計算数理工学論文集　Vol.1(2001 年 7 月)，論文 No. 01_070609　JASCOME

Javaによる境界要素法プログラム開発の試み

Development of BEM Code Based on Java

松本　敏郎 [1)]，田中　正隆 [2)]

Toshiro MATSUMOTO and Masataka TANAKA

1) 信州大学工学部機械システム工学科　(〒 380-8553　長野市若里 4-17-1,　E-mail: toshiro@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
2) 信州大学工学部機械システム工学科　(〒 380-8553　長野市若里 4-17-1,　E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)

Java is used to develop a boundary element code for two-dimensional potential problems. In the boundary element method, the coefficient matrix of the final system of linear algebraic equation is calculated by repeating the evaluation of the boundary integral over each element for a collocation point of the fundamental solution. Since these integrations can be evaluated independently, the boundary element method is suitable for distributied parallel computation. Java is an object-oriented programing language with various class libraries for network computing and its message passing is used for developing a boundary element code in which evaluation tasks for boundary integrals are distributed to sub-programs running on PCs connected through the internet.

Key Words: Boundary Element Method, Java, Distributed Computing, Potential Problem

1. 緒言

境界要素法は，線形の問題においては境界だけの要素分割で解析することができるために，要素分割のコストが低いという利点を有している．しかしながら最終的に解くべき連立方程式の係数行列が密行列になるとともに，係数行列の作成のための各要素ごとの数値積分に大きな計算時間を要するという問題点も存在し，特に大規模な問題の解析においてはこの点がクリティカルになっている．そのため，積分は一定要素を用いて解析的に評価し，連立方程式の解法に反復法と高速多重極展開法を用いて記憶容量と計算時間を減らす方法 [(1)(2)] や，Wavelet を用いて係数行列を圧縮する方法 [(3)(4)] などが検討されている．これに対して有限要素法では，領域を分割し反復解法と並列計算機環境を用いた並列計算により大規模な問題を解析する方法 [(5)(6)] が検討されている．

本研究では，境界要素法の並列計算の試みとして，プログラミング言語に Java を用い，境界要素法で計算時間を要する境界積分による係数行列の作成部分の並列化を試みた．PC クラスター間の並列計算には Fortran や C に，PVM や MPI のような並列数値計算ライブラリを用いる方法が現在主流である．一方，Java はオブジェクト指向言語であるとともに，ネットワークコンピューティングのための通信機能や分散オブジェクト構築の機能が予め備わっており，計算速度も近年向上している．また，プログラムの容易さや異なる OS 間での移植性の良さ，充実したユーザーインターフェイスのクラスライブラリ，WWW ブラウザとの相性の良さを考えると，Java によるネットワークを利用した数値計算の可能性について基礎的検討を加えておくことは有益であると考えられる．そこで本研究では，Java による並列計算の試みとして，2 次元ポテンシャル問題に対して，境界要素法の係数行列作成における各要素ごとの数値積分のタスクを分割し，PC 間のメッセージパッシングを利用して並列計算を行う境界要素法プログラムを開発した．

2. 境界要素法の理論

境界要素法で用いる境界積分方程式は，ポテンシャル問題においては次のように書くことができる．

$$cu(y) + \int_\Gamma q^*(x,y)u(x)\,d\Gamma_x = \int_\Gamma u^*(x,y)q(x)\,d\Gamma_x, \quad y \in \Gamma \tag{1}$$

ただし，u，q はそれぞれポテンシャルとフラックス，Γ は解析対象の境界，c は点 y が位置している境界の形状によって決まる定数で滑らかな境界では 1/2 である．また，u^* と q^* はそれぞれ Laplace 方程式の基本解と基本解に対応するフラックスであり，2 次元問題の場合は以下のように与えられる．

$$u^* = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} \tag{2}$$

$$q^* = \frac{-1}{2\pi r}\frac{\partial r}{\partial n} \tag{3}$$

ここで，r は境界上の 2 点 x，y 間の距離，n は境界の外向き法線方向である．

式 (1) は，境界上のポテンシャルとフラックスのみを関係づける方程式となっている．式 (1) を近似的に解くために，境

界を M 個の要素に分割して，要素ごとに積分を評価することにすると，式 (1) は次のように書くことができる．

$$cu(y) + \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j} q^*(x,y)u(x)\,d\Gamma_x = \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j} u^*(x,y)q(x)\,d\Gamma_x \tag{4}$$

さらに，要素の形状および要素内のポテンシャルとフラックスの変化を，要素内にいくつか設けた節点値と内挿関数によって補間し，各要素ごとの積分を評価すると，式 (4) は次のような代数方程式に帰着する．

$$cu_i + \sum_{j=1}^{N} h_{ij}u_j = \sum_{j=1}^{N} g_{ij}q_j \tag{5}$$

ただし，u_j と q_j はそれぞれポテンシャルとフラックスの節点 j における節点値，N は全節点数である．各節点において u_j, $(j = 1, \cdots, N)$ と q_j, $(j = 1, \cdots, N)$ のいずれか一方は境界条件として与えられるから，節点値の未知量は N 個となる．一方，式 (5) の節点 i の取り方は N 通りあるから，N 個の未知量に対して N 個の式を作ることができ，最終的に次のような連立方程式を得ることができる．

$$\begin{bmatrix} c+h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & c+h_{22} & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & c+h_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \tag{6}$$

式 (6) に境界条件を適用して未知節点値を左辺に移項すると，最終的に次の形の連立方程式を得ることができる．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix} \tag{7}$$

式 (7) の係数行列は，非零成分からなる非対称密行列となっている．

式 (7) を解くことにより，境界上のすべての節点のポテンシャルとフラックスが求まる．

領域内部の点のポテンシャルは，次の Green の公式を用いて計算される．

$$u(y) = \int_{\Gamma} u^*(x,y)q(x)\,d\Gamma_x - \int_{\Gamma} q^*(x,y)u(x)\,d\Gamma_x, \quad y \in \Omega \tag{8}$$

ただし，Ω は領域である．式 (8) の評価には，式 (4) に用いた要素分割と内挿関数を利用すればよい．境界要素法の解析の流れをフローチャートにすると Fig. 1 のようになる．

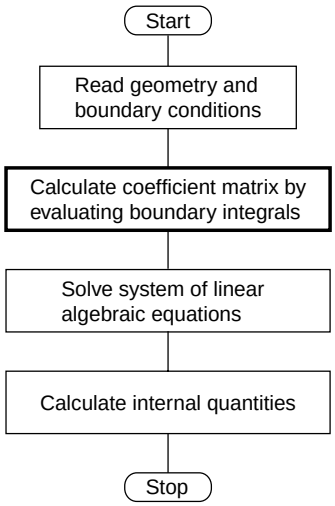

Fig. 1　Calculation flow of BEM

本研究では，Fig. 1 の流れに従って Java によりプログラムを開発し，境界要素法の計算で特に時間を要する，図の太枠の部分を Java の実行環境が実装された PC クラスタで並列計算が行えるように分散化する．

3. Java による BEM コードの開発

Java はオブジェクト指向言語であり，境界要素法の計算で用いる節点座標，要素，境界条件コード，境界条件値などのデータ，および境界の外向き単位法線ベクトル，選点と境界上の点の距離，基本解の値，要素に対応する境界積分値の計算などのメソッドからなるクラスを定義し，これらのオブジェクトをクライアント間に分散させて並列計算を行うように作ることができる [7] が，本研究ではより低レベルの Socket と入出力ストリームを用いたメッセージパッシングによる開発を試みた．

式 (6) の行列の中身は，Fig. 2 に示すように式 (4) の基本解のソース点 y_i と積分対象の要素だけから計算できる量である．

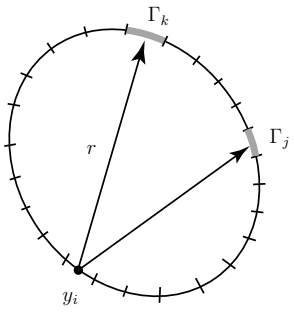

Fig. 2　Source point and elements for integration

ここでは，Fig. 3 に示すように積分を評価すべき要素の集まりをホストプログラムがいくつかのグループに分割し，それぞれの積分を別々の計算機に実装されたクライアントプログラムで並列に評価することにした．なお，それぞれの要素グループごとに，境界上のすべてのソース点に対して積分を

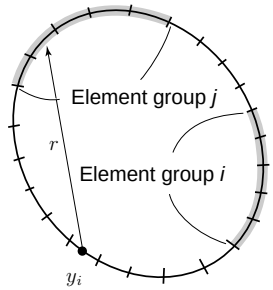

Fig. 3　Decomposition of elements

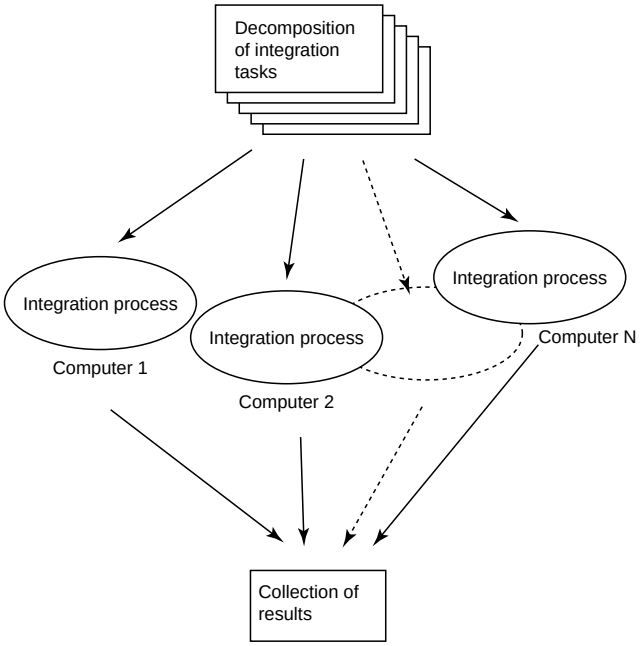

Fig. 4　Decomposition of integration tasks and assignments to client machines

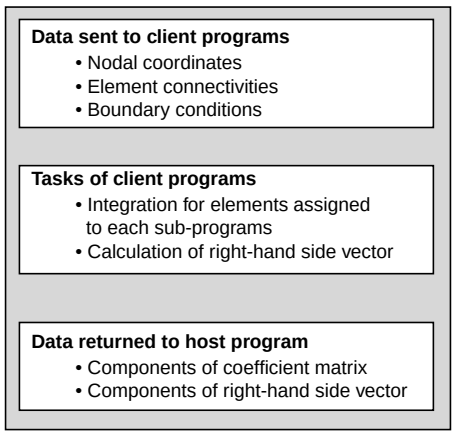

Fig. 5　Data exchanged between host and clients

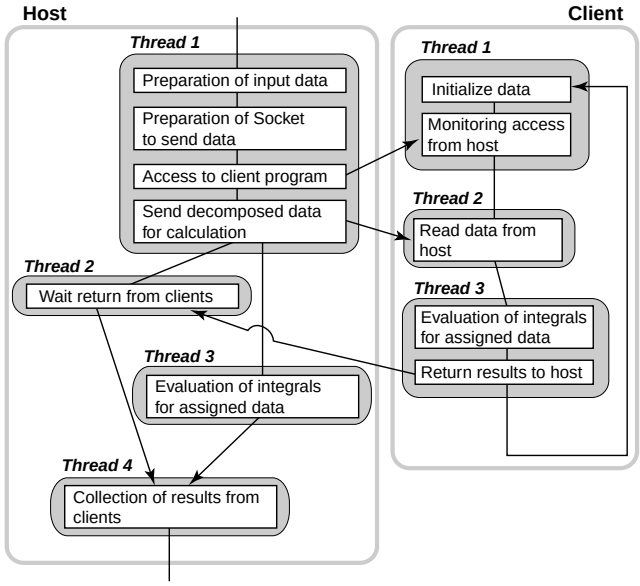

Fig. 6　Communication between the host and a client

計算するものとした．積分の計算の終了後，ホストプログラムがその結果を集めて連立方程式を解く作業に進む．この作業のプログラムの流れを Fig. 4 に示す．また，ホストプログラムとクライアントプログラムの間でやりとりするデータを Fig. 5 にまとめて示す．

ホストプログラムは，入力データをすべて読み込んだ後，以下の手順で処理を実行する．

1. 要素をグループ化する．
2. データ送信のために Socket の準備をし，インターネットに接続された各コンピュータ上のクライアントプログラムにアクセスし，計算に必要なデータを送信し，別のスレッドでクライアントからの返送を監視する．
3. クライアント数が少ない場合は，別のスレッドでホストプログラム自身も一部の要素グループについて計算を実行する．
4. クライアントプログラムは，ホストプログラムからのアクセスを監視し，アクセスが発生したら別のスレッドでメインプログラムからデータを受け取る．
5. データを受け取ったクライアントプログラムは必要な計算を行った後に，ホストプログラムの監視スレッドに計算結果を返送する．
6. 監視スレッドがすべての計算結果を回収した後，連立方程式を解くメソッドに進む．

以上の処理を図示すると，Fig. 6 のようになる．個々の計算は各クライアントプログラム毎に並列に実行される．その様子は Fig. 7 のように示すことができる．

4. 解析例

開発したプログラムによる解析例として，Fig. 8 に示すような厚肉円筒断面の定常熱伝導問題を，1/4 領域について 2 次アイソパラメトリック要素で 1000 節点と 2000 節点に分割して解析した．計算機には Apple Computer 社製の iMac (PowerPC G3, 400MHz) を用い，スタンドアローンまたは 2〜5 台を 100BASE-TX で接続して使用した．プログラムは，Symantec 社製のコンパイラでバイトコードに最適化して変換したものを用いた．また，積分の評価終了後の連立方程式

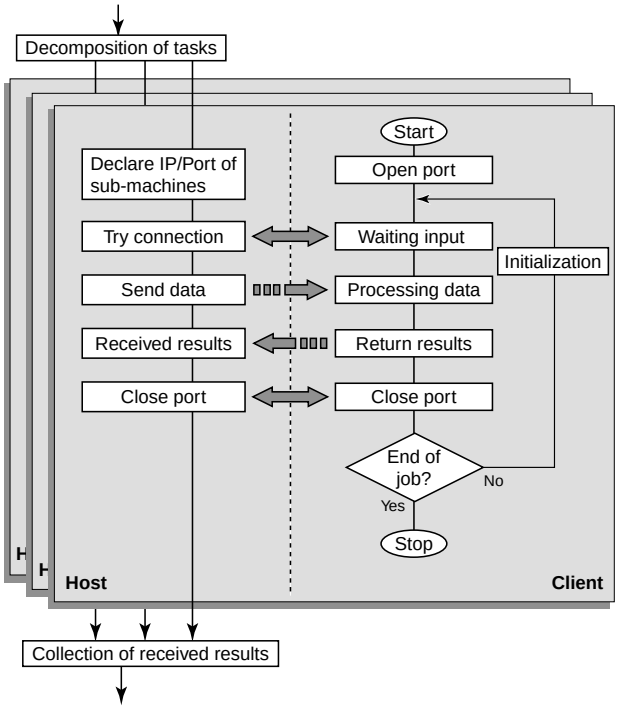

Fig. 7　Parallel processing among clients

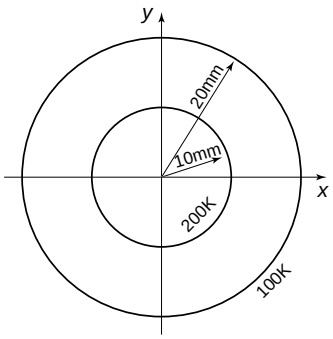

Fig. 8　Steady-state heat conduction problem for a cross section of thick-walled cylinder

は GMRES[8] を用いて解いた．2 台の計算機で並列計算を実行した場合について，ホストプログラムが担当する要素グループの割合を横軸に，スタンドアローンに対する並列計算の計算時間の割合を縦軸にプロットしたものを Fig. 9 に示す．

また，Fig. 10 には，PC の数に対する計算時間の比をプロットしたものを示す．Fig. 10 で PC 数に対して計算時間の低減の効果が小さくなってきているのは，連立方程式を解く部分はホスト 1 台で行っているためであると考えられる．

5. 結言

Java を用いて 2 次元ポテンシャル問題に対する境界要素法コードの開発を試みた．境界要素法において，特に並列化に適している要素毎の境界積分の部分を，インターネット上に接続された複数のコンピュータに分散して並列計算ができるようにした．今後，最終的に連立方程式を解いて解を求める部分を並列化し，計算効率を上げる必要がある．

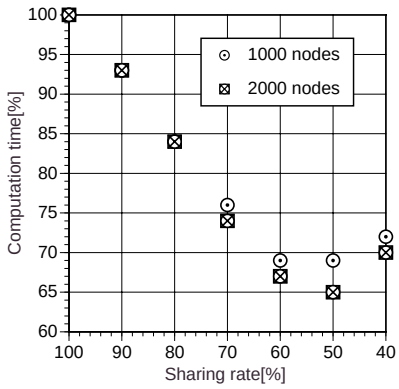

Fig. 9　Computation time versus sharing rate

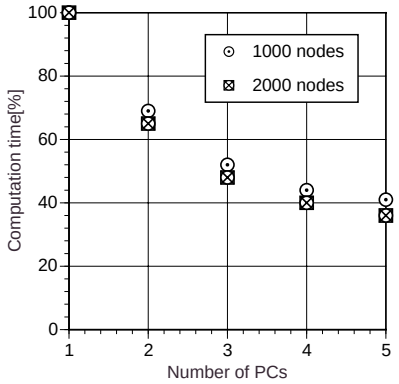

Fig. 10　Computation time versus number of PCs

参考文献

(1) 西田徹志, 速水謙：高速多重極展開法による 3 次元境界要素法の高速化, 計算工学講演会論文集, **1**(1997) pp. 315–318.

(2) 高橋徹, 浪江雅幸, 西村直志, 小林昭一：多重極積分方程式による 3 次元定常 Stokes 流の解析, BTEC 論文集, **10**(1999) pp. 1–4.

(3) 紅露一寛, 阿部和久：Wavelet 境界要素法における反復解法の有効性, 境界要素法論文集, **16**(1999) pp. 57–62.

(4) 吉川仁, 西村直志, 小林昭一：Wavelet 積分方程式を用いた 3 次元クラック問題の高速解法, 境界要素法論文集, **16**(1999) pp. 63–68.

(5) 山田知典, 矢川元基：ノルム前処理付き共役勾配法による有限要素解析, 日本計算工学会論文集, http://homer.shinshu-u.ac.jp/jsces, Paper No.20010033(2001)

(6) 柄谷和輝, 奥田洋司, 矢川元基：大規模有限要素解析における AMG ソルバーの性能評価, 日本計算工学会論文集, http://homer.shinshu-u.ac.jp/jsces, Paper No.20010022(2001)

(7) Jim Farley, 小俣裕一 (監訳), JAVA 分散コンピューティング, (1998), オライリー・ジャパン

(8) 藤野清次, 張紹良, 反復法の数理, (1996), 朝倉書店