その結果、式(12)を得る。ただし、式(12)中の  $\bar{\mathbf{K}}_A^{(\Gamma)}$  および  $\bar{\mathbf{F}}_A^{\mu(\Gamma)}$  は、次のように表される。

$$\bar{\mathbf{K}}_A^{(\Gamma)} = \mathbf{K}_A^{(\Gamma)} - \mathbf{K}_A^{(\Gamma\Omega)} \left( \mathbf{K}_A^{(\Omega)} \right)^{-1} \mathbf{K}_A^{(\Omega\Gamma)} \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_A^{\mu(\Gamma)} = \mathbf{F}_A^{\mu(\Gamma)} - \mathbf{K}_A^{(\Gamma\Omega)} \left( \mathbf{K}_A^{(\Omega)} \right)^{-1} \mathbf{F}_A^{\mu(\Omega)} \quad (18)$$

サブストラクチャ  $B_i$  に関しても、まったく同様に式(13)が導かれる。

参考文献

- (1) Pagano, N. J. and Rybicki, E. F.: On the significance of effective modulus solutions for fibrous composites, *J. Compos. Mater.*, **8** (1974), pp. 214-228.
- (2) Raghavan, P., Moorthy, S., Ghosh, S. and Pagano, N. J.: Revisiting the composite laminate problem with an adaptive multi-level computational model, *Compos. Sci. Technol.*, **61** (2001), pp. 1017-1040.
- (3) Raghavan, P. and Ghosh, S.: Concurrent multi-scale analysis of elastic composites by a multi-level computational model, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **193** (2004), pp. 497-538.
- (4) 高野直樹, 座古 勝: 重合メッシュ法による不均質体のミクロ応力解析, 日本機械学会論文集, A 編, **67** (2001), pp. 603-610.
- (5) Matsuda, T., Ohno, N., Tanaka, H. and Shimizu, T.: Homogenized in-plane elastic-viscoplastic behavior of long fiber-reinforced laminates, *JSME Int. J., Ser. A*, **45** (2002), pp. 538-544.
- (6) Matsuda, T., Ohno, N., Tanaka, H. and Shimizu, T.: Effects of fiber distribution on elastic-viscoplastic behavior of long fiber-reinforced laminates, *Int. J. Mech. Sci.*, **45** (2003), pp. 1583-1598.
- (7) Wu, X. and Ohno, N.: A homogenization theory for time-dependent nonlinear composites with periodic internal structures, *Int. J. Solids Struct.*, **36** (1999), pp. 4991-5012.
- (8) Ohno, N., Wu, X. and Matsuda, T.: Homogenized properties of elastic-viscoplastic composites with periodic internal structures, *Int. J. Mech. Sci.*, **42** (2000), pp. 1519-1536.
- (9) Bensoussan, A., Lions, J. L. and Papanicolaou, G.: *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, (1978), North-Holland Publishing Company.
- (10) Sanchez-Palencia, E.: *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, Lecture Notes in Physics, No. 127*, (1980), Springer-Verlag.
- (11) Ohno, N., Matsuda, T. and Wu, X.: A homogenization theory for elastic-viscoplastic composites with point symmetry of internal distributions, *Int. J. Solids Struct.*, **38** (2001), pp. 2867-2878.
- (12) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.: *The Finite Element Method, 5th Edition*, (2000), Butterworth-Heinemann.
- (13) Okumura, D., Ohno, N. and Noguchi, H.: Elastoplastic microscopic bifurcation and post-bifurcation behavior of periodic cellular solids, *J. Mech. Phys. Solids*, **52** (2004), pp. 641-666.