計算数理工学論文集 Vol. 2 (2002 年 7 月), 論文 No. 02_070311 JASCOME

円環領域におけるLaplace方程式に対する境界要素法による数値解析

NUMERICAL ANALYSIS OF BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR THE LAPLACE EQUATION ON A RING DOMAIN

三浦 与実 [1), 清水 大輔 [2), 若野 功 [3)

Tomomi MIURA, Daisuke SHIMIZU, and Isao WAKANO

1) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: miura@acs.i.kyoto-u.ac.jp)
2) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: daisuke@acs.i.kyoto-u.ac.jp)
3) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: wakano@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

We deal with a boundary integral equation for the Laplace equation on a ring domain. We show a mathematical structure of the solution to the boundary integral equation, and prove convergence of a numerical solution by the Galerkin method. Some numerical results are contained.

Key Words: Laplace Equation, Boundary Value Problem, Boundary Integral Equation, BEM

1. 序

清水-大西 (1) により, 境界積分方程式を利用した円環領域上の Laplace 方程式の境界値問題に対する数学解析と数値解析についての考察が行われている. 本研究の目的は, 清水-大西 (1) により論じられている Tikhonov 正則化法の適用まで含めて, この問題に対するスキームの有効性を数値例を通して検討することである.

Ω を境界が滑らかな 2 次元の有界領域とする. $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ が Ω 上で調和ならば, $\mathbb{R}^2$ における Laplace 方程式の基本解

$$E(x,y) = \frac{1}{2\pi}\log|x-y|$$

を用いると, $x \in \Omega$ に対して

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)u(y)d\sigma_y - \int_{\partial\Omega} E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)d\sigma_y \quad (1)$$

が成立し, $z \in \partial\Omega$ に対して

$$\frac{1}{2}u(z) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E}{\partial n_y}(z,y)u(y)d\sigma_y - \int_{\partial\Omega} E(z,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)d\sigma_y \quad (2)$$

が成立する (2). Dirichlet 問題の場合は積分方程式 (2) から Neumann 境界値を求めれば (1) によって微分方程式の解が構成される. しかし, 方程式 (2) の解の一意性については議論が必要であり, 例えば Ω が単位円板の場合は積分方程式 (2) の解は一意ではない. 一般に Ω が 2 次元の単連結領域の場合は, 積分方程式 (2) の解の一意性は $\partial\Omega$ の解析的容量に依存することが知られている (3).

一方, 安定性については, 境界条件の与え方によっては境界積分方程式 (2) の一部に解析函数核を有する第一種積分方程式が現れ, 最大値の意味で数値解の不安定性を引き起こす可能性がある. このような背景にあって, 円環領域での境界要素解析を数学の視点で検討することが本研究の目的である。

2. 円環領域での Laplace 方程式の解析

正数 r_1, r_2 に対して, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 | r_1 < |x| < r_2\}$ とし, 境界の各連結成分を $\Gamma_i = \{z \in \mathbb{R}^2 | |z| = r_i\} (i = 1, 2)$ と表わす. このとき Ω 上の調和函数に対する境界積分方程式 (2) を考察するために, 次のように作用素 $\{A_{ij}\}, \{B_{ij}\}$ を導入する. $f_j \in L^2(\Gamma_j),\ g_j \in L^2(\Gamma_j)$ としたとき, $z \in \Gamma_i$ に対し

$$A_{ij}f_j(z) = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial E}{\partial n_y}(z,y)f_j(y)d\sigma_y,$$

$$B_{ij}g_j(z) = \int_{\Gamma_j} E(z,y)g_j(y)d\sigma_y$$

とすると境界積分方程式 (2) は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - A_{11} & -A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ -A_{21} & \frac{1}{2}I - A_{22} & B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

となる．ただし,I は恒等写像とし，$f_j = u|_{\Gamma_j}$，$g_j = \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_j}$ とした．

各 Γ_i 上で Dirichlet 境界値または Neumann 境界値のいずれかを与える Laplace 方程式の境界値問題を考える．ここでは例として Dirichlet 問題を考え，$f_1 \in H^{3/2}(\Gamma_1), f_2 \in H^{3/2}(\Gamma_2)$ に対し，

$$\Delta u(x) = 0 \qquad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$u(z) = f_1(z) \qquad z \in \Gamma_1, \tag{5}$$

$$u(z) = f_2(z) \qquad z \in \Gamma_2 \tag{6}$$

を満たす $u \in H^2(\Omega)$ を求める境界値問題を考える．ここで H^s は s 位の Sobolev 空間を表す。この解 u に対して，$g_1 = \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}, g_2 = \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}$ とおくと，これらは (3) を満たすが，逆に f_1, f_2 に対し (3) を満たす g_1, g_2 が境界値問題 (4)–(6) の解 $u \in H^2(\Omega)$ の境界値になるかについて考察する必要がある．

境界値問題 (4)–(6) に対する境界積分方程式 (3) を既知項と未知項に分離する．$L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2)$ 上の作用素 $\mathscr{L}, \mathscr{M}$ を

$$\mathscr{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \frac{1}{2}I - A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathscr{M} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

と定めると，方程式 (3) は

$$\mathscr{M} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = -\mathscr{L} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

と表わされる． この方程式は $r_2 \neq 1$ のときは $(f_1, f_2) \in H^1(\Gamma_1) \times H^1(\Gamma_2)$ に対し一意解 $(g_1, g_2) \in L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2)$ を持つが，$r_2 = 1$ のときのみは解の一意性のためには付帯条件

$$\int_{\Gamma_1} g_1(y) d\sigma_y + \int_{\Gamma_2} g_2(y) d\sigma_y = 0 \tag{8}$$

を課す必要がある．この条件 (8) は積分方程式 (7) の解の必要条件であることに注意する．

さらに $(f_1, f_2) \in H^{3/2}(\Gamma_1) \times H^{3/2}(\Gamma_2)$ のとき，境界値問題 (4)–(6) の解の一意性から，(7) の解 (g_1, g_2) は境界値問題 (4)–(6) の未知境界値であることがわかる．

さらに清水-大西 [1] に従い,$r_2 \neq 1$ の条件下で $\alpha > 0$ として連立境界積分方程式 (7) に対する Tikhonov の正則化問題

$$(\alpha I + \mathscr{M}^* \mathscr{M}) \begin{pmatrix} G_1^\alpha \\ G_2^\alpha \end{pmatrix} = -\mathscr{M}^* \mathscr{L} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

を考える．ただし,$\alpha > 0$ であり，$\mathscr{M}^*$ は $\mathscr{M}$ を L^2 上の有界作用素とみたときの随伴作用素である．このとき $(f_1, f_2) \in H^1(\Gamma_1) \times H^1(\Gamma_2)$ とすると $\alpha \to +0$ に対し

$$\|(G_1^\alpha, G_2^\alpha) - (g_1, g_2)\|_{L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2)} \to 0$$

が成立する.[1]

正則化問題 (9) を Galerkin 法を用いて離散化する． 正数 h を分割幅を表わすパラメータとし，$L^2(\Gamma_i)$ の内近似 $\{X_{i,h}, P_{i,h}\}(i = 1, 2)$ を $X_{i,h} \subset H^1(\Gamma_i)$ が有限次元空間, $P_{i,h} : L^2(\Gamma_i) \to X_{i,h}$ が直交射影とする． Temam[4] に従い，この近似が安定でありかつ収束性を有すること，つまり，ある $C > 0, \gamma > 0$ が存在し任意の $f_i \in H^1(\Gamma_i)$ に対し

$$\|P_{i,h} f_i\|_{L^2(\Gamma_i)} \le C \|f_i\|_{H^1(\Gamma_i)}$$

$$\|P_{i,h} f_i - f_i\|_{L^2(\Gamma_i)} \le C h^\gamma \|f_i\|_{H^1(\Gamma_i)} \tag{10}$$

が成立することを仮定する．この $\{X_{i,h}, P_{i,h}\}$ を用いて (9) を次のように離散化する．$\mathscr{L}_h = (P_{1,h}, P_{2,h})\mathscr{L}$ 等の記法を用いると (9) の離散化方程式は

$$(\alpha I + \mathscr{M}_h^* \mathscr{M}_h) \begin{pmatrix} G_{1,h}^\alpha \\ G_{2,h}^\alpha \end{pmatrix} = -\mathscr{M}_h^* \mathscr{L}_h \begin{pmatrix} P_{1,h} f_1 \\ P_{2,h} f_2 \end{pmatrix}$$

となる．このときこの離散化方程式の解 $(G_{1,h}^\alpha, G_{2,h}^\alpha) \in X_{1,h} \times X_{2,h}$ に対し $h \to 0$ としたとき

$$\left\|(G_{1,h}^\alpha, G_{2,h}^\alpha) - (G_1^\alpha, G_2^\alpha)\right\|_{L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2)} \to 0$$

が成立することが証明される．

なお，これまでの結果は 3 次元以上の円環領域においても成立することが一般的に証明されている [1] ．

3．数値計算

方程式 (7) および (9) に Galerkin 法を適用した場合の数値実験の結果を示す．数値計算は全て倍精度で行った．

ここでは f_1, f_2 が滑らかな場合についての変分法による定式化を与える．この場合は，与えられた $(f_1, f_2) \in H^1(\Gamma_1) \times H^1(\Gamma_2)$ に対して，方程式 (7) を満たす $(g_1, g_2) \in L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2)$ を求める問題は，次のような変分問題に置き換えることができる．

$$
\begin{aligned}
b_{11}(g_1,\phi_1)+b_{12}(g_2,\phi_1)&=\mathscr{F}_1(\phi_1)\\
b_{21}(g_1,\phi_2)+b_{22}(g_2,\phi_2)&=\mathscr{F}_2(\phi_2)\\
&\forall(\phi_1,\phi_2)\in L^2(\Gamma_1)\times L^2(\Gamma_2). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
b_{ij}(g_j,\phi_i)&=\int_{\Gamma_1}[B_{ij}g_j](z)\phi_i(z)d\sigma_z,\\
\mathscr{F}_1(\phi_1)&=-\int_{\Gamma_1}\left[(\tfrac{1}{2}I-A_{11})f_1-A_{12}f_2\right](z)\phi_1(z)d\sigma_z,\\
\mathscr{F}_2(\phi_2)&=-\int_{\Gamma_2}\left[-A_{21}f_1+(\tfrac{1}{2}I-A_{22})f_2\right](z)\phi_2(z)d\sigma_z
\end{aligned}
$$

である.

各境界 Γ_j $(j=1,2)$ 上に有限要素空間 $X_{1,h},X_{2,h}$ を設定し, 離散化方程式を導く. 境界 Γ_j 上に N_j 個の節点 $z_{jl}(l=1,\dots,N_j,j=1,2)$ を等間隔にとる. φ_{jm} を $\varphi_{jm}(z_{jm})=1$, その他の節点では 0 となる Γ_j 上の区分一次函数とし, $\{\varphi_{jm}\}$ を基底とする函数空間を $X_{j,h}$ とする.(11) に対する離散化問題は,

$$
\begin{aligned}
b_{11}(g_{1,h},\phi_{1,h})+b_{12}(g_{2,h},\phi_{1,h})&=\mathscr{F}_{1,h}(\phi_{1,h})\\
b_{21}(g_{1,h},\phi_{2,h})+b_{22}(g_{2,h},\phi_{2,h})&=\mathscr{F}_{2,h}(\phi_{2,h})\\
&\forall(\phi_{1,h},\phi_{2,h})\in X_{1,h}\times X_{2,h} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

を満たす $(g_{1,h},g_{2,h})\in X_{1,h}\times X_{2,h}$ を求める問題となる. ただし,

$$
f_{j,h}(z)=\sum_{m=1}^{N_j}f_j(z_{jm})\varphi_{jm}(z)
$$

とおき,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_{1,h}(\phi_{1,h})&=-\int_{\Gamma_1}\left[(\tfrac{1}{2}I-A_{11})f_{1,h}-A_{12}f_{2,h}\right](z)\phi_{1,h}(z)d\sigma_z,\\
\mathscr{F}_{2,h}(\phi_{2,h})&=-\int_{\Gamma_2}\left[-A_{21}f_{1,h}+(\tfrac{1}{2}I-A_{22})f_{2,h}\right](z)\phi_{2,h}(z)d\sigma_z
\end{aligned}
$$

とする. 近似解 $(g_{1,h},g_{2,h})$ を

$$
g_{j,h}(z)=\sum_{m=1}^{N_j}g_{jm}\varphi_{jm}(z), \quad (j=1,2)
$$

とおき, 各 j に対して係数 $\{g_{jm}\},(m=1,\dots,N_j)$ のなす列ベクトルを $\tilde{g}_{j,h}=(g_{jm})_{m\downarrow}$ と書くと, 方程式 (12) は連立一次方程式

$$
\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{g}_{1,h}\\ \tilde{g}_{2,h}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{f}_{1,h}\\ \tilde{f}_{2,h}\end{pmatrix} \tag{13}
$$

と等価である. ここで, $G_{ij},F_{ij},(i,j=1,2)$ は

$$
\begin{aligned}
(G_{ij})_{lm}=&b_{ij}(\varphi_{jm},\varphi_{il}),\\
(F_{ij})_{lm}=&\int_{\Gamma_i}\left[(\tfrac{1}{2}I\delta_{ij}-A_{ij})\varphi_{jm}\right](z)\varphi_{il}(z)d\sigma_z\\
&(l=1,\dots,N_i,m=1,\dots,N_j)
\end{aligned}
$$

で定義される行列であり, $\tilde{f}_{j,h}$ は列ベクトル $(f_j(z_{jm}))_{m\downarrow}$ を表す.

行列 M_h,L_h を

$$
M_h=\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{pmatrix}, \quad L_h=\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{pmatrix}
$$

と定義し, Tikhonov の正則化問題に対応する離散化問題として

$$
(\alpha I+M_h^*M_h)\begin{pmatrix}\tilde{g}^{\alpha}_{1,h}\\ \tilde{g}^{\alpha}_{2,h}\end{pmatrix}=-M_h^*L_h\begin{pmatrix}\tilde{f}_{1,h}\\ \tilde{f}_{2,h}\end{pmatrix} \tag{14}
$$

を考える.

$r_1=1,r_2=2$ とし, Γ_j 上で Dirichlet 境界値

$$
f_j(\theta)=r_j\cos(\theta), \quad j=1,2
$$

を与えて数値実験を行った. なお, この場合の厳密解は

$$
(g_1,g_2)=(-\cos\theta,\cos\theta)
$$

である.

本数値実験においては, Γ_1 上の節点数 N_1 と Γ_2 上の節点数 N_2 を $N_2=2N_1$ と定め, $h=2\pi/N_1(=2r_1\pi/N_1=2r_2\pi/N_2)$ とおく.

まず, (13) の数値計算結果を示す. $N_1=10,20,40,80,160,320$ に対して数値解を求め, 分割パラメータ h と各 Γ_j での節点における誤差の最大値

$$
e_j(h)=\max_{1\le l\le N_j}|g_j(z_{jl})-g_{jl}|, \quad j=1,2
$$

の関係を Fig. 1 に示す.

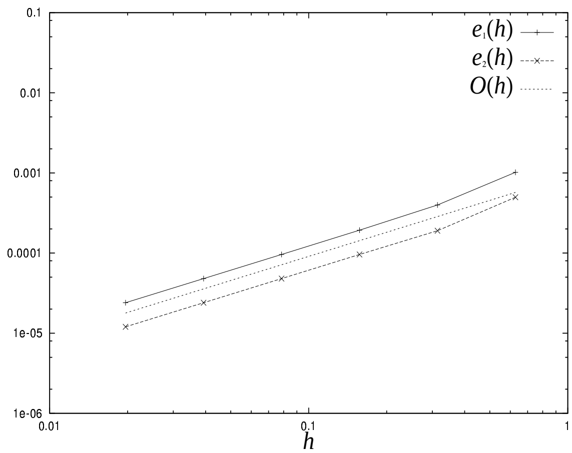

Fig. 1　Galerkin 法

Fig. 1 から最大値ノルムでの数値解の収束次数が 1 次であること, したがって L^2 ノルムでも少なくとも 1 次収束していることが分かる. ここでは区分一次函数により有限要素空間を構成しているので, 式 (10) で $\gamma = 1$ となり, 理論的に期待される誤差評価と一致している.

次に, 節点数を $N_1 = 10, N_2 = 20$ に固定し, 正則化パラメータ α を変化させて (14) の数値解を求め, α と Γ_j での節点における誤差の最大値

$$\bar{e}_j(\alpha) = \max_{1 \leq l \leq N_j} |g_j(z_{jl}) - \tilde{g}_{jl}^{\alpha}|$$

の関係を Fig. 2 に示す. Fig. 2 の横軸に平行な直線 $e_1(h)$ および $e_2(h)$ は同じ分割数 $N_1 = 10, N_2 = 20$ で正則化を行わない場合の数値解の誤差を表している.

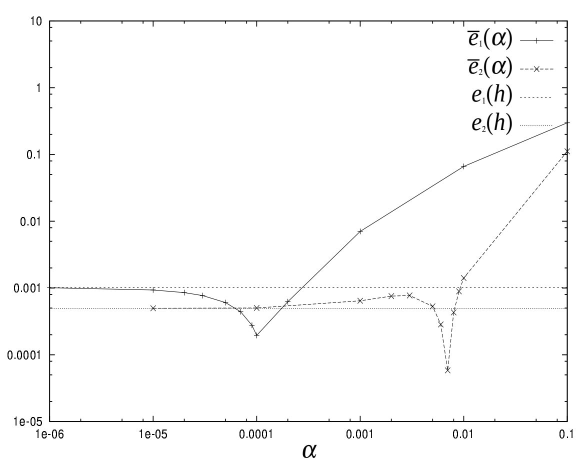

Fig. 2　Tikhonov 正則化

4. まとめ

Fig. 2 より正則化パラメータを小さくとるにしたがって正則化を行わない場合の誤差に近付いていくことが見てとれるが, 一部で正則化を行わない場合よりも誤差が小さくなるという結果を得た. これより, 適切な正則化パラメータの選択については, 精密な議論が必要であることが分かった.

今後の課題として, 二次元だけでなく三次元の場合も含めて, 必ずしも円環領域でない一般の領域に対し, 清水-大西[1] の成果（第 2 節で述べた理論）が成立するかどうかを数値実験により検証することも重要と考えられる.

参考文献

(1) 清水大輔, 大西和榮: d 次元 $(d-2)$ 連結領域でのラプラス方程式に対する境界要素法, 境界要素法論文集, Vol.18, pp.87-90, 2001

(2) 境界要素法研究会編: 境界要素法の応用, コロナ社, 1987

(3) Masato Kimura: Asymptotic estimation for the condition numbers in BEM, Numerische Mathematik, Vol.73, No.2, pp.209-233, 1996

(4) Temam, R: 数値解析特論, (藤田宏, 米口肇共訳), 産業図書, 1977