

多数の球を過ぎる流れ場における乱流現象の数値解析

NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOWS IN POROUS MEDIA OF MANY SPHERICAL BODIES

吉野 正人¹⁾, 安倍 伸一²⁾, 松原 雅春³⁾

Masato YOSHINO, Shin-ichi ABE and Masaharu MATSUBARA

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: masato@shinshu-u.ac.jp)
 2) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1)
 3) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: mmatsu@shinshu-u.ac.jp)

A numerical method of a lattice kinetic scheme based on the lattice Boltzmann method for incompressible viscous flows, which was proposed by Inamuro [*Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **360** (2002), pp. 477–484], is applied to a porous flow through many spherical bodies. Flow characteristics and pressure drops are obtained up to Reynolds number of approximately 5,000, which is defined by the superficial velocity and the equivalent diameter of the spherical bodies. For time-dependent flows at high Reynolds number, we examine the streamwise velocity fluctuation at different planes in the flow. These results indicate that the method is both applicable and effective for the microscopic investigation of turbulent flows in complex geometries.

Key Words: Turbulent Flows, Lattice Boltzmann Method, Lattice Kinetic Scheme, Porous Media, Spherical Body

1. はじめに

多孔質などに代表される複雑流路内の移動現象の問題は、水力学、機械工学などをはじめとする多くの理・工学分野に関連した重要な課題である。特に最近では、MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) などに関連して、マイクロスケールの構造をもつ装置内の流れに関する研究が注目されてきている⁽¹⁾。近年、計算機のめざましい発達に伴い、多孔質内流れについての数値解析による研究が多く行われるようになってきた。

ところで、複雑流路内の非圧縮性流れの場合には、一般に流れ場のみならず圧力場も複雑になるため、圧力を求める際の計算が発散しないように特別な工夫をしなければならぬ。これに対し、1990年代に開発された格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, 以下 LBM と呼ぶ)⁽²⁾⁽³⁾ は、流体をミクロスコピックな立場から捉える気体分子運動論をアナロジーとする非圧縮性粘性流体の解析手法であり、複雑な流れ場に対しても、圧力を解くための特別な工夫はいらない。したがって、LBM は、その特徴を生かして多孔質内における流れや熱・物質移動などの微視的な観点からの輸送現象解析に適用され成功を取ってきた⁽⁴⁾⁽⁵⁾。著者ら⁽⁶⁾も LBM を用いて多孔質構造内の物質移動解析を行い、内部の

球の直径および流量を断面積で割った速度基準のレイノルズ数が $Re \approx 200$ までの領域に対して、局所の流れ場と濃度場との関係を調べてきた。しかしながら、通常の LBM において格子点数を固定した場合、高レイノルズ数域における計算では数値不安定になることが多く、複雑流路内の乱流現象を解明するためには、安定な計算スキームを用いた手法の開発が必要となってくる。

近年、稲室⁽⁷⁾ は、非圧縮性粘性流れの LBM に基づく Lattice Kinetic スキームを提案し、基本的な問題の計算からその精度ならびに安定性について調べた。本手法の特徴は、格子ボルツマン方程式における衝突項の緩和時間を 1 に固定することによって高レイノルズ数域でも数値安定性が維持されること、ならびに粒子の速度分布関数が事実上不要となるため、計算機メモリの削減が可能となることである。

そこで本研究では、上述の Lattice Kinetic スキームを導入した LBM を用いて、空間に多数の球状物体を詰め込んだ場合の高レイノルズ数流れの解析を行い、微視的な立場から乱流現象を解析することを目的とした。

2. 計算手法

2.1. Lattice Kinetic スキームを用いた LBM

本手法では、流体を有限個 (N 個) の速度をもつ多数の仮

想粒子の集合体（格子気体モデル）で近似し、各粒子の衝突と並進とを粒子の速度分布関数に対する格子ボルツマン方程式を逐次計算し、得られた速度分布関数のモーメントから巨視的な流れ場（流速、圧力など）を求める。使用される物理量はすべて、代表長さ L 、粒子の代表速さ c 、時間スケール $t_0 = L/U$ (U : 流れの代表速さ)、基準密度 ρ_0 を用いて無次元化したものである⁽⁸⁾。以下の計算では、粒子の速度ベクトルとして3次元15速度モデル ($N = 15$) を用いた。このモデルにおける粒子速度 c_i の成分は、次式で与えられる。

$$[c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

一方、時刻 t に格子点 \mathbf{x} における流体の密度 ρ および流速 \mathbf{u} は、それぞれ次式で定義される。

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{15} f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i \Delta x, t - \Delta t), \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \sum_{i=1}^{15} \mathbf{c}_i f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i \Delta x, t - \Delta t), \quad (3)$$

ここで、

$$f_i^{\text{eq}} = E_i \rho \left[1 + 3c_{i\alpha} u_\alpha + \frac{9}{2} c_{i\alpha} c_{i\beta} u_\alpha u_\beta - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + A \Delta x \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) c_{i\alpha} c_{i\beta} \right], \quad (4)$$

および、 $E_1 = 2/9$, $E_i = 1/9$ ($i = 2, 3, \dots, 7$), $E_i = 1/72$ ($i = 8, 9, \dots, 15$) である。ここで、 $\alpha, \beta = x, y, z$ であり（添字 α, β はデカルト座標を表し、総和規約に従う）、 Δx は格子間隔、 Δt は時間刻み、また $A = O(1)$ は粘性係数に関係しているパラメータである。なお、 Δt は、仮想粒子がちょうど隣の格子点まで移動する時間と等しくなるように選ぶ。このように、Lattice Kinetic スキームを導入したLBMでは、巨視的変数が局所平衡分布のみで定義されており、粒子の速度分布関数がいっさい不要であるため、計算メモリの削減が可能となることに注意すべきである。さらに、本モデルを用いたLBMでは、圧力 p は流体の密度 ρ と次式の関係がある。

$$p = \frac{1}{3} \rho. \quad (5)$$

なお、式(4)における流速の1階微分には、以下の差分近似を用いた。

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \approx \frac{1}{10\Delta x} \sum_{i=2}^{15} c_{i\alpha} u_\beta(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x). \quad (6)$$

2.2. 流体力学的方程式

式(2)~(4)に漸近理論(S展開)⁽⁹⁾を適用すると、 Δx と同じオーダーの微小パラメータ ε で展開された

$$u'_\alpha = \varepsilon u_\alpha^{(1)} + \varepsilon^2 u_\alpha^{(2)}, \quad p' = \varepsilon^2 p^{(2)} + \varepsilon^3 p^{(3)},$$

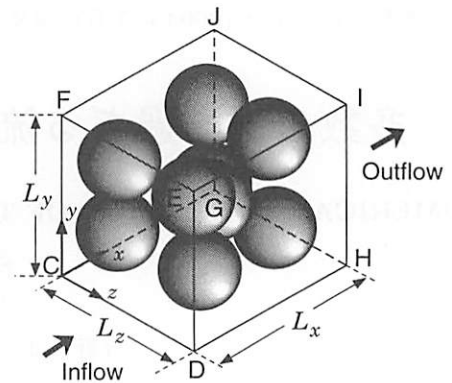


Fig. 1 Three-dimensional porous structure.

が、次式を満たすことが示されている。

$$\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (7)$$

$$\text{Sh} \frac{\partial u'_\alpha}{\partial t} + u'_\delta \frac{\partial u'_\gamma}{\partial x_\delta} = -\frac{\partial p'}{\partial x_\gamma} + \nu \frac{\partial^2 u'_\gamma}{\partial x_\delta \partial x_\delta}, \quad (8)$$

ここで、 $\text{Sh} = U/c$ はストローハル数であり、また動粘性係数 ν は、次式で与えられる。

$$\nu = \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{9} A \right) \Delta x. \quad (9)$$

本手法では、微小パラメータ ε が Δx および A に関係していることに注意すべきである。式(7)および(8)は、それぞれ非圧縮性流体の連続の式およびナビエ・ストークス方程式に対応している。したがって、Lattice Kinetic スキームを用いたLBMによる解は、非圧縮性粘性流体の流速 \mathbf{u} および圧力 p を相対誤差 $= O[(\Delta x)^2]$ で計算できることがわかる。

3. 空間に多数の球状物体を詰め込んだ流れ場の解析

3.1. 問題

Fig. 1 に示すように、 $L_y = L_z = 0.945L_x$ なる直方体領域内に同一の球状物体を表す格子の集合体を9個置いた流れ場を考える。物体の相当直径は $D_p = 0.390L_x$ であり、このときの空隙率は $\phi = 0.686$ となる。物体の中心の座標は、 $(x/L_x, y/L_y, z/L_z) = (0.21, 0.29, 0.22)$, $(0.21, 0.74, 0.81)$, $(0.22, 0.71, 0.22)$, $(0.23, 0.32, 0.80)$, $(0.48, 0.49, 0.49)$, $(0.75, 0.80, 0.29)$, $(0.78, 0.23, 0.70)$, $(0.78, 0.78, 0.70)$, $(0.80, 0.23, 0.29)$ である。

3.2. 境界条件

入口と出口には圧力差を伴う周期境界条件、その他の境界にはすべり壁条件を適用した。また物体上では、すべりなし境界条件を適用した。なお本問題では、境界上で流速の1階微分を規定しなければならない。そこで、物体上、領域の境界、および入口・出口において、それらの接線方向には2次精度の中心差分、法線方向には2次精度の片側差分を用いて近似した。

4. 計算結果と考察

Fig. 1 に示す流れ場の計算を以下の通り行った。全領域を x, y, z 方向にそれぞれ $146 \times 138 \times 138$ 個の立方体格子に分割

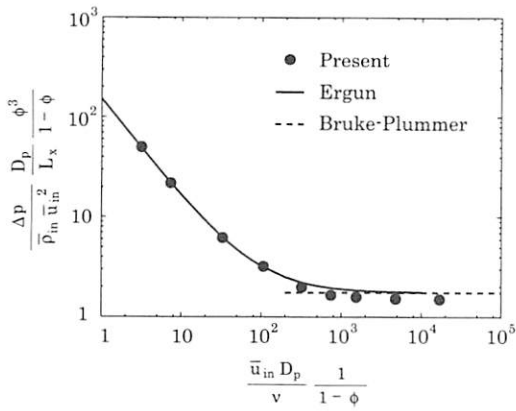


Fig. 2 Pressure drops versus Reynolds numbers.

し、レイノルズ数 $Re = \bar{u}_{in} D_p / \nu$ が 5,292 までの計算を行った。ここで、 \bar{u}_{in} は過渡状態後の時間および空間平均した流入流速である。初期条件は、全領域で $\rho = 1, \mathbf{u} = \mathbf{0}$ とした。

4.1. 圧力損失の実験式との比較

まず、各レイノルズ数に対する入口と出口間の圧力損失を求め、既存の実験式との比較を行った。その結果を Fig. 2 に示す。この図において、黒丸が本計算結果、実線および破線はそれぞれ Ergun⁽¹⁰⁾ および Burke-Plummer⁽¹¹⁾ の経験式を表している。また、横軸は修正レイノルズ数 $Re' = Re / (1 - \phi)$ を表している。ここで、Burke-Plummer の式の適用範囲は $Re' > 1,000$ であることが知られている。この結果から、計算により得られた圧力損失の値は高レイノルズ数域で若干小さい値となっているが、広範囲のレイノルズ数にわたって実験式と良く一致している。なお、本計算を Lattice Kinetic スキームを用いない通常の LBM によって同じ格子点数で計算したところ、 $Re \approx 700$ ($Re' \approx 2,000$) 以上で数値不安定になり計算が発散した。したがって、本スキームの導入により、高レイノルズ数域でも複雑な流れ場の計算が安定に行えることがわかった。

4.2. 各レイノルズ数に対する局所の流れ場

次に、種々レイノルズ数に対する局所流れの解析を行った。Figs. 3~5 は、各レイノルズ数 ($Re = 224, 1,478, 5,292$) に対する異なる断面 ($y/L_y = 0.62, x/L_x = 0.51$) 上の過渡状態後の速度ベクトル図を表している。

まず、 $Re = 224$ (Fig. 3) では、流れは準定常状態となり、主流に平行な断面 (a) では物体側面で剥離が生じ、物体後方の空隙の大きい箇所に小さな渦が確認できる。また、主流に垂直な断面 (b) には、二次渦の存在も確認することができる。一方、 $Re = 1,478$ および $5,292$ (Figs. 4 および 5) になると流れは完全に非定常になり、空隙の大きい箇所の至る所に大小さまざまなスケールの渦が見られる非常に複雑な流れ場が得られた。特に、主流に垂直な断面 (b) における四つのコーナー付近には、時間とともに位置および大きさが変動する非定常渦の存在が確認され、その数は $Re = 224$ のときに比べて増加していることもわかる。さらに、Fig. 4 と Fig. 5 を比較すると、 $Re = 5,292$ のときには $Re = 1,478$ のとき

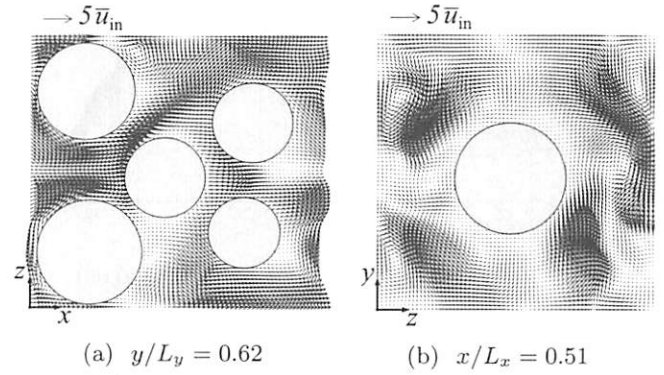


Fig. 3 Velocity vectors at $Re = 224$.

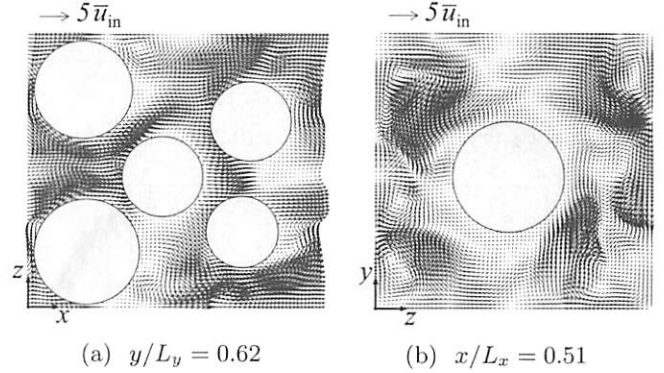


Fig. 4 Velocity vectors at $Re = 1,478$.

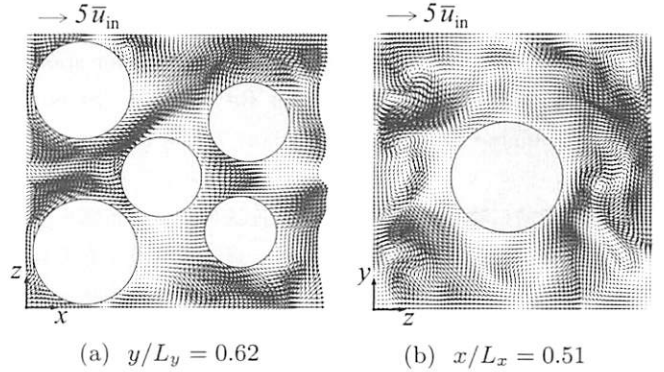


Fig. 5 Velocity vectors at $Re = 5,292$.

に比べて、物体の後流の影響が下流方向の広い範囲にまで及んでおり、流れの特徴が場所によって大きく異なることがわかった。

4.3. 高レイノルズ数域における非定常解析

4.2 節の計算結果から、高レイノルズ数域では非定常な流れ場になることがわかった。そこで、以下では $Re = 1,478$ のケースに対して乱流現象の解析を行った。

代表的な点における主流方向流速 u_x の時間変動ならびにそのパワースペクトルを Fig. 6 に示す。各点の座標は、それぞれ $(x/L_x, y/L_y, z/L_z) = (0.45, 0.62, 0.09), (0.24, 0.49, 0.45), (0.51, 0.84, 0.14)$ である (以下では、各点をそれぞれ P_1, P_2, P_3 と呼ぶ)。これら 3 点の幾何的特徴は、下記の通りである。点 P_1 は、球状物体の後流の影響を受けている点であり、点 P_2 は、それとは反対に物体の前面に向かって流れる接近流の影響を大きく受けた淀み点付近の点である。さらに、点 P_3

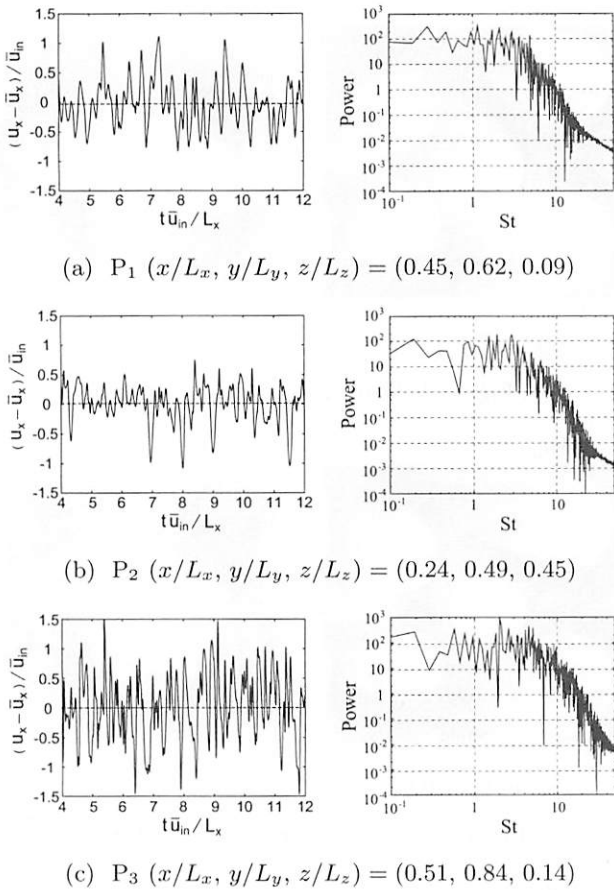


Fig. 6 Velocity fluctuations (left) and their power spectra (right) at three different points for $Re = 1,478$. St is the Strouhal number $St = FL_x/\bar{u}_{in}$, where F is a frequency.

は、三次元的に物体の後流および接近流の両方の影響を受けた点である。なお、以下の解析では、過渡状態後である無次元時間 t^* ($= t\bar{u}_{in}/L_x$) が $3.47 \sim 13.86$ の $60,000$ 点のサンプリングデータをもとに行った。流速の時間変動の図において、縦軸の \bar{u}_x はこのサンプリング区間における流速 u_x の時間平均を表している。また、パワースペクトルの図において、横軸は周波数 F を無次元化したストローハル数 $St (= FL_x/\bar{u}_{in})$ を表している。

流速の時間変動図を見ると、点 P_1 では、平均流速のまわりに上下ほぼ等しく変動しているのに対し、点 P_2 では、負の大きな流速変動が間欠的に現れていることから、比較的大きなスケールをもつ渦の通過が予想される。また、点 P_3 では、これらの3点の中では最も大きく変動している。一方、パワースペクトルにおいては、いずれの点においても卓越した周波数が見られず、広範囲の周波数域にわたって連続スペクトルが得られている。特に点 P_3 においては、他の点に比べて高周波成分を含む流速変動となっており、さらに、 $5 \leq St \leq 20$ 付近に乱流の特徴である $-5/3$ の傾きをもつパワースペクトルが見られることから、 $Re = 1,478$ では乱流に遷移していることがわかる。

5. おわりに

Lattice Kinetic スキームを導入した LBM を用いて、空間

に多数の球状物体を詰め込んだ流れ場における流動解析を行った。計算によって得られた圧力損失の値は、高レイノルズ数域においても、既存の実験式とよく一致した。また、種々のレイノルズ数に対して局所的な流れ場を求め、流速の時間変動およびそのパワースペクトル解析を行った。その結果、本手法が複雑な流れ場における乱流現象の解析に有効であると考えられる。

最後に、本手法の計算時間は、 $Re = 1,478$ における格子数 $146 \times 138 \times 138$ の計算 1 ケースに対し、Pentium 4 プロセッサ (3.2 GHz) 搭載のパソコン 1 台を使って過渡状態が終わるまでに約 75 時間であった。

参考文献

- (1) C. M. Ho and Y. C. Tai : Micro-Electro-Mechanical Systems (MEMS) and fluid flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**(1998), pp. 579-612.
- (2) S. Chen and G. D. Doolen : Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**(1998), pp. 329-364.
- (3) S. Succi : The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond, (2001), *Oxford University Press*.
- (4) R. S. Maier, D. M. Kroll, Y. E. Kutsovsky, H. T. Davis and R. S. Bernard : Simulation of Flow through Bead Packs using the Lattice Boltzmann Method, *Phys. Fluids*, **10**(1998), pp. 60-74.
- (5) T. Zeiser, M. Steven, H. Freund, P. Lammers, G. Brenner, F. Durst and J. Bernsdorf : Analysis of the Flow Field and Pressure Drop in Fixed-Bed Reactors with the Help of Lattice Boltzmann Simulations, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **360**(2002), pp. 507-520.
- (6) M. Yoshino and T. Inamuro : Lattice Boltzmann Simulations for Flow and Heat/Mass Transfer Problems in a Three-Dimensional Porous Structure, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **43**(2003), pp. 183-198.
- (7) T. Inamuro : A Lattice Kinetic Scheme for Incompressible Viscous Flows with Heat Transfer, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **360**(2002), pp. 477-484.
- (8) T. Inamuro, M. Yoshino and F. Ogino : Accuracy of the Lattice Boltzmann Method for Small Knudsen Number with Finite Reynolds Number, *Phys. Fluids*, **9**(1997), pp. 3535-3542.
- (9) Y. Sone : Asymptotic Theory of Flow of Rarefied Gas over a Smooth Boundary II, in *Rarefied Gas Dynamics*, edited by D. Dini (Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, 1971), Vol. 2, pp. 737-749.
- (10) S. Ergun : Fluid Flow through Packed Columns, *Chem. Eng. Prog.*, **48**(1952), pp. 89-94.
- (11) S. P. Burke and W. B. Plummer : Gas Flow through Packed Columns, *Ind. Eng. Chem.*, **20**(1928), pp. 1196-1200.