

Wavelet 基底を用いた hr-境界要素適応分割法

hr-ADAPTIVE MESHING FOR WAVELET BEM

阿部和久¹⁾, 中村淳²⁾, 紅露一寛³⁾

Kazuhiisa ABE, Jun NAKAMURA and Kazuhiro KORO

¹⁾新潟大学工学部建設学科 (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)²⁾新潟大学工学部建設学科 (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地)³⁾新潟大学大学院自然科学研究科 (〒950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 番地, E-mail:f99m912c@mail.cc.niigata-u.ac.jp)

An hr-adaptive scheme is developed for the wavelet BEM. Since non-uniform mesh is to be yielded through the redistribution process, a new wavelet basis which can be defined on any mesh distribution is proposed. The feasibility of the developed method is examined through numerical examples. It can be found that the present method provides a nearly optimum mesh distribution, and the rate of convergence of the solution can then be improved. The matrix compression of 20 - 30% is achieved for problems with 1000 DOF or more. Moreover, the computation time can be shortened considerably comparing with the conventional uniform refinement.

Key Words : *hr-Method, Wavelet BEM, Non-Uniform Meshing*

1. はじめに

Wavelet BEM は, 境界要素法の関数近似に wavelet 基底を用いるものである. Wavelet の有する局所サポート性とゼロモーメント性により, 境界要素方程式の係数行列成分の距離減衰性が向上し, その結果多くの成分が非常に小さな値を持つようになる. これらを切り捨てることで, 精度を維持しつつ行列成分の圧縮を実行することができ, 計算時間・記憶容量の削減が可能になる. しかし, wavelet BEM では wavelet の持つ階層性から, 一様な要素分割がなされる. そのため, 境界値関数が特異性を持つなど, 解の精度が局所的にばらつくような場合において所定の精度を確保するために, 場所によっては過剰な自由度を与えてしまう恐れがある.

上述の問題点の改善には適応分割法が有効である. これまで wavelet BEM に対しては h-法¹⁾が検討されている. Wavelet は階層性を持つので, 階層型適応分割法の構成が可能であり, 分割過程において一度作成した係数行列を再利用できるといった利点がある. しかし, h-法は初期の要素分割の下, 近似精度の劣る要素を等分割することで必要精度を確保する手法であり, その限られた要素配置の下で得られる分割は必ずしも最適な要素配置とはなっていない²⁾.

これに対し, r-法は与えられた自由度の下で, 最適な要素配置を実現する手法である. ただし, 得られた解がその自由度下で過不足なく規定精度を与えるという保証はない. したがって, 所定の精度に必要な要素数を h-法で生成し, その下での最適な要素配置を r-法で与えることで両手法の長所を活かすことのできる, いわゆる hr-法の適用が有効に思われる. なお, r-過程において要素配置

が変更されるので, 階層基底を用いてもその都度係数行列の作成が必要とはなるものの, h-法における問題点が解消されるという利点を有する.

本研究では任意の要素分割の下で直交性と 1 次のゼロモーメント性を持つ, 区間一定 wavelet を作成し, Galerkin 法による定式化の下, hr-適応分割過程を構成する. また具体例に基づき, 適応分割過程の妥当性, 係数成分の圧縮率, 計算時間などについて調べ, 提案手法の有効性について検討する.

2. Wavelet 基底

2.1 任意の要素配置に対する wavelet

Wavelet 基底は scaling 関数と wavelet から構成される. 解像度レベル m の分割 (自由度 2^m) の下, 区間 $[a, b]$ 上で与えられる関数空間を V_m とする. なお, V_m のメッシュは必ずしも一様に分布している必要はない. V_m の基底を $\phi_{m,k}$ と定義して, V_m の任意の関数 f^m を次式で与える.

$$f^m = \sum_k^{N_m} f_k^m \phi_{m,k} \quad , \quad N_m = 2^m \quad (1)$$

ここで, f_k^m は係数である.

V_m の要素配置の下, 1 つ下の解像度の部分空間 V_{m-1} を与える基底を $\phi_{m-1,k}$ とする. V_{m-1} は V_m の部分空間であるので $\phi_{m-1,k}$ は次式のように与えることができる.

$$\phi_{m-1,k} = \sum_j^{N_m} a_{k,j}^{m-1} \phi_{m,j} \quad (2)$$

ここで, $a_{k,j}^{m-1}$ は係数である.

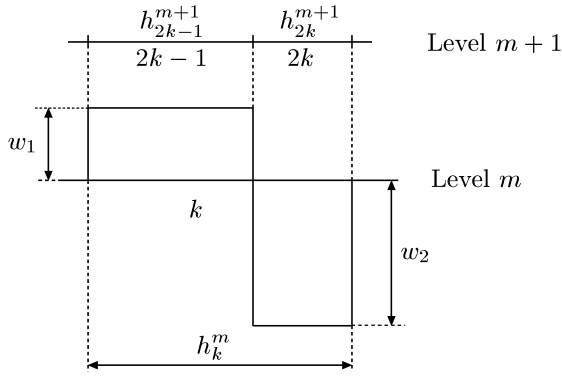


Fig. 1 Wavelet $\psi_{m,k}$

V_m における V_{m-1} の直交補空間を W_{m-1} とし、その基底を $\psi_{m-1,k}$ とおくと、 $\psi_{m-1,k}$ も $\phi_{m-1,k}$ と同様に $\phi_{m,k}$ の一次結合により次式のように与えることができる。

$$\psi_{m-1,k} = \sum_j^{N_m} b_{k,j}^{m-1} \phi_{m,j} \quad (3)$$

また、 $\psi_{m,k}$ は正規直交基底であり次式をみたすものとする。

$$(\psi_{i,j}, \psi_{k,l}) = \int_a^b \psi_{i,j} \psi_{k,l} dx = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (4)$$

ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

不等分割の場合、 $\psi_{m,k}$ は各々形状が異なり、通常用いられる wavelet 基底のように1つの関数 (mother wavelet) の拡大、移動により生成することができない。本研究では区間一定近似を対象に、次に示す1次のゼロモーメントを持つ wavelet を作成する。

$$(\psi_{m,k}, 1) = 0 \quad (5)$$

Fig.1 に示す wavelet を考える。ここで、各一定区間の幅と高さをそれぞれ h_{2k-1}^{m+1} 、 h_{2k}^{m+1} および w_1 、 w_2 とする。Wavelet が式(4)の正規直交性と式(5)のゼロモーメント性を持つ場合、 w_1 、 w_2 は次式で与えられる。

$$w_1 = \sqrt{\frac{h_{2k}^{m+1}}{h_k^m h_{2k-1}^{m+1}}}, \quad w_2 = \sqrt{\frac{h_{2k-1}^{m+1}}{h_k^m h_{2k}^{m+1}}} \quad (6)$$

$h_{2k-1}^{m+1} = h_{2k}^{m+1}$ の場合、 $\psi_{m,k}$ は Haar wavelet を与える。

2.2 Wavelet 変換

h_k^m をサポートに持つ scaling 関数 $\phi_{m,k}$ は次式で規格化されているものとする。

$$(\phi_{m,k}, \phi_{m,k}) = 1 \quad (7)$$

このとき、区間一定関数 $\phi_{m,k}$ のサポート上での値は $1/\sqrt{h_k^m}$ となる。解像度 $m+1$ で長さ h_{2k-1}^{m+1} 、 h_{2k}^{m+1} の区

間をサポートに持つ scaling 関数をそれぞれ $\phi_{m+1,2k-1}$ 、 $\phi_{m+1,2k}$ とすると、解像度 m における scaling 関数 $\phi_{m,k}$ と wavelet $\psi_{m,k}$ は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \phi_{m,k} \\ \psi_{m,k} \end{cases} = \begin{bmatrix} a_k^m & b_k^m \\ b_k^m & -a_k^m \end{bmatrix} \begin{cases} \phi_{m+1,2k-1} \\ \phi_{m+1,2k} \end{cases}, \quad (8)$$

$$a_k^m = \sqrt{\frac{h_{2k-1}^{m+1}}{h_k^m}}, \quad b_k^m = \sqrt{\frac{h_{2k}^{m+1}}{h_k^m}}$$

解像度 $m+1$ での関数 f^{m+1} は解像度 m の scaling 関数と wavelet により次式のように与えることができる。

$$\begin{aligned} f^{m+1} &= \sum_k^{N_{m+1}} f_k^{m+1} \phi_{m+1,k} \\ &= \sum_k^{N_m} (f_k^m \phi_{m,k} + g_k^m \psi_{m,k}) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 g_k^m は wavelet $\psi_{m,k}$ の係数である。

式(8)より、 f_k^m 、 g_k^m は f_k^{m+1} により次式で与えられる。

$$\begin{cases} f_k^m \\ g_k^m \end{cases} = \begin{bmatrix} a_k^m & b_k^m \\ b_k^m & -a_k^m \end{bmatrix} \begin{cases} f_{2k-1}^{m+1} \\ f_{2k}^{m+1} \end{cases} \quad (10)$$

関数の wavelet 係数は式(10)の wavelet 変換により求めることができる。

3. Wavelet BEM

以下では二次元ポテンシャル問題を対象に議論を進める。直接法に基づく境界積分方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \\ = \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで u 、 q は境界 Γ 上で定義されたポテンシャルと流束、 u^* 、 q^* は基本解、 $c(\mathbf{x})$ は点 \mathbf{x} における境界の幾何学的条件に依存する係数で、滑らかな境界上では $1/2$ となる。

式(11)の u 、 q の近似 \tilde{u} 、 \tilde{q} を、次のように wavelet 基底により展開する。

$$\tilde{u} = \sum_i^N u_i w_i, \quad \tilde{q} = \sum_i^N q_i w_i \quad (12)$$

ここで、 w_i は基底 $\phi_{0,k}$ 、 $\psi_{m,k}$ ($m = 0, 1, \dots$) を順に並べたもの、 u_i 、 q_i はその係数、 N は全自由度である。

式(12)を式(11)に代入したものに Galerkin 法を適用して次の境界要素方程式を得る。

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (13)$$

ここで、 \mathbf{u} 、 \mathbf{q} は式(12)の u_i 、 q_i を成分に持つベクトル、 \mathbf{H} 、 \mathbf{G} は次式を成分に持つ係数行列である。

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \frac{1}{2} \delta_{ij} + \iint_{\Gamma} q^* w_i w_j d\Gamma^2, \\ g_{ij} &= \iint_{\Gamma} u^* w_i w_j d\Gamma^2 \end{aligned} \quad (14)$$

4. hr-適応分割法

本研究で用いる適応分割過程は、文献^{1), 2), 3)}に構成した方法に準ずる。ここでは、その概略のみを示す。

4.1 Error indicator と error estimator

Galerkin 法による境界要素近似の error indicator と estimator には、文献¹⁾で導入したものをを用いる。現在の分割の下、各一定区間での近似度を与える error indicator λ_j を次式で定義する。

$$\lambda_j = \text{Max}\{|\lambda_{ij}|, i = 1, \dots, N\}, \quad (15)$$

$$\lambda_{ij} = - \iint_{\Gamma} q^* w_i \psi_j^{M+1} d\Gamma^2 \check{u}_j + \iint_{\Gamma} u^* w_i \psi_j^{M+1} d\Gamma^2 \check{q}_j \quad (16)$$

ここで、 ψ_j^{M+1} は現在の最高解像度レベル M の 1 つ上の階層の Haar wavelet である。また \check{u}_j, \check{q}_j は解 u, q の ψ_j^{M+1} に対する係数であり、実際の解析では現近似解の線形補間に基づき近似評価する。

全体の近似精度の評価に用いる error estimator η を次式で定義する。

$$\eta = \sum_j^N \lambda_j \quad (17)$$

4.2 最適要素長の決定 (r-過程)

最上位 wavelet ψ_i^M の区間長 h_j^{M+1} を、ここでは簡単のため h_j と表す。

Error indicator λ_j と h_j との間に次の関係を仮定する。

$$\lambda_j = C_j h_j^\beta (1 + O(h_j)) \quad (18)$$

ここで C_j, β は h_j によらない定数であり、 β は事前に与えておくものとする。

このとき、 η を最小にする最適要素長 h_j' は次式で与えられる²⁾。

$$h_j' = \frac{L_k}{\sum_i \frac{h_i}{\lambda_i^{1/\beta}}} \cdot \frac{h_j}{\lambda_j^{1/\beta}} \quad (19)$$

ここで、 L_k は部分境界長である。なお、r-法は部分境界毎に適用するものとする。

式(19)の操作は、 h_j' が概ね収束するまで繰り返し実行する。

4.3 必要自由度の決定 (h-過程)

部分境界 Γ_k 上の error indicator の平均値を $\bar{\lambda}_k$ で与える。これより次の値 \bar{c}_k を求める。

$$\bar{c}_k = \bar{\lambda}_k n_k^\beta \quad (20)$$

ここで n_k は Γ_k 上の自由度である。

式(20)の \bar{c}_k より、次の $\bar{\lambda}$ を求める。

$$\bar{\lambda} = \left(\frac{\eta_{tol}}{\sum_k \bar{c}_k^{1/\beta}} \right)^{\beta/(\beta-1)} \quad (21)$$

ここで η_{tol} は η の許容値である。

$\eta = \eta_{tol}$ をみたすために必要となる自由度 n_k' は次式により与えられる³⁾。

$$n_k' = \left(\frac{\bar{\lambda}_k}{\bar{\lambda}} \right)^{1/\beta} \cdot n_k \quad (22)$$

なお、要素配置は r-過程で自由に変えることができる。そのため、現段階の要素分割の下で、新たな基底をいずれの最上位 wavelet の上に追加しても、同一の要素配置を与えることが可能である。これは式(22)の自由度 n_k' を与えるために必要となる追加基底の選択が一意に決定できないことを意味する。そのため、本研究では、部分境界で自由度が不足している場合は、必要自由度 n_k' 以上の自由度を与え得る階層までの全基底を追加する方法を採用することとした。この場合、各部分境界の自由度は 2 のべき乗で与えられることとなる。

5. 係数行列成分の切り捨て

5.1 切り捨ての判定

Wavelet BEM では小さな値を持つ係数行列成分を切り捨てることで計算の効率化を図る。ここでは次式を満たす行列の成分 h_{ij}, g_{ij} を切り捨てる⁴⁾。

$$|h_{ij}| \leq \tau \cdot H_{\max}, \quad |g_{ij}| \leq \tau \cdot G_{\max} \quad (23)$$

ここで、 H_{\max}, G_{\max} は $|h_{ij}|, |g_{ij}|$ の代表値、 τ は切り捨てパラメータであり、具体的値の設定については次節で述べる。

係数行列の作成時間を短縮するために、 g_{ij} を次式で事前評価し、それが式(23)をみたす場合は、この段階で g_{ij}, h_{ij} の切り捨てを行う。なお、係数成分の積分における距離減衰性は、wavelet の有するゼロモーメント性のため、より高いものとなる。このことに基づいて次式を得る。

$$|g_{ij}| \simeq \frac{1}{4\pi r} \sqrt{h_i^0} \sqrt{h_j^\nu h_{2j-1}^{\nu+1} h_{2j}^{\nu+1}}, \quad (w_i \text{ が scaling 関数の場合}), \quad (24)$$

$$\frac{1}{8\pi r^2} \sqrt{h_i^\mu h_{2i-1}^{\mu+1} h_{2i}^{\mu+1}} \sqrt{h_j^\nu h_{2j-1}^{\nu+1} h_{2j}^{\nu+1}}, \quad (w_i, w_j \text{ が wavelet の場合})$$

ここで、 r は基底 w_i と w_j の距離、 h_i^μ, h_j^ν はサポート長である。

なお、 w_i, w_j が共に scaling 関数の場合は事前評価による切り捨ては行わない。また、事前評価の結果切り捨て条件をみたさなかった成分については、式(14)によりその値を計算し、その後式(23)による切り捨て評価を再度実行する。

5.2 τ の設定

文献⁴⁾では、切り捨て基準値 τ を次式で与えた。

$$\tau = \frac{1}{2 \|\mathbf{H}\|_\infty} \cdot \frac{\|\mathbf{R}\|_\infty}{\|\mathbf{u}\|_\infty}, \quad R_i = \sum_j \lambda_{ij} \quad (25)$$

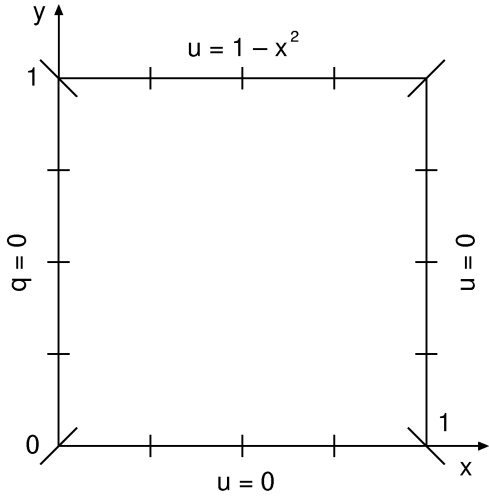


Fig. 2 Analytical conditions (Ex.1)

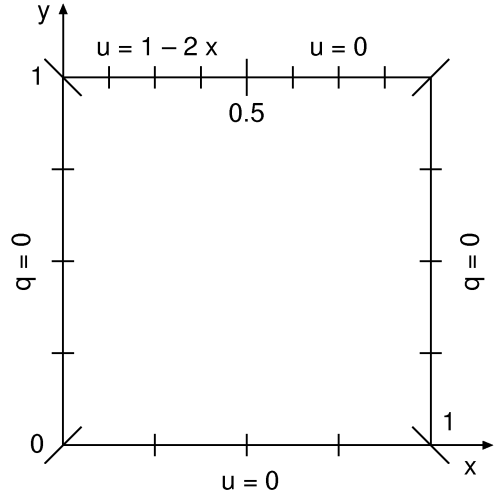


Fig. 3 Analytical conditions (Ex.2)

$\|\mathbf{R}\|_\infty$ と η とには次の関係がある.

$$\|\mathbf{R}\|_\infty \leq \left\| \sum_j |\lambda_{ij}| \right\|_\infty \leq \sum_j \lambda_j = \eta \quad (26)$$

そこで η_{tol} に対応する $\|\mathbf{R}\|_\infty$ の許容値を $\|\mathbf{R}\|_{tol}$ とし, $\|\mathbf{R}\|_{tol}/\|\mathbf{u}\|_\infty = \rho_{tol}$ とおく. なお, ρ_{tol} は解析時に入力する. 適応分割の初期段階の解より $\|\mathbf{u}\|_\infty$ の近似値が評価できれば, $\|\mathbf{R}\|_{tol}$ は次式で求めることができる.

$$\|\mathbf{R}\|_{tol} = \rho_{tol} \cdot \|\mathbf{u}\|_\infty \quad (27)$$

これに対応する τ は次式で与えられる.

$$\tau = \frac{\rho_{tol}}{2\|\mathbf{H}\|_\infty} \quad (28)$$

なお, 実際の解析では $\|\mathbf{H}\|_\infty \simeq \alpha H_{max}$ で近似し, 以下の解析例では $\alpha = 4$ とした.

また, 必要自由度 n'_k は式(20)~(22)により求められる. その際に η_{tol} が必要になる. ここでは, $\eta = C\|\mathbf{R}\|_\infty$ (C : 定数) と仮定し, 現分割における η , $\|\mathbf{R}\|_\infty$ から C を求め, $\eta_{tol} = C\|\mathbf{R}\|_{tol}$ により η_{tol} を決定する.

6. 解析例

6.1 解析条件

解析例に用いた問題 (Ex.1, Ex.2) の諸条件を Fig.2,3 に示す. なお, 図には初期要素分割も示した. Ex.1 は4つの, また Ex.2 は5つの部分境界より成り, 各部分境界上に各々1つの scaling 関数をおき, 初期分割は階層 $m = 1$ までの wavelet で与えている. さらに, Ex.2 は境界上の2点 (0,1), (0.5,1) において流束が特異性を持っており, そのような問題への適用性を見る目的でここに示した.

解析に当たり, 式(18)の β の値は数値実験に基づき3とした. また, 連立方程式の求解には GMRES 法を用い, そのリスタート値を10とした. なお, GMRES 法による反復過程の収束判定は方程式の残差ノルム $\|\mathbf{r}\|_\infty$ に基づき実施する. ここで, 解析は離散化許容誤差 $\|\mathbf{R}\|_{tol}$ の下で行うので, 反復解の許容値 $\|\mathbf{r}\|_{tol}$ は $\|\mathbf{R}\|_{tol}$ と同じ値で与える.

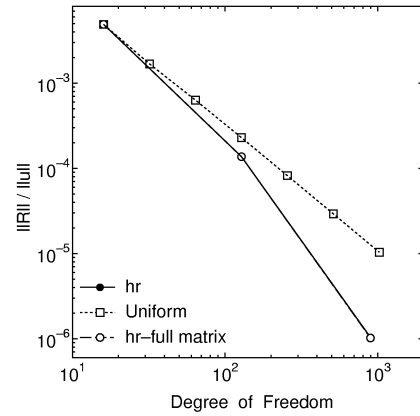


Fig. 4 Convergence of solution in hr-process for Ex.1

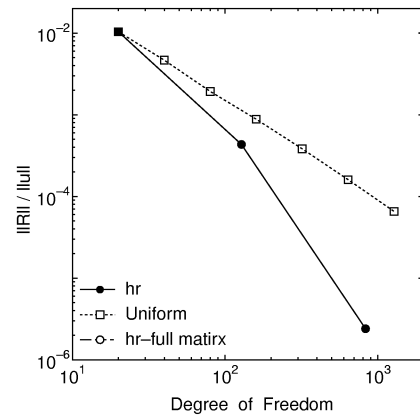


Fig. 5 Convergence of solution in hr-process for Ex.2

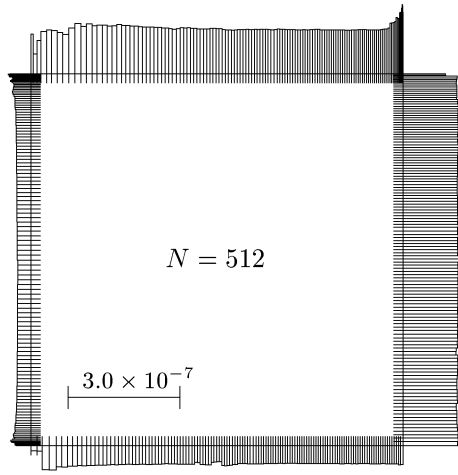


Fig. 6 Final mesh and distribution of the error indicator (Ex.1)

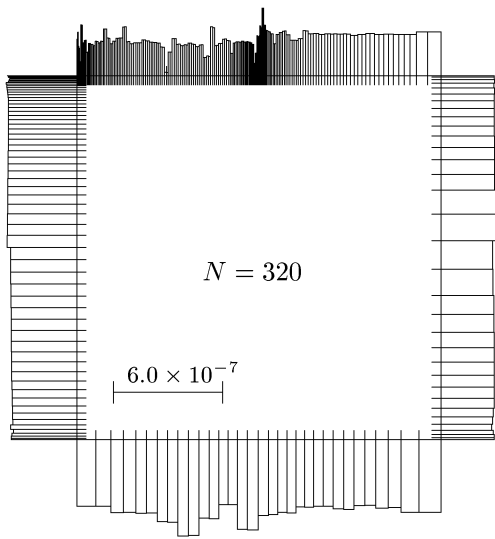


Fig. 7 Final mesh and distribution of the error indicator (Ex.2)

6.2 適応分割過程の有効性に関する検討

$\rho_{tol} = 8 \times 10^{-6}$ (Ex.1), 2×10^{-5} (Ex.2) に対する結果を Fig.4,5 に示す. 図は分割過程における自由度と $\|\mathbf{R}\|_{\infty}/\|\mathbf{u}\|_{\infty}$ との関係を示したものである. なお図には比較のため一様分割に対する結果も示した. 本 hr-法では, まず h-法で必要自由度を求め, r-法でその下での最適要素配置を決定している. 図より, いずれの問題に対しても 2 回の hr-過程の実行で, 最終分割に到達していることがわかる. また, 解の収束性は一様分割に比べ格段に向上している.

図には 5. に述べた係数成分の切り捨てを行わない場合の結果も示したが, 切り捨てを行ったものと完全に一致しており, 切り捨てによる精度低下は生じておらず, 本切り捨て法の妥当性が確認できる.

次に, $\rho_{tol} = 1 \times 10^{-5}$ (Ex.1), 8×10^{-5} (Ex.2) の下で得られた最終分割と error indicator λ_j の分布の様子を Fig.6,7 に示す. 最適な要素配置の下で λ_j は全区間一定値をとる. 解析では式(19)の再配置過程の収束条件

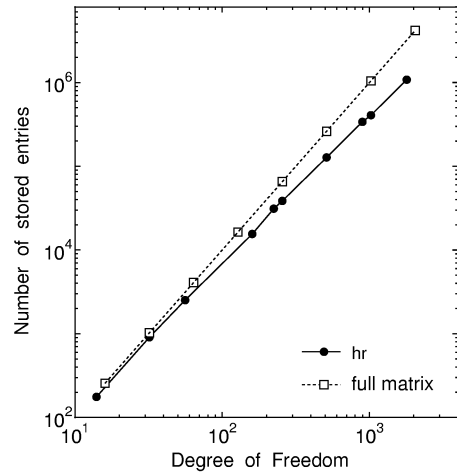


Fig. 8 Relation between DOF and number of stored entries (Ex.1)

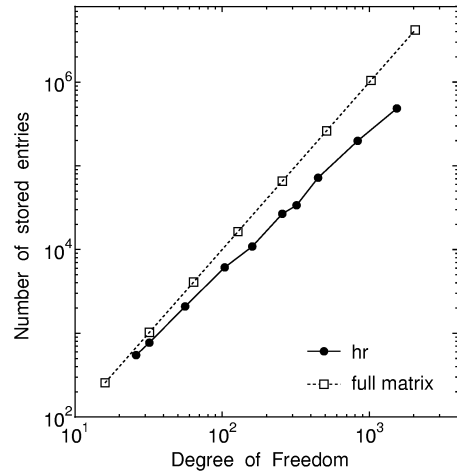


Fig. 9 Relation between DOF and number of stored entries (Ex.2)

を, λ_j の最大値と平均値との比 $\lambda_{max}/\lambda_{mean}$ で与え, その値を 2 としている. 図より, λ_j の値が部分境界毎に多少異なるものの, 各部分境界上では概ね一定の分布を示しており, 適切な要素配置がなされている様子が確認できる. なお, error indicator の値にバラツキを生じた原因は, 4.3 に述べたように, 各部分境界上の自由度を 2 のべき乗で与えていることにあり, 今後改善の余地がある.

6.3 係数行列成分切り捨ての効果に関する検討

係数行列成分を式(23)に基づき切り捨てた場合の自由度と保存成分数との関係を Fig.8,9 に示す. 図には全成分保存した場合も合わせて示した. なお, この図は, 様々な値の ρ_{tol} の下で得た最終分割での結果をそれぞれプロットしたものである. 1000 自由度程度において, 30 ~ 20%まで保存成分数が圧縮されている.

次に, hr-過程全体に要した時間と $\|\mathbf{R}\|_{\infty}/\|\mathbf{u}\|_{\infty}$ との関係を Fig10,11 に示す. 図には比較のため, 全係数保存した場合と, 一様分割による場合も示した. 本適応分割

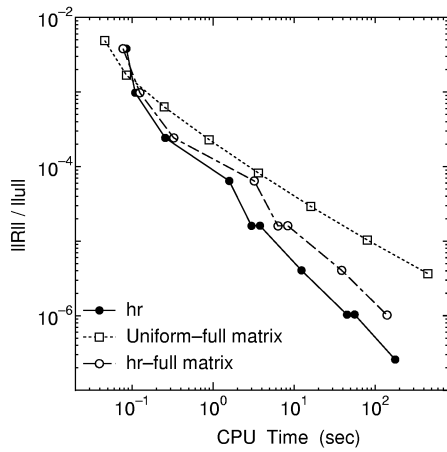


Fig. 10 Relation between computation time and accuracy (Ex.1)

法を用いることで、同精度の解を得るのに要する時間が、一様分割に比べ短縮されており、本手法の有効性が確認できる。さらに、切り捨ての実施により、精度によっては計算時間を一様分割の場合の 1/100 以下にまで短縮できることがわかる。なお、式(19)による再配置過程の収束性は比較的不安定で、特に自由度の増加に伴い反復回数が増加する傾向にあった。これによる計算時間の浪費が懸念されるが、その解決には再配置操作の収束性の向上が不可欠であり、この点については今後の課題としたい。

7. おわりに

Wavelet BEM を対象に hr-適応分割法を構成した。r-過程において不等分割がなされるので、用いる wavelet として任意の要素配置に対応したものを作成した。解析例による検討の結果、ここに構成した適応分割法により概ね最適な要素配置を得ることができ、解の収束性も一様分割に比べ向上しており、本分割法の有効性が確認でき

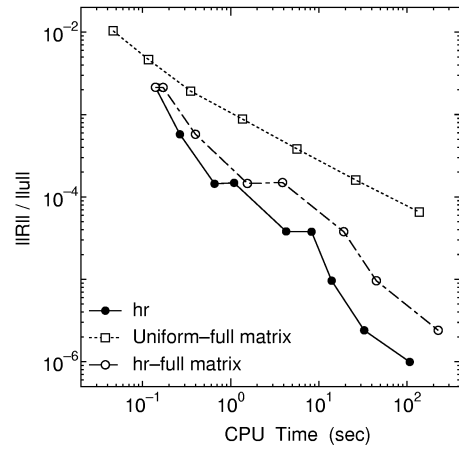


Fig. 11 Relation between computation time and accuracy (Ex.2)

た。また、係数行列成分の切り捨てにより、1000 自由度程度の下で保存成分数を 70 ~ 80%削減することができた。さらに、一様分割で全係数を保存する場合に比べ、同一精度の解析に要する計算時間を大幅に短縮できることがわかった。

参考文献

- 1) Abe, K., Koro, K., Itami, K., An h-hierarchical Galerkin BEM using Haar wavelets, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **25**, 581-591, 2001.
- 2) 阿部和久, 赤澤友治, hr-法に基づく境界要素適応自動分割法, 境界要素法論文集, 第 10 巻, 89-94, 1993.
- 3) 阿部和久, 櫻庭庄平, hr-境界要素適応分割過程の改善, 境界要素法論文集, 第 13 巻, 79-84, 1996.
- 4) Koro, K. and Abe, K., Determination of optimal threshold for matrix compression in wavelet BEM, *Boundary Elements XXIII*, Bescos, D.E., Brebbia, C.A., Katsikadelis, J.T. and Manolis, G.D. (eds.), WIT Press, 475-484, 2001.