計算数理工学論文集 Vol. 2 (2002 年 7 月), 論文 No. 02_070314 JASCOME

グリーン関数の漸近近似を利用した水-固体二層弾性体の３次元散乱解析

3D SCATTERING ANALYSIS OF A FLUID-LOADED ELASTIC HALF SPACE USING ASYMPTOTIC APPROXIMATION OF ELASTO-DYNAMIC GREEN'S FUNCTION

上辻　良平 [1)]，木本　和志 [2)]，廣瀬　壮一 [3)]

Ryohei KAMITSUJI, Kazushi KIMOTO and Sohichi HIROSE

1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科　(〒 152-8552　目黒区大岡山 2-12-1,　E-mail: kamitsuji@qnde.mei.titech.ac.jp)
2) 東京工業大学大学院情報理工学研究科　(〒 152-8552　目黒区大岡山 2-12-1,　E-mail: kimoto@qnde.mei.titech.ac.jp)
3) 東京工業大学大学院情報理工学研究科　(〒 152-8552　目黒区大岡山 2-12-1,　E-mail: shirose@cv.titech.ac.jp)

Fluid-loaded elastic half space is one of the simple but important models of ultrasonic nondetructive testing. However, 3D full numerical simulations with this model are still very expensive for the conventional finite or boundary element method. In this paper, an efficient boundary element method(BEM) is developed for elastic wave scattering analysis of a fluid-loaded elastic half space. The method improves computational efficiency of BEM by partly introducing an asymptotically approximated Green's funcion which satisfies continuity condition at the interface. As a numerical example, scattered waves from cavities of two different shapes near the interface are calculated, and results are shown as scattering patterns in the fluid medium.

Key Words: Scattering Aanalysis, Asymptotic Aproximation, 3D Boundary Element Method, Immersion Ultrasonic Testing

1. はじめに

部材内部あるいは表面の欠陥を非破壊的に検出する有効な手法の一つに超音波探傷試験がある。この方法では、超音波が欠陥や材料界面で反射や散乱される性質を利用し、逆にそれら材料の非均質部分に関する情報を得ようとするものである。超音波の送信、受信には、例えば圧電体を利用した探触子などを用いて簡単に行うことができる。また、目的に応じて表面波や物体波を発生させることで、超音波を板表面に長距離伝播させることや、被検査材内部へ浸透させることも容易であるため、一度に広い領域を探傷することや、放射線透過法などが適用できないような厚板部材中の欠陥を検出することも可能である。これらは欠陥検出手法としての超音波法の優れた面であるが、固体中の超音波の伝播挙動は非常にに複雑であるため、欠陥寸法や形状など、より定量的な情報を観測エコーから推定することは困難な場合が多い。このような理由から、超音波の散乱を数値的にシミュレートし、欠陥パラメータと観測されるエコーの関係を調べる試みが多くなされてきた (1)。有限要素法や境界要素法はそのようなシミュレーションにしばしば用いられる任意形状問題を扱うことのできる有力な数値解析手法の一つである。しかしながら、超音波の波長は通常、探傷領域に比較して非常に小さいため、これらの手法も超音波探傷試験において想定すべき規模のシミュレーションには対応できないことが多い。ところで、超音波探傷試験のシミュレーションにおいて、欠陥は空洞や亀裂あるいは介在物などとしてモデル化され、その形状は様々である。一方、それらを含む媒体の外形に関しては、半無限体や平板、層状体などとみなしても十分な場合が少なくない。また、欠陥の無い状態であれば、それらの領域における様々な波動問題に対する厳密解や近似解が導かれておりそれらの性質も詳しく調べられている (2)。任意形状欠陥による散乱問題には、何らかの数値解析手法に頼らなければならないが、それら既知の解と既存の数値解析手法を適切に組み合わせて用いることができれば、全体としての計算コストを低減しうるであろうことは容易に理解される (3)。本研究は、そのような試みの一つとして水-固体二層弾性体に対するグリーン関数を用いた効率的な弾性波の散乱解析手法について検討を行ったものである。水-固体二層弾性体における散乱は、試験体、探触子ともに水中に沈めて探傷を行う水浸探

傷試験の最も基本的なモデルである。水浸法は接触法に比べて安定したエコーが得られ、入射角度の制御が容易であるという利点があり、室内実験ではしばしば用いられる手法である。ここでは、任意形状散乱体を扱うための数値解析手法としては境界要素法を用い、その計算コストの低減のためには水-固体二層体に対するグリーン関数を利用する。二層体に対するグリーン関数は積分形で与えられるため、それを核とした積分方程式を用いることは、数値計算上利点が少ない。そこで、ここではグリーン関数の漸近展開式を入射波動場、内点変位を計算する際に用いることで計算効率の向上をはかる。以下では、問題設定および基礎式から始め、境界要素法で解くべき境界積分方程式を示す。次に、二層体のグリーン関数とその漸近展開式の具体的な表現を示し、その利用方法について述べる。最後の数値解析例では、水-固体界面近傍に存在する空洞による散乱問題を取り上げ、解析結果として水中で観測される散乱変位の放射パターンを示す。以下では、超音波探傷試験のシミュレーションと、ここで示す解析手法との関係が分かるよう適宜説明を加える。

2. 問題設定

Fig.1 に示すような、水および弾性体から成る二層体を考える。今、半無限領域 $D_f(x_3<0)$ を水が、$D_s(x_3>0)$ を弾性体が占めるものとし、弾性体中には、欠陥 C が存在するものとする。以下では、水－固体界面を B、空洞境界を S と呼ぶことにする。本研究で用いる解析手法は、欠陥 C が空洞あるいは介在物のいずれであっても大差はないので、ここでは簡単のため空洞であるとしておく。今、液体領域 D_f からの入射圧力波 $p^{in}(\boldsymbol{x})$ に対する S からの散乱波を水中の点 $\boldsymbol{y}$ で観測することを考える。周波数域における液体および固体領域に対する運動方程式は、圧力を p、変位ベクトルを $\boldsymbol{u}$ としてそれぞれ

$$
\begin{aligned}
-\nabla p(\boldsymbol{x}) \quad &+ \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\rho_f\omega^2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x}\in D_f) \quad (1)\\
\mu_s\nabla^2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \quad &+ \quad (\lambda_s+\mu_s)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\\
&+ \quad \rho_s\omega^2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{x}\in D_s) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

と表される。ここに $\boldsymbol{f}$ は物体力を、ω は角周波数を表し、ρ,λ,μ は密度およびラメ定数である。添え字 f と s はそれぞれ液体、固体を意味する。式 (1) に圧力と変位の関係 $-\lambda_f\nabla\cdot\boldsymbol{u}=p$ を用いると式 (1) はヘルムホルツ方程式

$$
\nabla^2 p + k_f^2 p = -f \tag{3}
$$

となる。ただし、$f=-\nabla\boldsymbol{f}$ であり、k_f は、D_f における波数を表し、液体領域の波速 c_f と ω に対して $k_f=\omega/c_f$ の関係がある。以下 D_f における支配方程式としては式 (3) を用いる。探触子すなわち波源は後に述べる通り水中の速度分布としてモデル化されるが、ここでは点波源 $f=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s)$ に対する応答を解析する方法を示す。一般的な波源に対する応答は点波源に対する解を積分することで得られる。B,S での境界条件は以下の通りである。

$$
\left\{
\begin{aligned}
\{u_3(\boldsymbol{x})\}_f &= \{u_3(\boldsymbol{x})\}_s\\
\{-p(\boldsymbol{x})\}_f &= \{t_3(\boldsymbol{x})\}_s \qquad (\boldsymbol{x}\in B)\\
t_1(\boldsymbol{x}) &= t_2(\boldsymbol{x}) = 0
\end{aligned}
\right. \tag{4}
$$

$$
\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \qquad\qquad (\boldsymbol{x}\in S) \tag{5}
$$

ただし、$\boldsymbol{t}$ は表面力である。

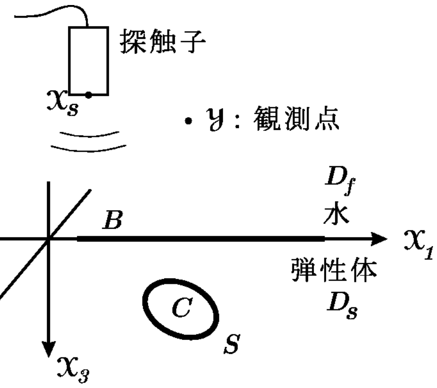

Fig. 1　問題設定

3. 解析手法

3.1. 境界積分方程式

空洞 C を含む半無限弾性体領域 D_s に対して、積分方程式を構成すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) + \int_{B+S}\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})\}\,dS&\\
= \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{y}\in B,S)&
\end{aligned} \tag{6}
$$

となる。ここに、$\boldsymbol{U},\boldsymbol{T}$ は、動弾性問題の基本解であり、その成分は

$$
\begin{aligned}
U_k^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi\mu}\Bigg[&\frac{\exp(ik_T r)}{r}\delta_{ik} + \frac{1}{k_T^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\\
&\times\left(\frac{\exp(ik_T r)}{r} - \frac{\exp(ik_L r)}{r}\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
T_k^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = n_j(\boldsymbol{x})\left[\lambda_s U_{l,l}^i\delta_{i,j} + \mu_s(U_{k,j}^i + U_{j,k}^i)\right] \tag{8}
$$

である。ここで、k_L,k_T は縦波、横波の波数である。一方、D_f に対する境界積分方程式は、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}p(\boldsymbol{y}) + \int_B\left(\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial n_x}p(\boldsymbol{x}) - G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial p(\boldsymbol{x})}{\partial n_x}\right)dS&\\
= \int_{D_f} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{x})\,dV \quad (\boldsymbol{y}\in B)&
\end{aligned} \tag{9}
$$

となる。ただし、$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ はヘルムホルツ方程式の基本解で、次式で与えられる。

$$
G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\exp(ik_f r)}{4\pi r} \qquad (r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) \tag{10}
$$

3.2. 散乱波動場に対する積分方程式

以上は、全変位 $\boldsymbol{u}$ および全表面力 $\boldsymbol{t}$ に対する積分方程式である。これら $\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}$ は、領域全体に分布しているため、このままでは界面 B での積分を評価するのが困難である。そこで、以下のように散乱場、自由場を定義し、数値計算がより容易な散乱場に対する積分方程式を導く。

$$\mathscr{L} \equiv \mu\nabla^2 + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot + \rho\omega^2\mathbf{1} \tag{11}$$

として、変位の運動方程式を

$$\mathscr{L}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{f} \tag{12}$$

と表すことにする。求める答え $\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}$ は、支配方程式を満たし、かつ面 B,S での境界条件を満足する場である。今、$\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}$ を

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^f + \boldsymbol{u}^{sc} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}^f + \boldsymbol{t}^{sc} \tag{14}$$

と表し、$\boldsymbol{u}^f,\boldsymbol{t}^f$ を散乱体 C が存在しない状態での波動場として定義する。すなわち、$\boldsymbol{u}^f,\boldsymbol{u}^{sc}$ はそれぞれ、

$$\mathscr{L}\boldsymbol{u}^f = -\boldsymbol{f} \tag{15}$$

$$\mathscr{L}\boldsymbol{u}^{sc} = \mathbf{0} \tag{16}$$

を満たし、$\boldsymbol{u}^f$ は B 上での境界条件を満足する。一方、u^{sc} は $\boldsymbol{u}^f + \boldsymbol{u}^{sc}$ としたときに、全ての境界条件を満足する。ここでは、$\boldsymbol{u}^f,\boldsymbol{t}^f$ を自由場 (free field) と呼び、$\boldsymbol{u}^{sc},\boldsymbol{t}^{sc}$ を散乱場 (scattered field) と呼ぶことにする。

散乱波動場は、式 (16) を満足するから、次の積分方程式が得られる。

$$\frac{1}{2}p^{sc}(\boldsymbol{y}) + \int_B \left\{ \frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial n_x} p^{sc}(\boldsymbol{x}) - G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \frac{\partial p^{sc}(\boldsymbol{x})}{\partial n_x} \right\} dS = 0 \quad (\boldsymbol{y}\in B) \tag{17}$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{sc}(\boldsymbol{y}) + \int_{B+S} \{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}^{sc}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{t}^{sc}(\boldsymbol{x})\}\, dS = 0 \quad (\boldsymbol{y}\in B,S) \tag{18}$$

式 (13),(14) を用いて、固体に対する積分方程式を次のように変形する。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{sc}(\boldsymbol{y}) + \int_B \{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}^{sc}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{t}^{sc}(\boldsymbol{x})\}\, dS \\
&\quad + \int_S \{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})\}\, dS \\
&\quad = \int_S \left\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}^f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{t}^f(\boldsymbol{x})\right\} dS \\
&\qquad (\boldsymbol{y}\in B,S)
\end{aligned} \tag{19}$$

式 (19) の右辺に自由場に対する積分表現

$$\int_S \left\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}^f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{t}^f(\boldsymbol{x})\right\} dS = \begin{cases} -\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^f & \boldsymbol{y}\in S \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{y}\in B \end{cases} \tag{20}$$

を用いることで次の式を得る。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{sc}(\boldsymbol{y}) + \int_B \{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}^{sc}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{t}^{sc}(\boldsymbol{x})\}\, dS_x \\
&\quad + \int_S \{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})\}\, dS_x = \mathbf{0} \\
&\qquad (\boldsymbol{y}\in B)
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
&\int_B \{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}^{sc}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{t}^{sc}(\boldsymbol{x})\}\, dS_x + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) \\
&\quad + \int_S \{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})\}\, dS_x = \boldsymbol{u}^f(\boldsymbol{y}) \\
&\qquad (\boldsymbol{y}\in S)
\end{aligned} \tag{22}$$

となる。

式 (21),(22) と (17) を連立して境界要素法で解くことにより、B および S 上の未知変位、表面力を求めることができる。このとき、式 (17) には

$$p = -t_n,\ \frac{\partial p}{\partial n} = \rho_f\omega^2 u_n \tag{23}$$

の関係を用いる。n は法線方向成分を意味する。

ここで、式 (21),(22) では散乱場 $\boldsymbol{u}^{sc},\boldsymbol{t}^{sc}$ が境界 B 上での未知量となっている点が式 (6) とは異なっている。散乱場は、散乱体近くに分布する比較的弱い波動場であるので、このような式を用いておけば、数値解析上の B の打ち切り位置を、$\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}$ を未知量とした時よりも小さくとることができるという利点がある。ただし、そのためには S 上での $\boldsymbol{u}^f(\boldsymbol{y})$ を何らかの形で求めておく必要がある。$\boldsymbol{u}^f(\boldsymbol{y})$ には、次に示す高周波域での漸近解を用いる。

3.3. 自由場の漸近近似

点波源に対応する自由場 $\boldsymbol{u}^f$ は $f = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_s)$ とした時のグリーン関数 $\boldsymbol{G}^{in}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_s)$ である。$\boldsymbol{G}^{in}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_s)$ は、平面波のスペクトルとして、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}^{in}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_s) &= \frac{i}{8\pi^2\lambda_f}\left(\frac{c_f}{c_\beta}\right) \sum_{\substack{\beta=L,T\\ \alpha=p}} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{R^\alpha_\beta(\xi_3)}{\xi_3} \\
&\quad \times \boldsymbol{d}^\beta \exp(ik_\beta\boldsymbol{\xi}^\beta\cdot\boldsymbol{x} - ik_\alpha\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x})\, d\xi_1\, d\xi_2
\end{aligned} \tag{24}$$

と表せる [5]。ここで、$\xi_3 = \sqrt{1-\xi_1^2-\xi_2^2}$、$c_\beta$ は β 波の波速 ($\beta = L,T$) を表す。また、R^α_β は入射 α 波の平面波に対する、透過 β 波の水-固体界面における反射透過係数であり、$\boldsymbol{\zeta}^\beta$ および $\boldsymbol{d}^\beta$ は、それぞれ $\boldsymbol{\xi}$ を入射波の伝播方向ベクトルとしたときの透過波の伝播方向、変位方向を表す単位ベクトルである。ここで、停留位相の方法 [4] を用いると式 (24) は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}^{in}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_s) &\sim \sum_\beta \frac{1}{4\pi\rho_f c_L\omega}\frac{R^\alpha_\beta(\theta_\alpha)}{Q_{\alpha\beta}(\theta_\alpha)} \\
&\quad \times \boldsymbol{d}^\beta \exp(ik_\alpha r_\alpha + ik_\beta r_\beta)
\end{aligned} \tag{25}$$

と $k_f a \gg 1$ において漸近展開できる。ただし、

$$Q_{\alpha\beta} = \left(\frac{c_\beta}{c_\alpha}r_\beta + r_\alpha\right)^{1/2}\left(\frac{c_\beta}{c_\alpha}\frac{\cos^2\theta_\alpha}{\cos^2\theta_\beta}r_\beta + r_\alpha\right)^{1/2} \tag{26}$$

であり、r_α, r_β は Fig.2 に示すように観測点 $\boldsymbol{x}$ と波源 $\boldsymbol{x}_s$ をスネルの法則に従って結ぶ波線の距離である。また、$\theta_\alpha, \theta_\beta$ は波線が x_3 軸となす角度で、

$$\frac{\sin\theta_\alpha}{c_\alpha} = \frac{\sin\theta_\beta}{c_\beta} \tag{27}$$

の関係を満たす。式 (25) はその形からも明らかなように、物体波しか表現されていない。これは、停留位相の方法では位相の停留点からの影響しか評価できないためであり、その他表面波やヘッドウェーブまでを考慮する必要がある場合には、式 (24) を複素平面上の経路積分に変形し別の漸近展開方法を用いるか、経路積分を数値的に処理する必要がある (6)。ここでは、実体波 (P 波) を用いた探傷試験を想定し、自由場 $\boldsymbol{u}^f$ は式 (25) を用いて計算する。

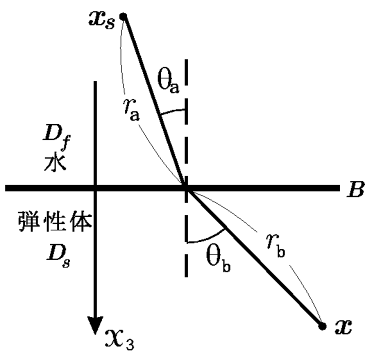

Fig. 2　波源 $\boldsymbol{x}_s$ と観測点 $\boldsymbol{x}$ を結ぶ波線

3.4. 内点変位の計算

次に境界変位、応力から内点の変位を求める際には、次の積分方程式を用いる。

$$\boldsymbol{u}^{sc}(\boldsymbol{y}) = \int_S \{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\}\, dS_x \qquad (\boldsymbol{y} \in D_f) \tag{28}$$

ここに、$\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ は水－固体半無限弾性体に対するグリーン関数およびその表面力成分であり、その具体的な表現はやはり平面波のスペクトル表現として与えられる (5)。ただし、ここでも $\boldsymbol{y}$ における物体波を観測するという意味合いから停留位相の方法によって得られる漸近近似式 $\tilde{\boldsymbol{G}}, \tilde{\boldsymbol{H}}$ で $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ を代用する。

$$\tilde{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \sim \frac{1}{4\pi\mu_s} \sum_{\substack{\alpha=L,T\\ \beta=p}} \left(\frac{c_T}{c_\alpha}\right)^2 R^\alpha_\beta(\theta) w \times \frac{\exp\left(ik_\alpha r_\alpha + ik_\beta r_\beta\right)}{Q_{\alpha\beta}(r)} \left(\boldsymbol{d}^\alpha \otimes \boldsymbol{d}^\beta\right) \tag{29}$$

ここに、$\otimes$ はテンソル積を意味し、$R^\alpha_\beta, Q_{\alpha\beta}$ 等の定義は前述の通りである。また、$\tilde{\boldsymbol{H}}$ は $\tilde{\boldsymbol{G}}$ の表面力成分として計算することができる。以上のようにすることで、内点変位の計算を行うにあたり必要な表面積分は散乱体表面 S のみになり、積分核の計算に必要な時間も無限体に対する基本解のそれと同程度となるため計算時間を短縮することができる。さらに、グリーン関数の漸近近似式 (29) は各波動の成分の重ね合わせで表されているため、それらを別々に計算することで対応する散乱場を分離した形で求めることができる。超音波探傷では散乱波の伝播経路から欠陥位置の推定を行うことが多く、これは各経路ごとに散乱波を分離して計測しうるということを前提としている。そのため、一見して伝播経路が特定し難い場合などには、成分ごとの散乱波を数値計算によりシミュレートしておけば有用な判断材料を得ることができるため、グリーン関数が式 (29) のように表現されていることが利点となる。

3.5. 探触子からの入射波

ここまでは点波源すなわち

$$p^{in}(\boldsymbol{x}) = \frac{\exp(ik_f r)}{4\pi r} \tag{30}$$

に対する応答を考えてきた。一方、探触子からの入射波動場のモデル化にはレイリーの表面積分の式が用いられることが一般的である。この式では、振動面 S_p をもつ探触子は S_p 面上の法線方向速度の分布 $v_n(\boldsymbol{x})$ としてモデル化され、その結果水中に作られる波動場は

$$p^{in}(\boldsymbol{x}) = \frac{-i\rho\omega}{2\pi} \int_{S_p} v_n(\boldsymbol{y}) \frac{\exp(ik_f r)}{r} dS \tag{31}$$

で与えられる (4)。これより、探触子からの入射波に対する応答を求める際には

$$\boldsymbol{u}^f(\boldsymbol{x}) = -2i\rho\omega \int_{S_p} \boldsymbol{G}^{in}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) v_n(\boldsymbol{y}) dS_x \tag{32}$$

として解析を行えばよい。

4. 解析例

Fig.3 に解析モデルを示す。ここでは、基準長さを a とし空洞 C の中心座標はいずれも $(0, 0, 2a)$ とするが、その形状は後に示すように C_1, C_2 の二種類を考える。入射波は半径 $5a$ の円形振動面 S_p をもつ探触子から発生するものとし、S_p 上の速度分布 v_n は一定、S_p の法線は x_3 軸に一致しているものとする。波速の比を $c_L/c_f = 3.80, c_T/c_f = 2.07$ とし、密度の比を $\rho_s/\rho_f = 7.90$ とした。また、周波数は無次元化波数 $k_f a = 2\pi$ とし、これは $a = 1\mathrm{mm}, c_f = 1500\mathrm{m/sec}$ としたときに 1.5MHz の周波数に相当する。境界要素法による解析に際しては、空洞とその直上の水- 固体界面の $8a \times 8a$ の正方形領域 $(-4a \le x_1 \le 4a, -4a \le x_2 \le 4a)$ を一定要素を用いて離散化した。要素数は S 上で 192、B 上で 361 要素とした。要素分割の一例を Fig.4 に示す。この程度の要素数をとれば、固体中の縦波の一波長におよそ 8 個の節点が含まれ、固体中の変位性状を十分表すことができると考えられる。超音波探傷において、欠陥による散乱波動場のパターン、その欠陥寸法や形状との関係は、探触子の適切な配置や検出した欠陥の評価を行う上で重要な情報である。そこで、ここでは観測点を水中の面 $S_0 = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \le 25a, |x_2| \le 25a, x_3 = -50a\}$ 内に 50×50 点とり、散乱パターンを計算する。解析結果としては、各観測点で散乱変位の絶対値の二乗 $|\boldsymbol{u}^{sc}|^2$ を、グレースケールで表したものを示すことにする。

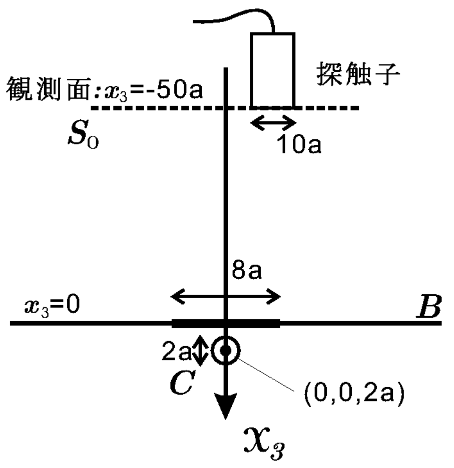

Fig. 3　解析条件

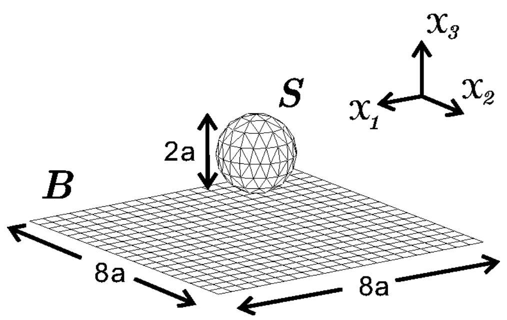

Fig. 4　要素分割例

4.1. 解析結果 1

空洞 C_1 として半径 a の球を考え、探触子面 S_p の中心を $\boldsymbol{x}_s = (0, 0, -50a)$ にとる。この場合の解析結果を Fig.7 に示す。モデルの対称性から同心円上の散乱パターンが現れており、中心付近と中心から $20a$ 程度離れた部分で大きな振幅が得られている。これら 2 箇所で強い応答が得られるのは以下のような理由によると考えられる。まず、探触子から空洞への入射波に関しては、探触子が C の直上にあるためその大部分は水中の圧力波が固体中を縦波として伝わったものと考えられる。一方、空洞から観測点への伝播においては、固体中を縦波として伝わった後、圧力波として水中に放射されるものと、横波から圧力波に変換されるものの 2 種類が考えられる (Fig.5)。固体から水への平面波の透過係数は、縦波ではその入射角度が小さい程、横波では大きいほど大きな値を持つ。従って、Fig.7 の中心付近は固体中を縦波が、周辺部分は横波が伝わったために現れたものであると予想される。実際、式 (29) に示したグリーン関数の、$\alpha = L$ あるいは $\alpha = T$ だけを計算して散乱パターンを調べると、ここでは示さないが、縦波では中心部分に、横波では環状の部分に強い散乱波が現れることが確認できる。

4.2. 解析結果 2

次に、解析例 1 と同じ空洞 C_1 に対して、探触子面 S_p の中心を $\boldsymbol{x}_s = (-6a, 0, -50a)$ にとった場合に得られる結果を Fig.8 に示す。解析例 1 と同様の空洞を対象とした解析であるが、探触子位置の変化によりかなり異なったパターンが見られ、応答の大きさも小さくなっている。しかしながら、前述の理由から中心付近の応答は縦波、周辺部分は横波から圧力波となって伝わった波であることはここでも同様である。

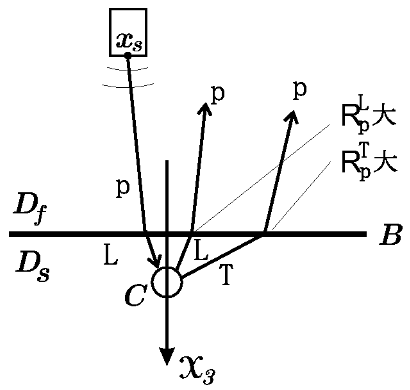

Fig. 5　波線経路

4.3. 解析結果 3

次に、Fig.6 を参照し、C_1 を x_1 方向に 1/2 倍し、さらにその中心 $(0, 0, 2a)$ を通り x_2 軸に平行な軸に対して 45° 回転させたものを空洞 C_2 として考える。これに対し探触子面 S_p の中心を $\boldsymbol{x}_s = (6a, 0, -50a)$ に取ったときの解析結果を示したものが Fig.9 である。やはり、中心付近の応答は縦波として固体中を伝わった散乱波であると考えられるが、この場合にはその影響はかなり小さくなっている。一方、横波から圧力波となり伝わった波動は空洞の傾きに対応して点 $(25a, 0)$ 付近に大きく現れている。

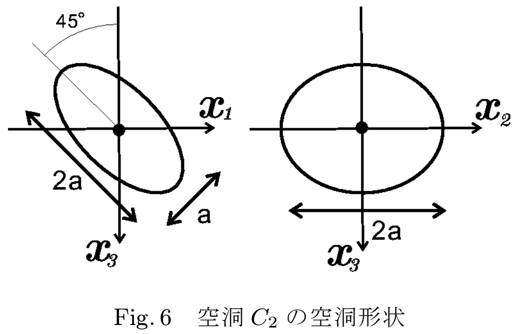

Fig. 6　空洞 C_2 の空洞形状

5. まとめ

3 次元水-固体二層弾性体に対するグリーン関数の近似表現を利用して、境界要素法により弾性波の散乱解析を効率よく行う手法の開発を行った。ここで用いた方法では、境界要素法で必要な要素を、散乱体表面および散乱体との相互作用が見込まれる水-固体界面のみに配置すればよく、送受信点から散乱体への距離によらず効率のよい解析が可能である。しかしながら、今回行った解析では表面波やヘッドウェーブなどの影響を考慮していないため、今後はこれら非実体波の

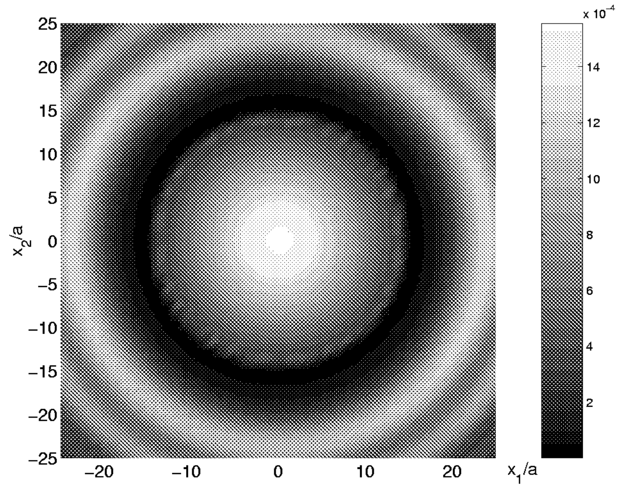

Fig. 7　解析例 1 : S_o 面内における $|u^{sc}|^2$ の分布

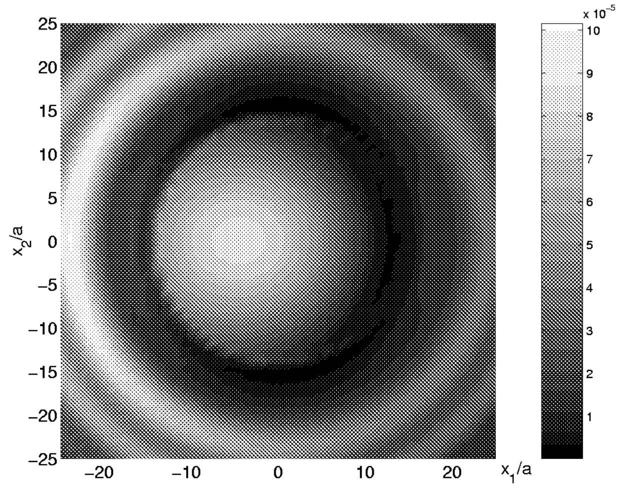

Fig. 8　解析例 2 : S_o 面内における $|u^{sc}|^2$ の分布

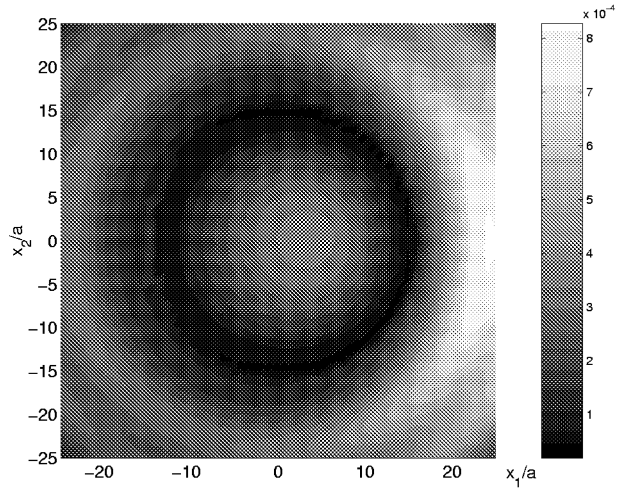

Fig. 9　解析例 3 : S_o 面内における $|u^{sc}|^2$ の分布

漸近表現を用いてより適用範囲の広い手法としていくことが課題である。また、受信探触子のモデル化を行い、板材等へも同手法を拡張してゆくことで、より現実的な水浸超音波探傷試験の数値シミュレーション手法とすることができると考えられる。

参考文献

(1) Review of Progress in QNDE, Vol.1-Vol.20, (eds.) D. O. Thompson and D. E. Chimenti, 1982-2001.

(2) Brekhovskikh L. M.:Wave in Layered Media, Academic Press, New York, 1980.

(3) Y. Cho and J. L. Rose: A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves, J.Acoust.Soc.Am. 99(4), 2097-2109, 1996.

(4) Schmerr L. W.:Fundamentals of Ultrasonic Nondestructive Evaluation, Plenum, New York, 1998.

(5) J. D. Achenbach, A. k. Gautesen, and H. McMaken:Ray Methods for Waves in Elastic Solids, Pitman, Bostom, 1982.

(6) Pott J. and Harris J. G.:Scattering of an Acoustic Gaussian Beam from a Fluid-Solid Interface, J.Acoust.Soc.Am. 76(6), 1829-1838, 1984.