

# 選点法による 3 次元圧電材料の調和振動解析法

## A COLLOCATION METHOD FOR THREE-DIMENSIONAL TIME-HARMONIC ANALYSIS OF PIEZOELECTRIC MATERIALS

松本 敏郎<sup>1)</sup>, 田中 正隆<sup>2)</sup>, 石川 真之<sup>3)</sup>, 小川 洋平<sup>4)</sup>

Toshiro MATSUMOTO, Masataka TANAKA, Masayuki ISHIKAWA and Youhei OGAWA

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: toshiro@gipwc.shinshu-u.ac.jp)  
 2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)  
 3) エスエムシー (株) (〒 105-0004 東京都港区新橋 1-13-12 )  
 4) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: ogawa@artist.shinshu-u.ac.jp)

This paper presents a collocation method approach for time-harmonic analyses of piezo-electric materials. A radial basis function proposed by Wendland is used to approximate the field functions. The unknown coefficients are determined by solving a system of linear algebraic equations which are obtained so that the approximated function satisfies the boundary conditions at boundary collocation points and the governing equation at internal collocation points. The numerical results for an orthotropic material and a piezoelectric material show that the present method is promising.

**Key Words** : Collocation Method, Radial Basis Function, Time-harmonic Analysis, Piezoelectric Materials

### 1. はじめに

航空機, 自動車, 医療機器, 電子機器等で圧電材料の重要性が増すに伴い, その強度や振動特性などの力学的挙動を高精度に解析するための数値解析法が必要となってきた。このような数値解析法として, 境界要素法の開発も試みられている<sup>(1)(2)</sup>。しかしながら, 圧電材料は弾性場と電場が互いに連成し, 材料定数も異方性を示すため, その支配微分方程式がきわめて複雑な形となる。したがって, 境界要素法による定式化は著しく複雑な形となり, 計算時間も膨大なものとなる。

そこで本論文では, プログラムの開発がきわめて容易である選点法を用いて, 圧電材料の調和振動問題での定式化を示し, 数値解析例によりその有効性について検討する。本研究では, 選点法の近似関数には Wendland<sup>(3)</sup> による RBF(Radial Basis Function) を用いる。

### 2. 理 論

#### 2.1. 支配微分方程式

圧電材料の変位・応力解析に対する構成式は, 以下の 2 式である。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} + e_{lij}\phi_{,l} \quad (1)$$

$$D_i = e_{ikl}u_{k,l} - \epsilon_{il}\phi_{,l} \quad (2)$$

ただし,  $\sigma$  は応力,  $C_{ijkl}$  は弾性定数テンソル,  $u$  は変位,  $e_{lij}$  は圧電定数テンソル,  $\phi$  は電位,  $D$  は電束密度,  $\epsilon_{il}$  は誘電率テンソルである。

構成式を運動方程式と電荷方程式に代入し調和振動状態を仮定すると, 次のような圧電材料の振動問題における連立の支配微分方程式が得られる。

$$C_{ijkl}\partial_l\partial_i u_k + \rho\delta_{jk}\omega^2 u_k + e_{lij}\partial_l\partial_i\phi = -b_j \quad (3)$$

$$e_{ikl}\partial_l\partial_i u_k - \epsilon_{il}\partial_l\partial_i\phi = q \quad (4)$$

ただし,  $\rho$  は密度,  $b$  は物体力,  $q$  は電荷である。

ここで,  $u_k = U_k$ ,  $\phi = U_4$  と書き, これらを合わせたものを  $U_K$  と書くことにする。ただし, 大文字で書いた添字は 1~4 の範囲を取り, 小文字の添字は 1~3 の範囲を取るものとする。式 (3), (4) をまとめて, 次のように書くことができる。

$$\mathcal{L}_{JK}U_K + B_J = 0 \quad (5)$$

ただし

$$\mathcal{L}_{JK} = \begin{bmatrix} C_{ijkl}\partial_l\partial_i + \rho\delta_{jk}\omega^2 & e_{lij}\partial_l\partial_i \\ e_{ikl}\partial_l\partial_i & -\epsilon_{il}\partial_l\partial_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$B_J = \{b_j - q\}^T \quad (7)$$

である。

境界条件は、境界上で変位または表面力が既知、かつ電位または法線方向の電束が既知量として与えられるものとする。表面力および電束は、次式により変位とポテンシャルに関係づけられる。

$$\begin{Bmatrix} t_i \\ D_n \end{Bmatrix} = T_I = G_{iIKl} U_{K,l} n_i \quad (8)$$

ただし、

$$G_{iIKl} = \begin{cases} C_{ijkl} & \text{for } I = 1, 2, 3; K = 1, 2, 3 \\ e_{lij} & \text{for } I = 1, 2, 3; K = 4 \\ e_{ikl} & \text{for } I = 4; K = 1, 2, 3 \\ -\epsilon_{il} & \text{for } I = 4; K = 4 \end{cases} \quad (9)$$

## 2.2. 選点法による定式化

ここでは、Kansa<sup>(4)</sup>に基づく選点法により定式化を行う。まず、変位とポテンシャルからなるベクトル  $U_K$  を、次式で近似する。

$$U_K(x) = \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_K^m \psi(x, z^m) \quad (10)$$

ただし、 $x$  は場の任意の点の座標、 $z^m$  は選点の座標、 $\alpha_K^m$  は未知係数、 $N$  は境界選点数、 $L$  は内部選点数である。

近似関数  $\psi(x, z^m)$  には、RBFを用いる。ここではWendland<sup>(3)</sup>による次の形の関数を用いる。

$$\psi(x, z^m) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r^m}{a}\right)^5 \left\{8\left(\frac{r^m}{a}\right)^2 + 5\frac{r^m}{a} + 1\right\} & (r^m \leq a) \\ 0 & (r^m > a) \end{cases} \quad (11)$$

ただし、 $r^m$  は  $x$  点と点  $z^m$  間の距離であり、 $a$  は近似関数を無次元化するためのパラメータである。このとき、表面力および電束を関係づける式は、次のようになる。

$$T_I = \sum_{m=1}^{N+L} \alpha_K^m \{G_{iIKl} n_i \psi_{,l}(x, z^m)\} \quad (12)$$

また、式 (10) を支配微分方程式 (5) に代入すると次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^{N+L} \alpha_K^m \{\mathcal{L}_{JK} \psi(x, z^m)\} + B_J = 0 \quad (13)$$

すなわち

$$\sum_{m=1}^{N+L} \begin{bmatrix} C_{ijkl} \psi_{,li}(x, z^m) + \rho \delta_{jk} \omega^2 \psi(x, z^m) & e_{lij} \psi_{,li}(x, z^m) \\ e_{ikl} \psi_{,li}(x, z^m) & -\epsilon_{il} \psi_{,li}(x, z^m) \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_K^m \\ \alpha_4^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_j \\ -q \end{pmatrix} = 0 \quad (14)$$

未知係数  $\alpha_K^m$  を求めるためには、まず境界上の  $N$  個の選点において、変位・電位に関する式 (10) または、表面力・電束に関する式 (12) どちらかを、それぞれの成分ごとに境界条件値に規定する。次に  $L$  個の内部選点について、支配微分方程式に対応する式 (13) を考慮することにより、 $4 \times (N+L)$  個の未知係数  $\alpha_K^m$  ( $K = 1, 2, 3, 4; m = 1, 2, \dots, N+L$ ) に関する  $4 \times (N+L)$  個の連立方程式を作ることができる。

式 (12) と (13) の計算には近似関数の 1 回微分と 2 回微分が必要となる。これらを、以下に示す。

$$\psi_{,i}(x, z^m) = \frac{r_i^m}{a^2} \left\{ -14 + 140 \left(\frac{r^m}{a}\right)^2 - 280 \left(\frac{r^m}{a}\right)^3 + 210 \left(\frac{r^m}{a}\right)^4 - 56 \left(\frac{r^m}{a}\right)^5 \right\} \quad (15)$$

$$\psi_{,il}(x, z^m) = \frac{\delta_{il}}{a^2} \left\{ -14 + 140 \left(\frac{r^m}{a}\right)^2 - 280 \left(\frac{r^m}{a}\right)^3 + 210 \left(\frac{r^m}{a}\right)^4 - 56 \left(\frac{r^m}{a}\right)^5 \right\} + \frac{r_i^m r_l^m}{a^4} \left\{ 280 - 840 \frac{r^m}{a} + 840 \left(\frac{r^m}{a}\right)^2 - 280 \left(\frac{r^m}{a}\right)^3 \right\} \quad (16)$$

ただし、 $r_i^m = x_i - z_i^m$  である。

## 3. 数値解析例

以上の定式化に基づいて作成した圧電材料の 3 次元調和振動解析のための選点法プログラムを用い、直交異方性弾性体と圧電材料の解析を行った。

### 3.1. 直交異方性体の調和振動解析

解析例として直交異方性材料からなる図 1 のようなモデルを解析し、厳密解との比較を行った。このモデルに対して、境界選点は  $x_1$  軸に平行な側面を図 2 のように、 $x_1$  軸に垂直な側面を図 3 のように置き、合計 1026 点取った。内部選点は 1127 個の点を等間隔に配置した。境界条件は、直方体の右側の面において  $x_1$  軸方向のみを支持し、電位を 0 [V]、左側の面において  $x_1$  軸方向に調和加振力 1.0 [MPa] を与え、電位を 1 [V] とし、それ以外の  $x_2$  軸と  $x_3$  軸に垂直な側面はすべて表面力を 0、電束密度を 0 とした。また、異方性の主軸は解析対象の座標軸と一致しており、弾性定数を表 1 とし、圧電定数をすべて 0、誘電率を  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 1.0 \text{ C}/(\text{Vm})$ 、密度を  $6000 \text{ kg}/\text{m}^3$ 、角振動数を  $9.32 \times 10^3 \text{ rad}/\text{s}$  とした。また、RBF のパラメータは  $a = 1$  とした。得られた線分 CD 上の変位の  $x_2$  成分  $u_2$ 、線分 AB 上の変位の  $x_3$  成分  $u_3$  と電位  $\phi$  を、それぞれ図 4, 5, 6 に示す。この解析は、圧電定数を 0 とすることにより、結果として異方性調和振動解析と、ポテンシャル問題の解析を同時に行ったことになる。選点法による解析結果は、厳密解に近い高精度な解が得られている。しかしながら、これより少ない選点数では、あまり精度良い解が得られなかった。また、角振動数を  $9.32 \times 10^4 \text{ rad}/\text{s}$  として解析を行った場合は、厳密解と 5% 程度の誤差が見られた。

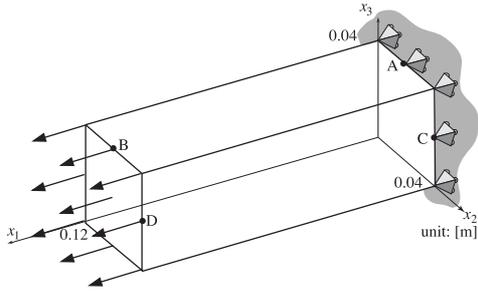


Fig. 1 Analysis model

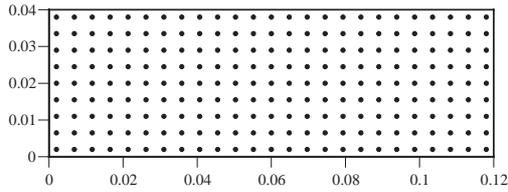


Fig. 2 Collocation points on  $x_1$ - $x_2$  surface

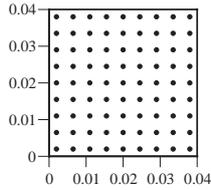


Fig. 3 Collocation points on  $x_2$ - $x_3$  surface

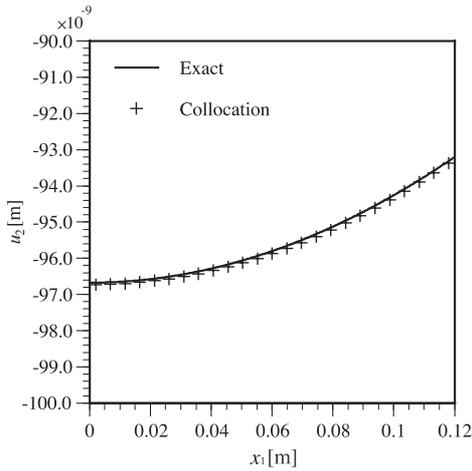


Fig. 4 Results for displacement  $u_2$  along CD

Table 1 Elastic constants of anisotropic material

$C_{11}, C_{22}$	162.0	$C_{12}$	92.0
$C_{13}, C_{23}$	69.0	$C_{33}$	181.0
$C_{44}, C_{55}$	46.7	$C_{66}$	35.2

unit: [GPa]

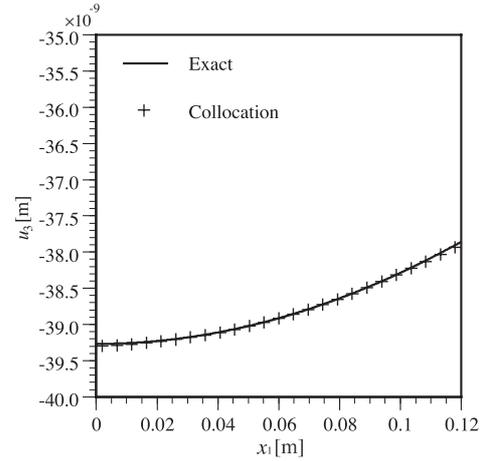


Fig. 5 Results for displacement  $u_3$  along AB

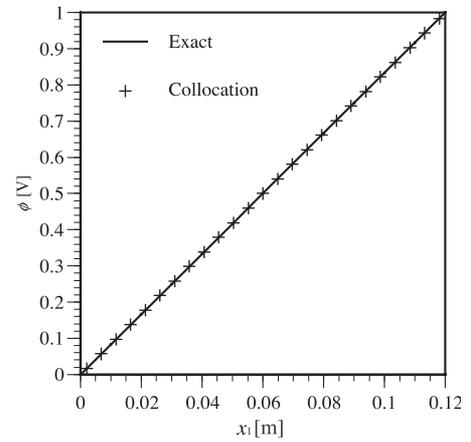


Fig. 6 Results for potential  $\phi$  along AB

### 3.2. 圧電材料の調和振動解析

次に、図1と同じ直方体モデルを、圧電材料として調和振動解析を行った。境界選点と内部選点は、3.1節の解析例と同数とした。境界条件は、 $x_1$ 軸に垂直な右側の面において、 $x_1$ 軸方向のみを支持し、電束密度を0、左側の面において、 $x_1$ 方向に調和加振力1.0 [MPa]、電束密度を0とした。また、 $x_2$ 軸に垂直な奥の面において、 $x_2$ 方向のみ支持し、電束密度を0、手前の面において、表面力を0、電束密度を0とした。さらに、 $x_3$ 軸に垂直な下側の面において、 $x_3$ 軸方向のみを支持し、電位を0、上側の面において、表面力を0、電位を0とした。異方性の主軸が解析対象の座標軸と一致するものとし、材料定数は、弾性定数、圧電定数、誘電率を表2に示す。また、物体の密度は  $7600 \text{ kg/m}^3$ 、振動数は  $9.42 \times 10^3 \text{ rad/s}$  として解析を行った。得られた線分AB上の変位の  $x_2$  方向成分  $u_2$ 、変位の  $x_3$  方向成分  $u_3$ 、電束密度  $D$  を、それぞれ図7, 8, 9に示す。電束密度に関しては、角点の近くで誤差が大きく現れているように思われる。

Table 2 Material constants of piezoelectric material

$C_{11}, C_{22}$	139.0	$e_{15}, e_{24}$	12.7	$\epsilon_{15}, \epsilon_{24}$	6.461
$C_{12}$	77.8	$e_{31}, e_{32}$	-5.2	$\epsilon_{33}$	5.620
$C_{13}, C_{23}$	74.3	$e_{33}$	15.1		
$C_{33}$	115.0				
$C_{44}, C_{55}$	25.6				
$C_{66}$	30.6				

Elastic constants: [GPa]

Piezoelectric coefficient: [C/m<sup>2</sup>]

Dielectric constants: [C/(Vm)]

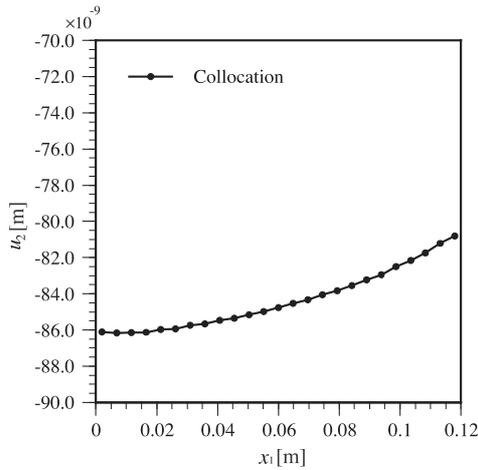


Fig. 7 Results for displacement  $u_2$  along AB

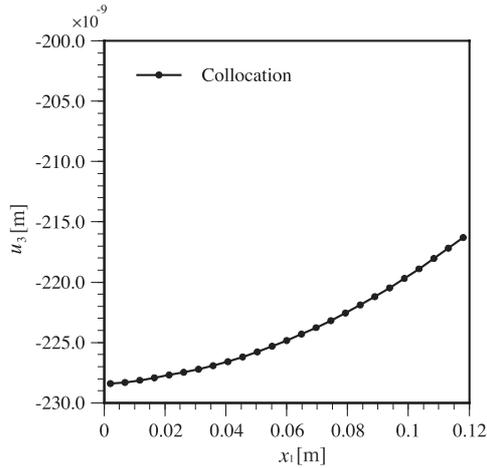


Fig. 8 Results for displacement  $u_3$  along AB

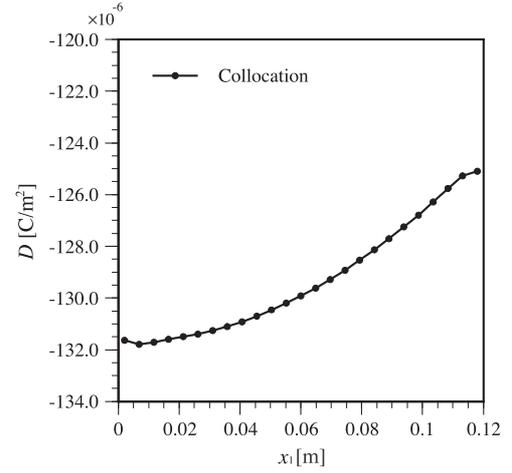


Fig. 9 Results for charge flux density  $D$  along AB

#### 4. おわりに

本論文では、圧電材料の調和振動解析に対して、選点法を用いた定式化と数値解析プログラムを開発した。異方性調和振動問題においては精度の良い解が得られていることより本プログラムの有効性を示した。本解法は、定式化、プログラム開発のいずれも、きわめて容易な解法であるが、高精度な解析を行うには、Fasshauer<sup>(5)</sup>による対称なマトリクスからなる定式化など、異なる選点法の定式化や近似関数の選択についてさらに検討する必要がある。

#### 参考文献

- (1) A.N. Norris, Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A447**, (1994), pp. 175–188.
- (2) E. Pan, F. Tonon, Three-dimensional Green's functions in anisotropic piezoelectric solids, *International Journal of Solids and Structures*, **37**, (2000), pp. 943–958.
- (3) H. Wendland, Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis function of minimal degree, *Advances in Computational Mathematics*, **4**, (1995), pp. 389–396.
- (4) E.J. Kansa, Multiquadrics: A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics, *Comput. Math. Appl.*, **19**, (1990), pp. 147–161.
- (5) G.E. Fasshauer, Solving partial differential equations by collocation with radial basis function, *Proceedings of Chamonix*, (1996), (Méhauté, A., Rabit, C. and Schumaker, Lo, eds.), pp. 1–8.