

## 動弾性境界要素解析における数値 Laplace 逆変換の適用について

## APPLICATION OF NUMERICAL LAPLACE INVERSION FOR THE ELASTODYNAMIC BEM ANALYSIS

荒井 政大<sup>1)</sup>, 足立 忠晴<sup>2)</sup>

Masahiro ARAI, Tadaharu ADACHI

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: arai@gipwc.shinshu-u.ac.jp)  
 2) 東京工業大学大学院機械物理学専攻 (〒152-8552 目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: adachi@mech.titech.ac.jp)

In the present paper, the boundary element method (BEM) for transient elastodynamic problems based on the Laplace transform is discussed. In the Laplace transformed BEM, the accuracy of the numerical results is generally governed by the numerical treatment of the inverse Laplace transformation for the transformed solutions. Two types of numerical inverse Laplace transformation (NILT) formula, namely Krings & Waller's method and Hosono's method are applied to the 2-dimensional boundary element analysis. It is shown that a stability condition exists between the element size and the time increment on the computations. The characteristics of two types of NILT methods are found out through 2-dimensional BEM analyses for the transient elastodynamic problems.

*Key Words:* Boundary Element Method, Computational Mechanics, Structural Analysis, Numerical Analysis, Laplace Transform, Elasticity

## 1. 緒 論

本論文では、非定常動弾性問題に対する境界要素法の定式化のうち、Laplace 変換法に基づく解析法<sup>(1)(2)(3)</sup>について議論する。Laplace 変換法による解析では、像空間で与えられる支配方程式の境界値問題を解き、得られる離散的な像空間解を数値的に Laplace 変換することによって実時間変動解を得る。この解法において解析精度を左右する要因は、(1) 数値積分誤差 (特異積分), (2) 特殊関数の計算誤差, (3) 離散化誤差, (4) 数値 Laplace 逆変換に伴う計算誤差の 4 点に集約し得る。

まず (1) の特異積分については、動的問題に対しても静的問題の場合と同様の議論が成立し、よく知られた正則化処理を施すことにより解決を図ることが可能である<sup>(4)</sup>。(2) に関しては、非定常動弾性問題における単位集中荷重に対応する基本解は一般に特殊関数により表されるため、Bessel 関数や Kelvin 関数の計算精度を高めることが重要となる。

(3) の離散化誤差については、差分法や有限要素法などと同様に、座標空間と時間軸との離散化において安定条件が存在するため、不必要に要素分割を細かくすると思わぬ精度の低下をもたらす場合があることに注意する必要がある。

また、Laplace 変換法に限らず時変数の変換を伴う解法では、像空間上の数値解を何らの方法で実時間解に変換する必要があり、一般には数値的な逆変換が適用される。すなわち、上記 (4) の数値 Laplace 逆変換をいかに高精度かつ効率的に実行するかが重要である。

そこで本論文では、Laplace 変換法の BEM への適用において特に重要である数値 Laplace 逆変換に注目して議論する。代表的な数値 Laplace 逆変換法として、Krings & Waller の方法<sup>(5)</sup>および細野の方法<sup>(6)</sup>を境界要素法による 2 次元動弾性問題の解析に適用し、数値 Laplace 逆変換に伴う解の安定条件について検討を行った。

## 2. Laplace 変換法による BEM 定式化

本節では、非定常動弾性問題の BEM 定式化について、その概略を述べる。動的問題に対するつり合い方程式は以下のように記述できる。

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + b_i = \rho u_{i,tt} \quad (1)$$

ここで  $u_i$  は変位,  $b_i$  は単位要素に作用する体積力の成分を表し,  $t$  は時間である。また  $\lambda, \mu$  は Lamé の定数である。時刻  $t = 0$  で  $u_i = u_{i,t} = 0$  とし, 式 (1) を Laplace 変換すれば次式となる。

$$\mu \bar{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \bar{u}_{j,ji} + \bar{b}_i = \kappa^2 \bar{u}_i \quad (2)$$

ここで,  $\kappa$  は Laplace 変換パラメータであり, 記号 ‘ $\bar{\cdot}$ ’ は各物理量の Laplace 変換形である。さて, 境界積分方程式を導くにあたり, 基本解として次式を満たす特解を採用する。

$$\mu \bar{U}_{ij,kk} + (\lambda + \mu) \bar{U}_{kj,ki} + \delta(r) e_i e_j = \kappa^2 \bar{U}_{ij} \quad (3)$$

すなわち, 基本解  $U_{ij}$  は原点  $r = 0$  において時刻  $t = 0$  に単位インパルス状の集中荷重が作用する場合の変位の解である。基本解  $U_{ij}$  を基礎式の重み関数として用いれば, 以下の境界積分方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} C_{ij}(P) \bar{u}_j(P) + \int_{\Gamma} \bar{T}_{ij}(P, Q) \bar{u}_j(Q) d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} \bar{U}_{ij}(P, Q) \bar{t}_j(Q) d\Gamma, P \in \Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

ただし,  $r = |PQ|$  である。なお, 基本解  $\bar{U}_{ij}, \bar{T}_{ij}$  の具体形は 2 次元問題の場合それぞれ次式となる。

$$\bar{U}_{ij} = \frac{1}{2\pi\mu} [\psi \delta_{ij} - \chi e_i e_j] \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij} = & \frac{1}{2\pi} \left[ (c_0^2 - 2) \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) e_i n_j \right. \\ & - 2 \left( \frac{\chi}{r} \right) e_i n_j \\ & + \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{\chi}{r} \right) \left( \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ji} + n_i e_j \right) \\ & \left. + 2 \left( 2 \frac{\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr} \right) \frac{\partial r}{\partial n} e_i e_j \right] \end{aligned} \quad (6)$$

ただし,

$$(e_1, e_2) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \psi = \phi_2 = & -\frac{1}{c_0^2} \frac{K_1(\alpha_1 r)}{\alpha_1 r} \\ & + \left\{ K_0(\alpha_2 r) + \frac{K_1(\alpha_2 r)}{\alpha_2 r} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\chi = \phi_2 - \phi_1 = -\frac{1}{c_0^2} K_2(\alpha_1 r) + K_2(\alpha_2 r) \quad (9)$$

$$\alpha_1 = \frac{\kappa}{c_0} \quad (10)$$

$$\alpha_2 = \kappa \quad (11)$$

であり,  $K_n(z)$  は第二種変形 Bessel 関数である<sup>(7)</sup>. また  $c_0$  は波動伝播速度比を表し,

$$\kappa = \begin{cases} \frac{1-2\nu}{1-\nu} & \text{(Plane Strain)} \\ 1-\nu & \text{(Plane Stress)} \end{cases} \quad (12)$$

を用いて,

$$c_0 = \frac{c_L}{c_2} = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \quad (13)$$

と表される. ここで  $c_L$  は縦波,  $c_2$  は横波の弾性波速度であり,

$$c_L = \begin{cases} c_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} & \text{(Plane Strain)} \\ c_3 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{2}{1-\nu}} & \text{(Plane Stress)} \end{cases} \quad (14)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (15)$$

と定義される. なお, 本論文では第二種変形 Bessel 関数を吉田ら<sup>(8)(9)</sup>に従い計算した.

式(4)は, 各物理量が Laplace 変換領域で定義されていることを除き, 静弾性問題における境界積分方程式と全く同型であるから, 境界  $\Gamma$  上において変位ないしは表面力が境界条件として与えられれば未知境界物理量について解くことができる. ただし, 得られた数値解はすべて Laplace 変換解であるから, 各物理量の時間変動解を得るには後述のように数値 Laplace 変換を適用する必要がある.

### 3. 数値 Laplace 逆変換

Laplace 変換法に基づく境界要素法では, 像空間解が離散的なデータ列として求められるため, 一般には数値的な Laplace 逆変換が適用される. 本節では, 支配方程式を解

いて得られる Laplace 変換解を数値的に Laplace 逆変換し, 実時間変動解を得る方法について Krings & Waller の方法<sup>(5)</sup>, 細野の方法<sup>(6)</sup>の2つの手法について述べる.

**3.1 Krings & Waller の方法** 数値 Laplace 変換とその逆変換には種々の方法があるが, 最も代表的な手法が高速 Fourier 変換 (Fast Fourier Transform : FFT) を用いる方法<sup>(10)(11)</sup>である. 本論文では理論展開の容易な Krings & Waller<sup>(5)</sup> の数値 Laplace 逆変換を用いるものとし, その手法について以下に概説する.

はじめに, 関数  $f(t)$  の Laplace 変換および逆変換の定義式について以下に示しておく.

$$\bar{f}(\kappa) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-\kappa t) dt \quad (16)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(\kappa) \exp(\kappa t) d\kappa \quad (17)$$

ただし,

$$f(t) = 0 \quad (t < 0) \quad (18)$$

を仮定するものとする. また,  $i$  は虚数単位である.

ここで, Laplace 変換パラメータ  $\kappa$  を  $\kappa = \gamma + i\omega$  ( $\gamma = \text{const}$ ) と書き換えたのち, 式(16)および式(17)に代入すれば, それぞれ次式に帰着する.

$$\bar{f}(\kappa) = \int_0^{\infty} [f(t) \exp(-\gamma t)] \exp(-i\omega t) dt \quad (19)$$

$$f(t) = \exp(\gamma t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\gamma + i\omega) \exp(i\omega t) d\omega \right] \quad (20)$$

よって, Laplace 変換(19)および逆変換(20)は Fourier 変換を用いて計算し得ることになる.

時間  $0 \leq t \leq T$  の範囲を解析対象の時間範囲とし, サンプリング数  $N_p$  で離散化する.  $t \geq T$  において  $f(t) = 0$  であるとすれば, サンプリングの定理により  $\Delta t$  および  $\Delta \omega$  は次式のように定められる.

$$\Delta t = \frac{T}{N_p}, \quad \Delta \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (21)$$

最終的に離散 Fourier 変換を用いた Laplace 変換対の定義式が以下のように得られる.

$$\begin{aligned} \bar{f}_n &= \bar{f}(\gamma + in\Delta\omega) \\ &= \frac{T}{N_p} \sum_{k=0}^{N_p-1} \left[ f(k\Delta t) \exp(-\gamma k\Delta t) \right] \exp\left(-\frac{2\pi ink}{N_p}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} f_k &= f(k\Delta t) \\ &= \frac{1}{T} \exp(\gamma k\Delta t) \sum_{n=0}^{N_p-1} \left[ \bar{f}(\gamma + in\Delta\omega) \right] \exp\left(\frac{2\pi ink}{N_p}\right) \end{aligned} \quad (23)$$

以上のように, Laplace 変換対は Fourier 変換型に書き換えられ, 高速 Fourier 変換 (FFT) のアルゴリズムによって高速な演算が可能となる. よって式(23)の右辺  $\bar{f}_n : n =$

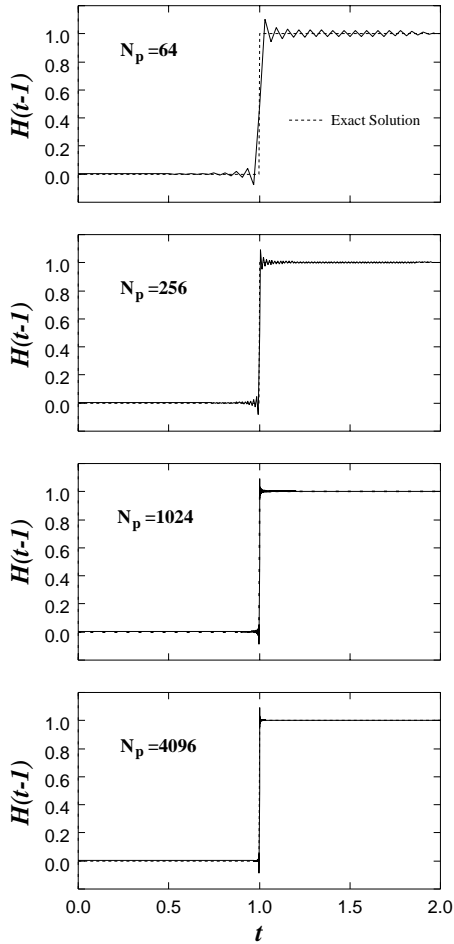


Fig.1 Numerical results by the inverse Laplace transform with Krings & Waller's method (Test function :  $f(t) = H(t-1)$ , broken line is exact solution)

$0, \dots, N_p - 1$  の  $N_p$  個の像空間解から,  $N_p$  個の時系列データ  $f_k$  を計算することができる.

ここで, 時間に関してステップ上に变化する関数  $H(t-1)$  の Laplace 変換  $\exp(-\kappa)/\kappa$  に対し, Krings & Waller の数値 Laplace 逆変換を適用した場合の結果を示す. なお,  $T = 2$ ,  $\gamma = 6/T$  とした. なお, 足立ら<sup>(12)</sup>, 井上ら<sup>(13)</sup>によれば, 収束座標  $\gamma$  は関数形やサンプリング数などにより概ね  $3/T \sim 9/T$  の間に最適値があると述べているが, 本論文ではすべて  $\gamma = 6/T$  として計算を行なっている. サンプリング数  $N_p$  を 64, 256, 1024, 4096 の 4 通りに变化させた場合の結果を Fig.1 に示す. 関数値が急激に変化する点 ( $t = 1$ ) において若干の誤差が認められるものの, サンプリング数の増加に伴い速やかに正解に収束することがわかる.

**3.2 細野の方法** 逆変換の定義式 (17) に含まれる指数関数  $\exp(z)$  に対し次式の近似を適用する.

$$\exp(z) \cong E_{ec}(z, \gamma_1) = \frac{\exp(\gamma_1)}{\cosh(\gamma_1 - z)} \quad (24)$$

ただし,  $\gamma_1$  は任意の定数であり, 本論文の計算では  $\gamma_1 = 4.0$  とした. 上式を級数展開すると次式に帰着する.

$$E_{ec}(z, \gamma_1) = \frac{\exp(\gamma_1)}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{z - \{\gamma_1 + i(n-1/2)\pi\}} \quad (25)$$

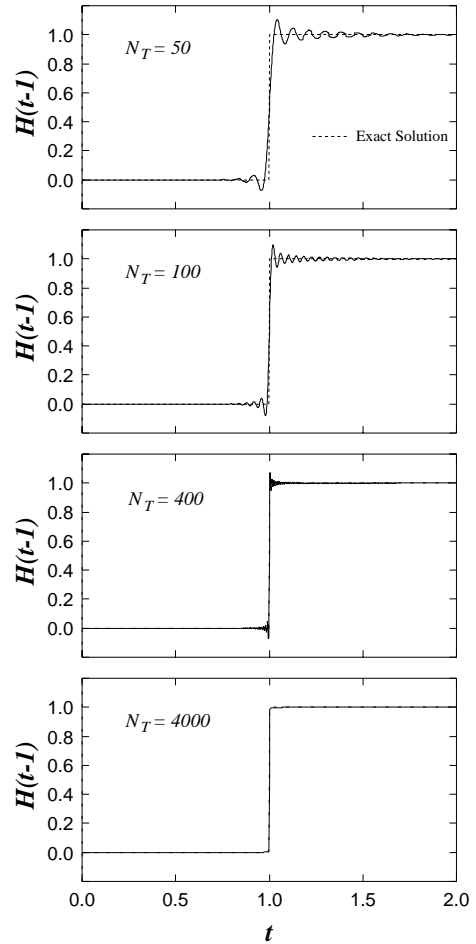


Fig.2 Numerical results by the inverse Laplace transform with Hosono's method (Test function :  $f(t) = H(t-1)$ , broken line is exact solution)

式 (25) を式 (17) に代入すれば次式となる.

$$f(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(s) E_{ec}(st, \gamma_1) ds \quad (26)$$

上式の複素積分を評価すれば次式を得る.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{i}{2t} \sum_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} i(-1)^{n+1} \bar{f}\left(\frac{\gamma_1 + i(n-1/2)\pi}{t}\right) \\ &= \frac{\exp(\gamma_1)}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{Im} \left[ \bar{f}\left(\frac{\gamma_1 + i(n-1/2)\pi}{t}\right) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

実際の数値計算では上式の無限級数を有限項で打ち切って計算することになるが, 収束解を得るためには極めて多くの項数が必要である. そこで, 級数の収束性を加速するため, 式 (27) に Euler 変換を適用する<sup>(14)</sup>. Euler 変換は級数における各項の符号が交互に変わる場合に有効な方法であることが知られている. Euler 変換の適用により, 式 (27) は以下のように書き換えられる.

$$f(t) = \frac{\exp(\gamma_1)}{2} \left( \sum_{n=1}^{k-1} F_n + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{\mu} A_{\mu,\nu} F_{k+\nu} \right) \quad (28)$$

ただし,  $N$  を打ち切り項数とすれば,  $k = N - \mu$ , また  $\mu$  は任意の自然数である. なお, 本論文では  $\mu = 6$  とした.  $\mu = 6$  の場合について式 (28) の右辺括弧内の第 2 項を具体的に示せば次式となる.

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\nu=0}^6 A_{\mu,\nu} = \frac{1}{128} \left( 127F_k + 120F_{k+1} + 99F_{k+2} + 64F_{k+3} + 29F_{k+4} + 8F_{k+5} + F_{k+6} \right) \quad (29)$$

ここで, 上式の  $F_n$  は,

$$F_n = (-1)^n \text{Im} \left[ \bar{f} \left( \frac{\gamma_1 + i(n-1/2)\pi}{t} \right) \right] \quad (30)$$

で定義される.

以上のように, 細野の方法では  $t = 0$  の場合を除き, 任意の時刻  $t$  における関数  $f(t)$  を計算することができる. なお, この手法は前述の Krings & Waller の方法と異なり, 各々の時刻における関数値  $f(t)$  が独立に計算される点に注意されたい.

ところで, 細野の方法ではパラメータ  $\kappa$  を

$$\kappa = \frac{\gamma_1 + i(n-1/2)\pi}{t}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (31)$$

として計算するため, 時間  $t$  が相対的に大きくなるに従い, Laplace 変換パラメータの増分が小さくなる. 従って時間  $t$  の増加とともに適宜打ち切り項数  $N$  を増やす必要がある. そこで計算においては各々の時刻における打ち切り項数を,

$$N = N(t) = \frac{tN_T}{T}, \quad (0 \leq t \leq T) \quad (32)$$

とし,  $t = T$  における最大項数  $N_T$  を基準として時刻の変化に応じて線形的に変化させた. ただし打ち切り項数は最低でも  $\mu (=6)$  の値より大きく設定する必要があるため, 最低項数は 10 として計算を行っている.

Fig.2は先の計算結果と同様に, ステップ状に変化する関数  $H(t-1)$  の Laplace 変換  $\exp(-\kappa)/\kappa$  に対し, 細野の方法に従って逆変換を行った例である. なお, 最大項数  $N_T$  を 50, 100, 400, 4000 の 4 通りに変化させた場合の結果を示した. この例のように急激な関数変化を伴う場合には, 実用上 100 以上の項数が必要であると思われる.

#### 4. 数値計算例

一般に Krings & Waller の方法ではサンプリング数を増加させるに従い, また細野の方法では各時刻における収束項数を増加させるに従い数値誤差が小さくなり, 正解に収束する. しかしながら座標と時間の両者を離散化する数値解法では, 要素分割や時間増分などの離散化パラメータを適切に選ばなければ精度の高い数値解が得られないことが知られている. 例えば差分法の場合では一般に以下の安定条件式が用いられる.

$$\frac{c\Delta t}{\Delta X} \leq 1.0 \quad (33)$$

ただし,  $\Delta t$  は時間増分,  $\Delta X$  は差分格子間隔,  $c$  は弾性波動速度である.

他方, Laplace 変換法に基づく境界要素法において, Coleら<sup>(15)</sup>は以下のような安定条件式を示している.

$$\beta = \frac{c\Delta t}{\Delta L} \geq \frac{1}{2} \quad (34)$$

ただし, 上式の  $\Delta L$  は一定要素での離散化における要素長である.

ここでは, まずはじめに Krings & Waller の方法を適用した場合の境界要素プログラムについて解析結果を示し, 安定した数値解を得るための条件について考察する. 解析モデルは Fig.3 に示すような帯板の縦衝撃問題であり, 矩形波を発生させるために Poisson 比は 0 とした. 密度関数に対して 2 次非適合要素, 座標に対して 2 次適合要素を用い, 要素数を 20 と 40 の 2 通りとし, すべて等間隔で分割した.

要素数 20 および要素数 40 の場合の解析結果を Fig.4 および Fig.5 にそれぞれ示す. グラフは図中の点 D における応力  $\sigma_1$  の時間変動について, 解析時間  $T = 10$  と一定値とし, サンプリング数  $N_p$  をそれぞれ 4 通りに変化させて時間変動解の挙動をみたものである. 要素数 20 の場合は  $N_p = 2^7 = 128$ , 要素数 40 の場合は  $N_p = 2^8 = 256$  の場合に最も良好な精度の解を得ており, 両者ともそれ以上にサンプリング数を増加させると解が発散することがわかる.

先の式 (34) に従い, 安定条件のパラメータ  $\beta$  について考える. 要素数を倍加させた場合に最適なサンプリング数も倍となっていることから,  $\beta$  の値は

$$\beta = \frac{c_1\Delta t}{\Delta L} = 1.875 \quad (35)$$

となる. この結果より, 概ね以下の条件式を満たすよう  $\Delta t$  ならびに節点間距離  $\Delta L$  を決定すればよいと考えられる.

$$\beta = \frac{c_1\Delta t}{\Delta L} \geq 2 \quad (36)$$

この解析例の場合には縦波のみが生じるため, 波動速度  $c$  を縦波として安定条件を考えるだけでよいが, 本来は横波の伝播による安定条件についても同時に考慮することが望ましい. また, 一般の解析では要素長が必ずしも一定で

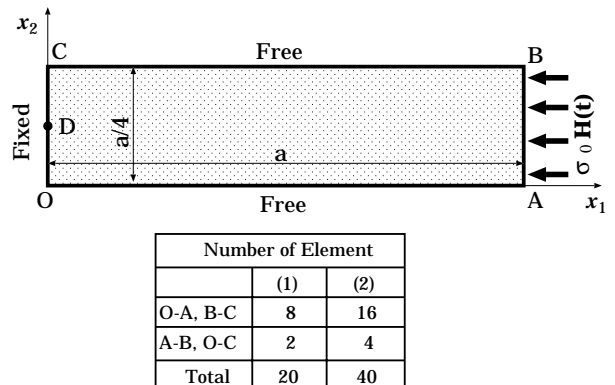


Fig.3 Model of analysis : 2-dimensional elastic body

Table 1 Results of CPU time of computation (Krings & Waller :  $N_p = 256$ , Hosono :  $N_T = 300$ )

	CPU Time [min]
Krings & Waller	29[min]
Hosono	6496[min]

はないことに留意する必要がある。

次に同様の解析モデルについて細野の方法の数値結果を示す。 $\gamma_1 = 4$ ,  $\mu = 6$  とし, 要素数 20 の解析に対して  $\Delta\tau = c_1\Delta t/a = 0.1$ (100 点), 要素数 40 の解析に対して  $\Delta\tau = c_1\Delta t/a = 0.05$ (200 点) とした. 打ち切り項数  $N$  については  $\tau_{max} = c_1t_{max}/a = 10$  における項数  $N_T$  を基準として式 (32) に従って与えた.

打ち切り項数  $N_T$  をそれぞれ 4 通りに変化させた場合の結果について, 要素数 20 の場合の解析結果を Fig.6 に, 要素数 40 の場合の解析結果を Fig.7 にそれぞれ示す. 要素数 20 の場合についてみれば,  $N_T = 75$  と  $N_T = 150$  の場合の解はほとんど同レベルの精度の解が得られており, それ以上に項数を増加させると解が発散する. この傾向は先の Krings & Waller の FFT による方法と極めて類似の傾向である. 他方, 要素数 40 の場合については,  $N_T = 150$  と  $N_T = 300$  の場合の解がほぼ同程度の精度で得られており,  $N_T$  の最適値は 概ね 200 前後であると考えられる.

以上の結果より細野の方法における安定条件について以下の条件式が提案される.

$$\beta = \frac{c_1t}{\Delta LN(t)} \geq 2 \quad (37)$$

時刻  $t$  における打ち切り項数について整理すれば,

$$N(t) \geq \frac{c_1t}{2\Delta L} \quad (38)$$

と書ける. ちなみに, 上式に従って 要素数 20 の場合の  $\tau = c_1t/a = 10$  における打ち切り項数  $N_T$  を求めれば 120 となる.

ところで, 上述の安定条件式 (37) における  $t/N(t)$  を  $\Delta t$  と置き換えると Krings & Waller の方法において得られた安定条件式 (36) の場合と同型となり, さらにはパラメータ  $\beta$  の最適値は等しく 2 であることに気づく. これらの結果から判断しても, 両者の解法において得られた安定条件式およびパラメータ  $\beta$  の値は, ほぼ妥当であるものと判断できる.

最後に, 細野の方法と Krings & Waller の方法の両者の場合について, 解析時間 (CPU Time) の比較を行った. 要素数を 40 とし, 細野の方法については  $N_T = 300$  の場合, また Krings & Waller の方法については  $N_p = 256$  の場合の CPU Time を Table 1 に示した. 両者の結果とも, 全節点物理量の時間変動解すべてを得るまでの演算時間を計測している. なお, 計算機には日本電算機 (株) JU1/170 (Sun Ultra Sparc 互換機) を使い, Solalis 2.5.1 上の Fortran コンパイラ (Sun Fortran Ver.4.0) を使用した.

## 5. 結 論

本論文では 2 次元動弾性問題に対する境界要素法の定式化について, Krings & Waller の方法, 細野の方法の 2 種の数値 Laplace 逆変換法を適用し, その結果について考察した. 両者の解法ともに離散化における安定条件が存在し, サンプリグ数および打ち切り項数を要素の大きさに応じて決定する必要があることを明らかにした.

Krings & Waller の方法は, 時間後半でリングングによる誤差が生ずることが短所ではあるが, 総じてサンプリグ数の増加に応じて速やかに正解に収束する傾向を有しており, 矩形波のような高次の振動モードを含む Laplace 逆変換にも向く方法である. また細野の方法に比べても演算は圧倒的に速いため, サンプリグ数に応じて適宜要素分割数を増やすといった対処がしやすく, Laplace 変換と Laplace 逆変換が可逆的な演算として対の形で定義されるため, 実験解析で得られるデータを数値 Laplace 変換した上で用いるといった場合にも対応が容易であるといえる.

細野の方法はそれぞれの時刻に対して演算が定義されているため, 本来は時刻毎に適切な Laplace 逆変換を施すことが可能な方法である. しかしながら, 本論文で比較した範囲では, リングングの有無を除いて Krings & Waller の方法と比べても大きな優位性は認められず, むしろ極めて長い計算時間を要するというデメリットが目立つ結果となっている. ただし, 今回の数値計算例のように時間変動解を求めるのではなく, 特定の時刻における応力分布を求めるといった場合には, 細野の方法の利点が生かされるものと思われる.

## 参 考 文 献

- (1) Arai, M., Adachi, T. and Matsumoto, T., *JSME International Journal(A)*, **40**-1, (1997), 65-74.
- (2) 松本・足立・角濱・福沢, 機論 (A), **54**-501, (1988), 1024-1029.
- (3) 田中・中村・青樹・松本, 機論 (A), **58**-549, (1992), 738-744.
- (4) 荒井・中山・足立・松本, 機論 (A), **61**-581, (1995), 161-168.
- (5) Krings, W. and Waller, H., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **14**, (1979), 1183-1196.
- (6) 細野, 電気学会論文集 (A), **99**-10, (1979), 44-50.
- (7) Abramowitz, M. and Stegun I. A., (Eds), *Handbook of Mathematical Functions*, 9th Edn, (1972), Dober Pub., New York.
- (8) 吉田・浅野・梅野・三木, 情報処理, **14**-1, (1973), 23-29.
- (9) 吉田・二宮, 情報処理, **14**-8, (1973), 569-575.
- (10) Wilcox D. J. and Gibson I. S., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **20**, (1984), 1507-1519.
- (11) Durbin, F., *The Computer Journal*, **17**-4, (1974), 376
- (12) 足立・宇治橋・松本, 機論 (A), **55**-519, (1989), 2271-2276.
- (13) 井上・上林・岸本・渋谷, 機論 (A), **57**-542, (1991), 2523-2528.
- (14) Pipes L. A. and Harvill L. R., *Applied Mathematics for Engineers and Physicists, Third Edition*, McGraw-Hill, (1970), 34-37.
- (15) Cole, D., M., Kosloff, D., D. and Minster, J. B., *Bulletin of the Seismological Society of America*, **68**-5, (1978), 1331-1357.

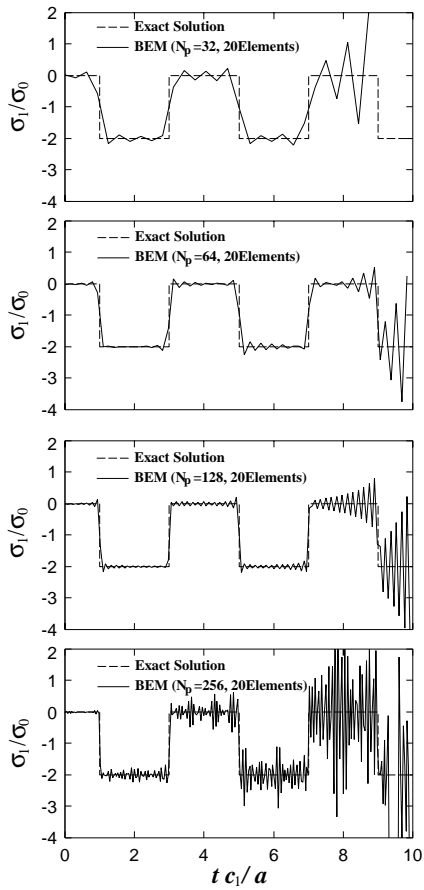


Fig.4 History of Stress  $\sigma_1$  at point D  
(Krings & Waller's Method, 20 Elements)

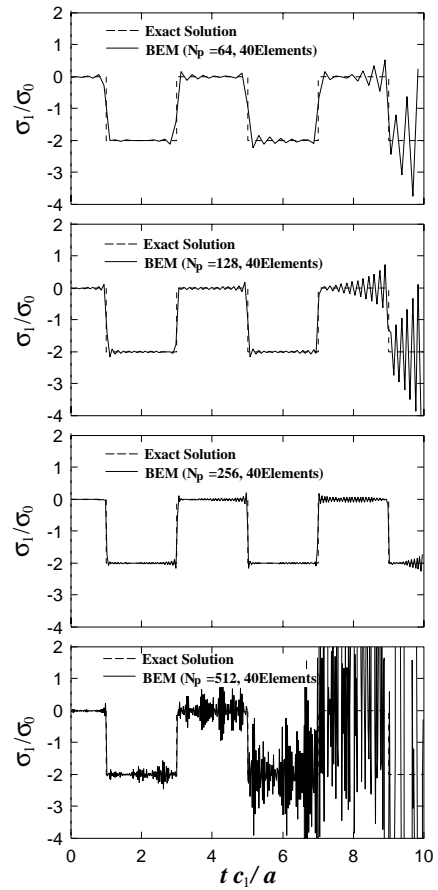


Fig.5 History of Stress  $\sigma_1$  at point D  
(Krings & Waller's Method, 40 Elements)

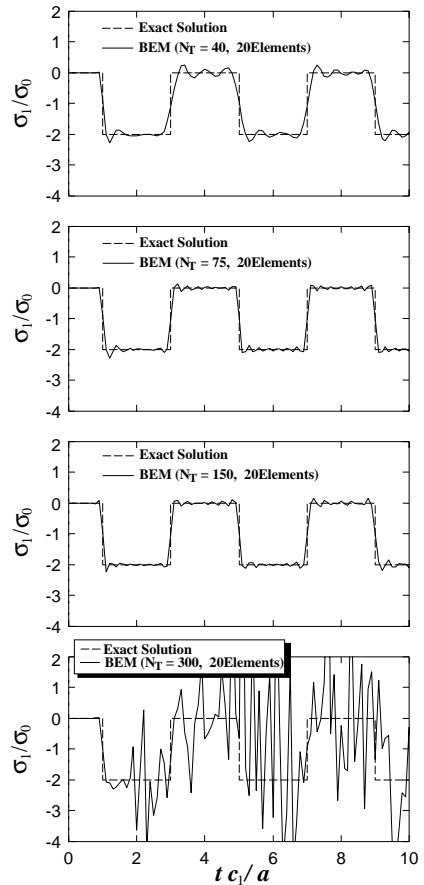


Fig.6 History of Stress  $\sigma_1$  at point D  
(Hosono's Method, 20 Elements)

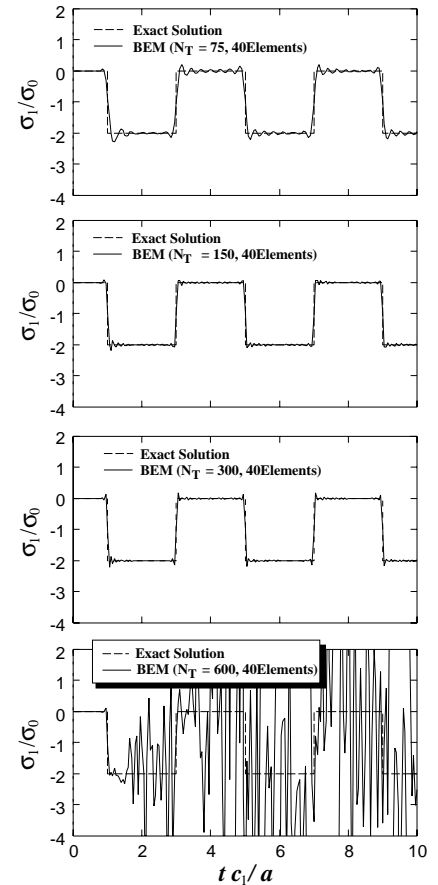


Fig.7 History of Stress  $\sigma_1$  at point D  
(Hosono's Method, 40 Elements)