

間接 Trefftz 法による Poisson 方程式の解法 (非同次項が未知関数の導関数を含む場合)

Solution of Poisson's Equation by the Indirect Trefftz Method
(When the Inhomogeneous Term Includes Derivative of the Unknown Function)

北 英輔¹⁾, 池田洋一²⁾, 神谷紀生³⁾

Eisuke KITA, Yoichi IKEDA and Norio KAMIYA

- 1) 名古屋大学情報文化学部 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町, E-mail: kita@info.human.nagoya-u.ac.jp)
 2) 大同工業大学 (〒457-8530 名古屋市南区滝春町, E-mail: ikeda@daidoh-it.ac.jp)
 3) 名古屋大学情報文化学部 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町, E-mail: b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp)

The Trefftz method is formulated with regular T-complete functions satisfying the governing equation. When the Trefftz method is applied to the boundary value problem of the Poisson's equation, it is generally difficult to derive the T-complete functions for the problem. For overcoming this difficulty, we suggest the following scheme. The inhomogeneous term is approximated by the polynomial in the cartesian coordinates and then, the particular solution of the Poisson's equation is derived. The boundary value problem of the Poisson's equation is transformed into that of the Laplace's equation by using the particular solution. The transformed problem can be solved easily by the ordinary Trefftz formulation. Unknown parameters included in the particular solution are determined by an iterative process so that the predicted inhomogeneous term coincides with the estimated one at the boundary and the internal points. The present scheme is applied to numerical examples.

Key Words: Trefftz method, Indirect formulation, Poisson's equation, Computing point analysis scheme, T-complete Function

1. はじめに

Trefftz 法は, 支配方程式を満足する非特異な T-complete 関数を用いた境界型数値解析法であり, これまでは主に 2 次元ポテンシャル問題, 3 次元ポテンシャル問題等の同次方程式に支配された問題に適用されている. これに対して, 非同次方程式を支配方程式とする問題にはあまり適用されていない (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). それは, 非同次方程式を満足する T-complete 関数の導出が一般に困難だからである. そこで, 本論文では Poisson 方程式に対する Trefftz 法の定式化について検討する.

非同次項に関する問題は, 同じ境界型数値解析法である境界要素法でも生じる. 境界要素法では, 非同次項を含む支配微分方程式から境界積分方程式を導出すると積分方程式に領域積分項が含まれるので, 解析に領域メッシュを必要とする. そこで, 領域メッシュを用いない解析法として, 多重相反法 (MRM)^(8, 9), 二重相反法 (DRM)⁽¹⁰⁾, 計算点解析法^(11, 12)

などが提案されている. 多重相反法では相反定理を繰り返し適用し, 領域積分項を境界積分の無限級数に変換する. 二重相反法では, 非同次項を比較的簡単な関数で近似し, 近似非同次項に対応する特解と相反定理を適用することで領域積分を境界積分に変換する. 一方, 計算点解析法では, 最初に未知関数を含む非同次項を直交座標系の完全多項式で仮定し, 相反定理を適用することで領域積分項を境界積分に変換する. いずれの方法においても, 支配微分方程式から導出した積分方程式に相反定理を適用することで, 領域積分項を境界積分に変換している. しかし, 間接法による Trefftz 法の定式化では積分方程式を用いないので, 上記の方法をそのまま適用することはできない.

そこで, 以前の研究⁽¹³⁾において, Poisson 方程式の解法として次のような方法を提案した. Poisson 方程式の非同次項を直交座標系の完全多項式で近似し, Poisson 方程式に対する特解を導出する. そして, 特解を用いて Poisson 方程

式の境界値問題を Laplace 方程式の境界値問題に変換する。Laplace 方程式の T-complete 関数は容易に導出できるので、通常の Trefftz 法の定式化で解析が可能である。ところで、非同次項が未知関数の関数である場合、特解は未知係数を含むことになるので、仮定された非同次項と数値解から評価された非同次項が、境界選点といくつかの内点において一致するように反復計算で未知係数を決定する。同様な目的で、真鍋ら⁽¹⁴⁾は Trefftz 法に二重相反法を適用した Poisson 方程式の解法を提案している。彼らの方法では非同次項に未知関数が含まれない問題だけを扱っているのに対して、本論文では非同次項が未知関数の導関数についての関数として与えられる場合への適用を示す。非同次項に未知関数の導関数を含む問題を境界要素法で解析する場合について二重相反法や計算点解析法を適用すると、未知関数の導関数を計算するためだけに別の定式化を必要とする。これに対して、Trefftz 法では未知関数が T-complete 関数の線形結合で近似されているので、これを直接微分するだけで未知関数の導関数を求めることができ、同じ境界型解析法である境界要素法よりも定式化が簡単となる利点がある。最後に、提案する方法を解析例に適用する。

2. 2次元 Laplace 方程式の境界値問題に対する Trefftz 定式化

本論文で提案する方法では、2次元 Poisson 方程式の境界値問題が2次元 Laplace 方程式の境界値問題に変換される。そこで、最初に、2次元 Laplace 方程式の境界値問題に対する Trefftz 法の定式化について述べる。

2.1. 2次元 Laplace 方程式の境界値問題と T-complete 関数

2次元 Laplace 方程式の境界値問題は次のようになる。

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_u) \\ q &= \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_q) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで $q \equiv \partial u / \partial \mathbf{n}$ であり、 $\Omega, \Gamma_u, \Gamma_q$ はそれぞれ解析対象領域、ポテンシャル u とフラックス q の指定境界である。 \mathbf{n} は境界単位法線ベクトル、 $(\bar{\cdot})$ は既定値を示す。

Trefftz 法では定式化に T-complete 関数とよばれる非特異な T-complete 関数を用いる。T-complete 関数は支配方程式を満足するように決定されており、2次元閉領域における2次元 Laplace 方程式について次のように与えられる⁽⁴⁾。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \{u_1^*, \dots, u_{2\mu-1}^*, u_{2\mu}^*, \dots\}^T \\ &= \{1, \dots, \Re[z^\mu], \Im[z^\mu], \dots\}^T \end{aligned} \quad (3)$$

ここで $z = x + jy$ であり、 j は虚数単位を示す。

2.2. 選点法による定式化

ポテンシャル u を T-complete 関数 u_j^* の線形結合で次のように近似する。

$$\begin{aligned} u &\simeq \tilde{u} = a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \dots + a_N u_N^* \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* \end{aligned} \quad (4)$$

ここで N は T-complete 関数の総数を、 $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_N\}^T$ は未知係数ベクトルを示す。この式を境界の法線方向に偏微分すれば境界でのフラックスの近似式を得る。

$$\begin{aligned} q &\simeq \tilde{q} \equiv \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}} = a_1 q_1^* + a_2 q_2^* + \dots + a_N q_N^* \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* \end{aligned} \quad (5)$$

これらを式(2)に代入すると境界条件は完全には満足されないので残差が生じる。つまり、

$$\left. \begin{aligned} R_u &\equiv \tilde{u} - \bar{u} = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* - \bar{u} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_u \\ R_q &\equiv \tilde{q} - \bar{q} = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* - \bar{q} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_q \end{aligned} \right\}$$

Trefftz 法では境界条件を満足するように係数ベクトル \mathbf{a} を定める。選点法による定式化では境界選点 P_i で、上式の残差を0とおく。つまり、

$$\left. \begin{aligned} R_u(P_i) &= \mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(P_i) - \bar{u}(P_i) = 0 \quad (P_i \in \Gamma_u) \\ R_q(P_i) &= \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*(P_i) - \bar{q}(P_i) = 0 \quad (P_i \in \Gamma_q) \end{aligned} \right\}$$

上式を整理すると、

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (6)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} u_{i1}^* & \dots & u_{iN}^* \\ \vdots & & \vdots \\ u_{M_u 1}^* & \dots & u_{M_u N}^* \\ q_{i1}^* & \dots & q_{iN}^* \\ \vdots & & \vdots \\ q_{M_q 1}^* & \dots & q_{M_q N}^* \end{bmatrix} \\ \mathbf{f} &= \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{M_u}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{M_q}\}^T \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、 $u_j^*(P_i) \equiv u_{ij}^*, q_j^*(P_i) \equiv q_{ij}^*, \bar{u}(P_i) \equiv \bar{u}_i, \bar{q}(P_i) \equiv \bar{q}_i$ である。また、 M_u, M_q はそれぞれ Γ_u, Γ_q 上にとられた選点の総数である。係数マトリックス \mathbf{K} において、行数は選点総数に等しく、列数は T-complete 関数の総数に等しいので、選点総数を T-complete 関数の総数以上に取り、特異値分解⁽¹⁵⁾を適用して連立方程式を解くことにする。

3. 2次元 Poisson 方程式の境界値問題に対する Trefftz 定式化

3.1. 境界値問題

ここでは、Poisson 方程式の境界値問題の支配方程式と境界条件が次式で与えられる場合を考える。

$$\nabla^2 u + b(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_u) \\ q &= \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_q) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで $u_x \equiv \partial u / \partial x, u_y \equiv \partial u / \partial y$ である。

3.2. 境界値問題の変数変換

最初に、非同次項 $b(x, y, u, u_x, u_y)$ を直交座標系 x, y の完全多項式を用いて近似する。つまり、

$$\begin{aligned} b(x, y, u, u_x, u_y) &= c_1 + c_2x + c_3y + \dots \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{r} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 \mathbf{c} と \mathbf{r} は未知係数ベクトルと完全多項式の各項から成るベクトルである。式 (11) を用いると解くべき支配微分方程式は次式で近似される。

$$\nabla^2 u + \mathbf{c}^T \mathbf{r} = 0 \quad (12)$$

ところで、一般に完全多項式の次数は大きいほど高い近似精度を期待できる。しかし、 \mathbf{c} の更新量を求めるための連立方程式の係数行列の条件数は近似多項式の次数に依存するので、ここでは連立方程式の条件数と連立方程式を解くために用いる特異値分解法の精度の点から 5 次までの完全多項式で非同次項を近似している。この場合、 \mathbf{c} と \mathbf{r} は、それぞれ次式で与えられる。

$$\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_{21}\}^T \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \{r_1, r_2, \dots, r_{21}\}^T \\ &= \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, \\ &\quad y^3, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, \\ &\quad x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5\}^T \end{aligned} \quad (14)$$

式 (12) の同次解を u^h 、 r_i に対応する特解を u_i^p とすれば、境界値問題の解 u は次式で近似される。

$$\begin{aligned} u &= u^h + c_1 u_1^p + c_2 u_2^p + \dots + c_{21} u_{21}^p \\ &= u^h + \mathbf{c}^T \mathbf{u}^p \end{aligned} \quad (15)$$

ここで $\mathbf{u}^p = \{u_1^p, u_2^p, \dots, u_{21}^p\}^T$ であり、 u^h, u_i^p は次式を満足する。

$$\nabla^2 u^h = 0 \quad (16)$$

$$\nabla^2 u_i^p + r_i = 0 \quad (17)$$

r_i は多項式の項であるから、 u_i^p を容易に求めることができる。

式 (15) を支配方程式と境界条件に代入すると境界値問題は次式に変形できる。

$$\nabla^2 u^h = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} u^h &= \bar{u} - \mathbf{c}^T \mathbf{u}^p \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q^h &= \bar{q} - \mathbf{c}^T \mathbf{q}^p \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、 $q^h \equiv \partial u^h / \partial \mathbf{n}$ 、 $q^p \equiv \partial u^p / \partial \mathbf{n}$ である。

このように、問題は同次解 u^h についての Laplace 方程式の境界値問題に変形されたので、未知係数 \mathbf{c} があらかじめ決定できれば、先に述べた Trefftz 法の定式化に従って 2 次元 Laplace 方程式の境界値問題を解析することで u^h を決定することができる。しかし、 \mathbf{c} は未知関数 u の関数なのであらかじめ定めることができないため反復収束計算が必要とな

る。つまり、最初に \mathbf{c} を仮定して解析を行い、得られた u から非同次項を計算して、式 (11) を満足するように未知係数を変更することになる。この方法について以下に説明する。

3.3. 未知係数の更新法

まず、式 (11) を繰り返し計算 (k) と ($k+1$) 回目について考えると次式となる。

$$\begin{aligned} b^{(k+1)} &= \mathbf{r}^T \mathbf{c}^{(k+1)} \\ b^{(k)} &= \mathbf{r}^T \mathbf{c}^{(k)} \end{aligned}$$

左辺と右辺をそれぞれ引き算すると次式となる。

$$\begin{aligned} b^{(k+1)} - b^{(k)} &= \mathbf{r}^T (\mathbf{c}^{(k+1)} - \mathbf{c}^{(k)}) \\ &\equiv \mathbf{r}^T \Delta \mathbf{c} \end{aligned} \quad (20)$$

そして、境界上と領域内に取られたいくつかの評価点 (これを、計算点とよぶ) において式 (20) を選点法的に満足するように $\Delta \mathbf{c}$ を決定することを考える。つまり、計算点 Q_i について式 (20) を考えると

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T(Q_i) \Delta \mathbf{c} &= b^{(k+1)} - b^{(k)} \\ &= b(u^{(k)}) - \mathbf{r}^T \mathbf{c}^{(k)} \\ &\equiv \Delta b(Q_i) \end{aligned}$$

となり、全ての計算点 Q_i で上式を考えて連立方程式とすると次式になる。

$$\mathbf{D} \Delta \mathbf{c} = \mathbf{f} \quad (21)$$

ここで \mathbf{D} と \mathbf{f} は、それぞれ完全多項式の項から成る行列と非同次項に関する係数ベクトルである。式 (21) を特異値分解⁽¹⁵⁾ によって解いて $\Delta \mathbf{c}$ を決定し、それをを用いて \mathbf{c} を次式で更新する。

$$\mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{c}^{(k)} + \Delta \mathbf{c} \quad (22)$$

収束判定条件を次式のように定義する。

$$\eta \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |\Delta b(Q_i)| < \eta_c \quad (23)$$

ここで、 M は計算点の総数を、 η_c はユーザーによって定義された正の定数を示す。

ところで、非同次項に未知関数 u の導関数を含む場合、式 (21) の右辺項を計算するために、 u の導関数を計算する必要がある。Trefftz 法では、 u は式 (4) で表されるので、これを直接微分すれば導関数を評価できる。つまり、

$$u_{,x} = \mathbf{a}^T \mathbf{u}_{,x}^* \quad (24)$$

$$u_{,y} = \mathbf{a}^T \mathbf{u}_{,y}^* \quad (25)$$

\mathbf{u} は非特異な関数なので、これを x, y で解析的に微分することは容易である。

なお、境界要素法における多重相反法 (DRM) あるいは計算点解析法では、非同次項に未知関数の導関数を含む場合には、非同次項の近似表示とともに未知関数自体の近似表示を

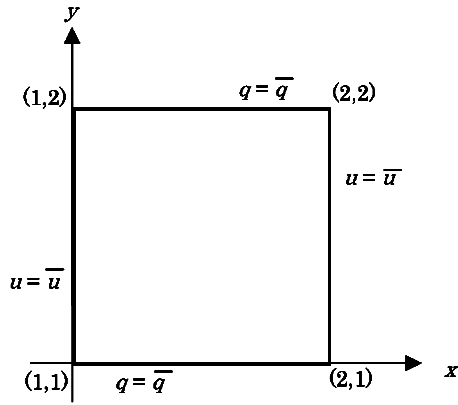


Fig. 1 Numerical example 2

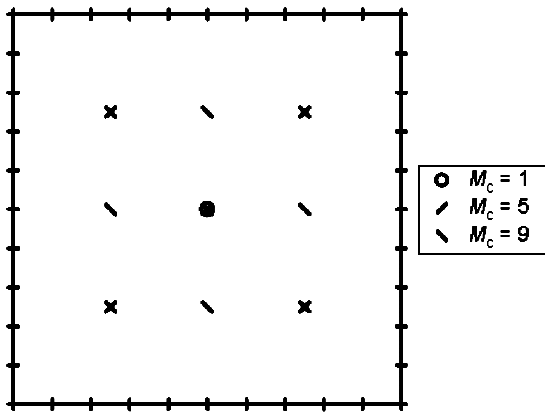


Fig. 2 Placement of collocation and computing points

必要とする。これに対して、本論文で提案する Trefftz 法では式 (4) に示されるように未知関数 u が T-complete 関数の線形結合で近似されるので、それを直接微分するだけで導関数の表示式を得ることができる。この点において、境界要素法における二重相反法あるいは計算点解析法を用いる方法よりも、計算がかなり簡素化されることになる。

3.4. 解析アルゴリズム

上記の計算アルゴリズムを示すと以下のようなになる。

1. $k \leftarrow 0$ として、 $\mathbf{c}^{(0)}$ を仮定する。
2. 式 (9) と式 (10) で与えられる境界値問題を解き、計算点での非同次項 b を計算する。
3. 収束判定を行う。条件を満足すれば結果を出力し、満足しなければ次へ進む。
4. 連立方程式 (21) を解いて $\Delta \mathbf{c}$ を決定する。
5. \mathbf{c} を更新して k をインクリメントし、(3) へ進む。

4. 解析例

4.1. 例題 1

例題として、支配方程式が次式で与えられる場合を考える。

$$\nabla^2 u - 6\sqrt{y} \sqrt{\frac{\partial u}{\partial x}} = 0$$

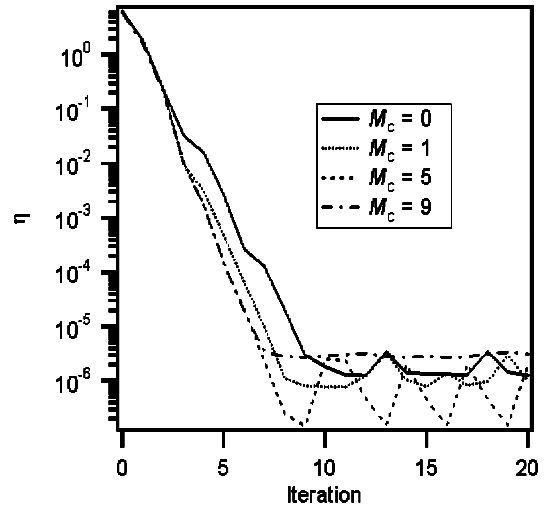


Fig. 3 Convergence property of η

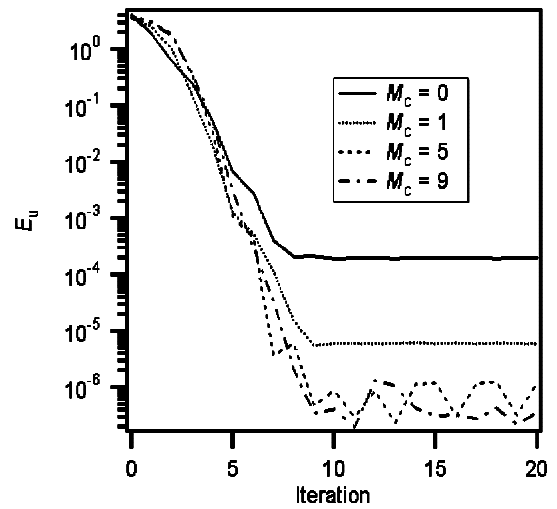


Fig. 4 Convergence property of E_u

解析領域を Fig.1 に示す。境界条件は、解析解が次式で与えられるように指定する。

$$u^{ex} = 3x^3y$$

解析のために境界上に選点を 44 個等間隔に配置する。かどのところには、2つの選点をいわゆる 2 重選点として配置する。この場合、1つのかど点上に2つの選点が配置され、それらは同一座標を持つとともに、異なる境界法線と境界条件値を与えられる。それ以外に内点をそれぞれ $M_c = 0, 1, 5, 9$ 個配置する場合を比較する。境界選点と内点は、Fig.2 に示すように均等に配置される。未知パラメータを求めるための連立方程式の係数行列の条件数を考慮して、この問題では図のような配置を用いる。均等に配置することで、未知パラメータを求めるための連立方程式の係数行列の条件数をある程度改善できる。計算点としては全ての境界点と内点を取り、係数 c_i の初期値は全て 0 とする。

領域全体での計算精度を検討するために、25 個の精度評

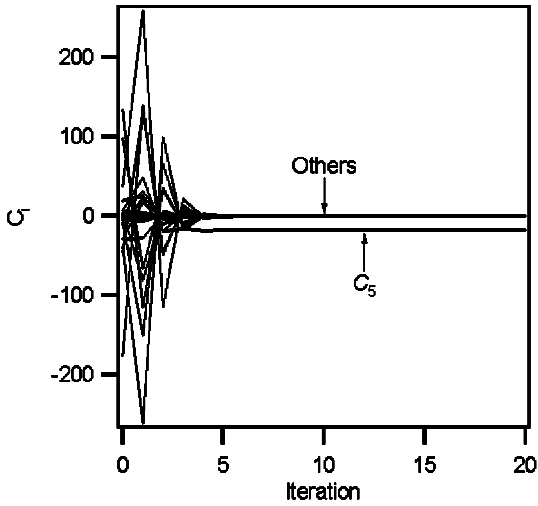


Fig. 5 Convergence property of c_i ($M_c = 9$)

価点を境界と領域内に均等に配置し、計算精度指標として次式を用いる。

$$E_u = \frac{1}{25} \sum |u - u^{ex}|$$

η の収束状況を Fig.3 に示す。横軸には繰り返し計算の回数を、縦軸には η の値をとる。これより、 η は内点数によらず 10 回程度の繰り返し計算で十分収束しているとみなせる。次に、 E_u の収束状況を Fig.4 に示す。横軸には繰り返し計算の回数を、縦軸には E_u の値をとる。これらより内点数が多いほど最終的な値が小さくなるのがわかる。

最後に、 $M_c = 9$ の場合における係数 c_i の収束状況を Fig.5 に示す。グラフから分かるように、最初の段階で係数値は激しく変化しているが、5 回目の繰り返し計算でおおむね一定値に収束した。そして、係数の最終的な値は $c_5 = -18.1$ で、それ以外の数値の絶対値は 0.5 以下であった。従って、式 (11) より、解析によって非同次項は次式に収束していることがわかる。

$$b(x, y, u, u_x, u_y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + \dots \\ \simeq -18.1xy$$

ところで、この問題の解析解は $u^{ex} = 3x^3y$ で与えられるので、非同次項の理論式を求めると次式となる。

$$b^{ex}(x, y, u, u_x, u_y) = -6\sqrt{y} \sqrt{\frac{\partial u^{ex}}{\partial x}} \\ = -6\sqrt{y} \sqrt{9x^2y} \\ = -18xy$$

これより、数値的に求めた非同次項は理論的な非同次項と一致していることがわかる。

4.2. 例題 2

例題として、支配方程式が次式で与えられる場合を考える。

$$\nabla^2 u + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

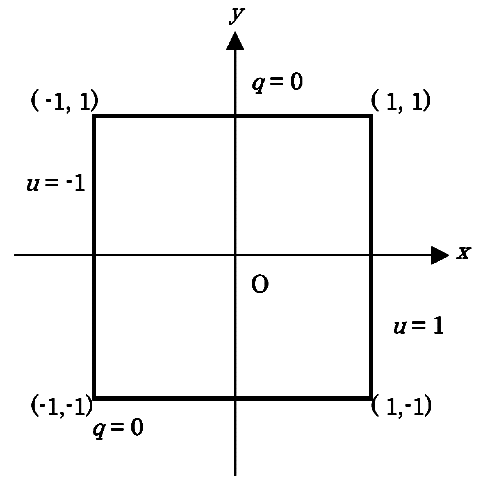


Fig. 6 Numerical example 1

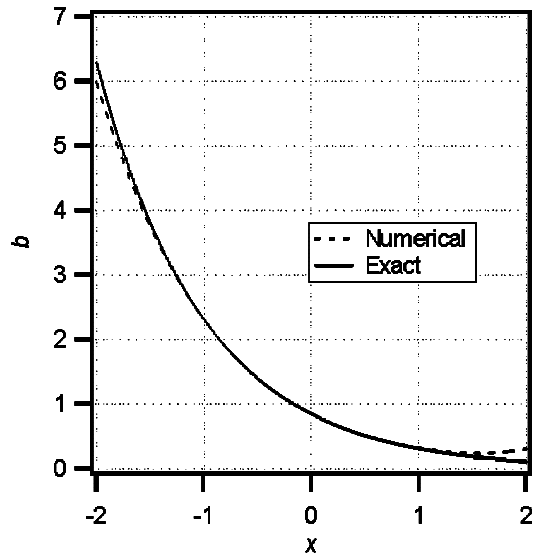


Fig. 7 Comparison of non-homogeneous term ($M_c = 21$)

境界条件は Fig.6 に示されたように与える。この問題の解析解は次式で与えられる。

$$u^{ex} = \frac{1 + e^2 - 2e^{1-x}}{e^2 - 1}$$

解析のために境界上に選点を 44 個等間隔に配置する。かどのところには、2 つの選点をいわゆる 2 重選点として配置する。この場合 1 つのかど点上に 2 つの選点が配置され、それらは同一座標を持つとともに、異なる境界法線と境界条件値を与えられる。それ以外に内点を $M_c = 21$ 個均等に配置する。計算点として全ての境界点と内点を取り、解析に用いる Treftz 関数の総数は 44 個である。また、係数 c_i の初期値は全て 0 とする。

未知係数 c_i の収束状況は早く、係数の最終的な値は $c_1 = 0.851, c_2 = -0.851, c_4 = 0.425, c_7 = -0.142, c_{11} = 0.0373$ で、それ以外の数値はほぼ 0 に収束した。従って、これらの値を

式 (11) へ代入すると非同次項は次式に収束していることがわかる。

$$\begin{aligned} b &= c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^3 \\ &\quad + c_8x^2y + c_9xy^2 + c_{10}y^3 + c_{11}x^4 + \dots \\ &\simeq 0.851 - 0.851x + 0.425x^2 - 0.142x^3 + 0.0373x^4 \end{aligned}$$

ところで、この問題の解析解は $u^{ex} = (1+e^2-2e^{1-x})/(e^2-1)$ と与えられるので、非同次項の理論式を求めると次式となる。

$$\begin{aligned} b^{ex} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{2e^{1-x}}{e^2-1} \end{aligned}$$

これらをグラフ表示して比較すると Fig.7 のようになる。ここで実線は理論的な非同次項を破線は収束計算により求められた非同次項を示している。これにより、解析領域 $-1 \leq x \leq 1$ において収束計算で求めた非同次項は解析解から求めた非同次項と良く一致していることがわかる。

5. まとめ

本研究では、2次元 Poisson 方程式の非線形境界値問題に対する Trefftz 法の定式化法について述べた。まず、非同次項を直交座標系の完全多項式で近似し、近似された非同次項を含む Poisson 方程式に対する特解を用いて、Poisson 方程式を Laplace 方程式に変換して解析した。このとき、完全多項式の係数は未知関数の関数となるので、境界点といくつかの内点において仮定した非同次項と計算結果から得られる非同次項を一致させるように、反復計算を用いて係数を決定した。

解析対象として Poisson 方程式の非同次項が未知関数の導関数を含む問題を考えて。非同次項を5次までの完全多項式で近似し、異なる内点数の場合について解析を行った。内点数によらず数回の繰り返し計算で収束したが、計算精度は内点数が多いほど高くなった。最終的に得られた非同次項を解析的に求めた非同次項と比較したところ、両者は良く一致した。今後は、提案した方法を実用的な問題への適用を検討していきたいと考えている。

参考文献

- (1) E. Trefftz: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. *Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech., Zurich*, (1926), pp. 131–137.
- (2) Y. K. Cheung, W. G. Jin, and O. C. Zienkiewicz: Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions. *Communications in Applied Numerical Methods*, **5**(1989), pp. 159–169.
- (3) W. G. Jin, Y. K. Cheung, and O. C. Zienkiewicz: Application of the Trefftz method in plane elasticity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **30**(1990), pp. 1147–1161.
- (4) I. Herrera: Theory of connectivity: A systematic formulation of boundary element methods. In C. A. Brebbia, editor, *New Developments in Boundary Element Methods (Proc. 2nd Int. Seminar on Recent Advances in BEM, Southampton, England, 1980)*, (1980), pp. 45–58. Pentech Press.
- (5) J. Jirousek and N. Leon: A powerful finite element for plate bending. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, **12**(1977), pp. 77–96.
- (6) N. Kamiya and S. T. Wu: Generalized eigenvalue formulation of the Helmholtz equation by the Trefftz method. *Engineering Computations*, **11**(1994), pp. 177–186.
- (7) A. P. Zielinski and O. C. Zienkiewicz: Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**(1985), pp. 509–528.
- (8) A. J. Nowak and A. C. Neves: *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method*. (1994), Comp. Mech. Pub. / Springer Verlag.
- (9) A. J. Nowak: Application of the multiple reciprocity BEM to nonlinear potential problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **18**(1995), pp. 323–332.
- (10) T. W. Partridge, C. A. Brebbia, and L. C. Wrobel: *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. Comp. Mech. Pub. / Springer Verlag, 1992.
- (11) 神谷紀生, 許松青: 非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法. 日本機械学会論文集, **A64**(1998), pp. 147–154.
- (12) 許松青, 神谷紀生: 非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法(続報: 未知関数の導関数を含む非同次項の場合). 日本機械学会論文集, **A64**(1998), pp. 1341–1347.
- (13) 北英輔, 池田洋一, 神谷紀生: Trefftz 法による非線形ポアソン方程式の解法. 情報処理学会論文誌. (印刷中).
- (14) 真鍋尚, 福本容子, 登坂宣好: Trefftz 法の2次元ポアソン方程式への適用. 計算工学会講演論文集, **5**(2000), pp. 289–292.
- (15) E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, S. Ostrouchov, and D. Sorensen: *LAPACK User's Manual*. (1995), SIAM, 2nd edition.