様々なプラントル数の流体による対流熱伝達の数値解析

COMPUTATIONAL STUDY OF CONVECTIVE HEAT TRANSFER AT VARIOUS PRANDTL NUMBERS

後藤 孝宣，鈴木 正昭

Takanobu GOTO and Masaaki SUZUKI

東京工業大学大学院理工学研究科化学工学専攻
〒 152-8552 目黒区大岡山 2-12-1，E-mail:tgoto@chemeng.titech.ac.jp

Convective heat transfer in incompressible laminar flow is numerically studied. Special attention is paid to convection-dominated heat transfer. A scheme for discretization of convection terms of both convection-diffusion and momentum equations, VONOS, is implemented, which is non-oscillatory, peak-preserving, mass-conservative and less diffusive. Two-dimensional convective heat transfer downstream of a backward-facing step for various Prandtl numbers is solved. Even in the range of high Prandtl numbers (10^2 - 10^3) and high Peclet numbers (10^4 - 10^5), numerical solution of high resolution is successfully obtained with moderately fine grids.

Key Words : *Convective Heat Transfer, High Prandtl Number, Convection term discretization, VONOS.*

1　序論

対流熱伝達は様々な工学分野において重要な応用を持つ現象である．例えば近年、コンピュータなどの電子機器には、その小型化のために構成部品のより密な実装が求められているが、それらの部品から発生する熱の除去法として、強制対流熱伝達による方法が簡便で効率的な方法として研究されている [1]．強制対流熱伝達を特徴づけるパラメータはレイノルズ数 Re、プラントル数 Pr およびそれらの積であるペクレ数 Pe である．対流熱伝達において、対流優位である、すなわち高 Re 数の場合および高 Pr 数流体の場合、Pe は大きくなり、対流熱伝達の支配方程式である対流拡散方程式において対流項が拡散項に比べて支配的になる．

一般に対流拡散方程式の対流項の離散化スキームは次のような性質が求められる．(1) 数値解の安定性、(2) 数値解が非現実的な振動を引き起こさない (non-oscillatory)、(3) 数値解の局所有界性 (peak-preserving)、(4) 数値拡散が小さい、(5) 質量、エネルギーの保存性．これらの中で特に熱伝達が対流優位の場合には、数値拡散による見かけ上の熱伝導が本来の熱伝導と比べて無視できなくなることがあるため、数値拡散が小さいスキームが必要とされている．

本論文ではこのような対流優位な熱伝達の場合にも有効な対流拡散方程式の数値解析法を実現するために、non-oscillatory で peak-preserving かつ数値拡散が小さい対流項の離散化スキーム [2] を導入する．この方法で、広い範囲の Pr 数の流体による対流熱伝達を解析し、そのパフォーマンスを検討する．

2　定式化

非圧縮性流体中の対流熱伝達の無次元化された支配方程式は、

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{grad}\ \boldsymbol{u} = -\mathrm{grad}\ p + \frac{1}{Re}\Delta \boldsymbol{u} + f \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{grad}\ T = \frac{1}{Pe}\Delta T \tag{3}$$

と書かれる。ここで、$\boldsymbol{u}, f, T$ はそれぞれ速度ベクトル、外力、温度である.

本研究では (3) の対流拡散方程式の高精度な解析法を確立するために、序論で述べたような望ましい性質をもつ対流項の離散化スキームを導入する．その準備として、スキームの局所有界性を考える．離散化スキームは次の性質をもつとき、局所有界性をもつという（ここでは１次元の場合について述べる）.

「離散化スキームを用いてグリッド I で定義された物理量 ϕ_I を新たに計算または更新するためには（グリッド I の近傍の）いくつかのグリッドで定義された ϕ_j(複数個) が用いられる．これらの ϕ_j に対して

$$\min \phi_j \le \phi_I \le \max \phi_j \tag{4}$$

が成り立つ、すなわち、I の周辺での局所的最大値最小値を超えない.」

次にコントロールボリュームを用いた離散化で得られる対流スキームの局所有界性を考える．今考えるコントロールボリュームは Fig.1 に示したような連続する４個のコントロールボリュームのセルである．i 番目のセルの中心も i と参照することにする．またセル界面を $i-(1/2) = i-1+(1/2), i+(1/2)$, $i+(3/2) = i+1+(1/2)$ で参照する．セル中心 i、セル界面 i+(1/2) における物理量 ϕ をそれぞれ $\phi_i, \phi_{i+(1/2)}$ で表す．スカラー量（本論文では温度）はセル中心で定義されており、対流項の離散化に際して、何らかの方法でセル界面でのスカラー量の値を定める必要がある．ここでは、$i+(1/2)$ での値を定めることを考える．この界面を cf と名付ける (cf は cell face の略)．ベクトル量である速度はセル界面上で定義されており、例えば $u_{i+(1/2)} = u_{cf}$ は既知である．ここで記述を統一的にするために添字に次のような別名をつける (Fig.1 参照).

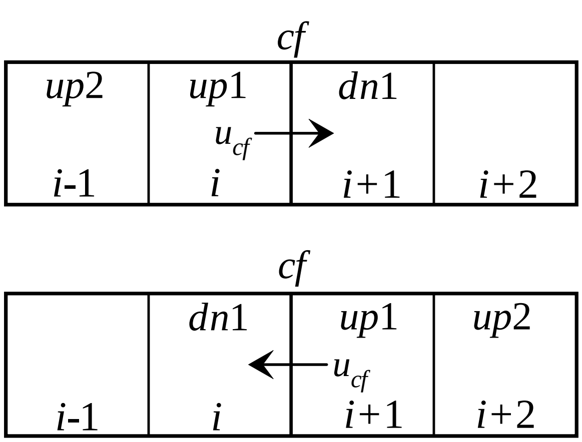

Fig.1 Definitions of grid indices

$u_{cf} > 0$ のとき、

$$\begin{cases} up1 = i \\ up2 = i-1 \\ dn1 = i+1 \end{cases}$$

$u_{cf} < 0$ のとき、

$$\begin{cases} up1 = i+1 \\ up2 = i+2 \\ dn1 = i \end{cases}$$

局所有界性の条件は normalized variable

$$\hat{\phi}_\ell = \frac{\phi_\ell - \phi_{up2}}{\phi_{dn1} - \phi_{up2}} \quad \ell = cf, up1, dn1 \tag{5}$$

を用いて次のように表される [3].

$$\begin{cases} \hat{\phi}_{cf} = \hat{\phi}_{up1} & \text{if } \hat{\phi}_{up1} \le 0 \\ \hat{\phi}_{up1} \le \hat{\phi}_{cf} \le 1 & \text{if } 0 < \hat{\phi}_{up1} < 1 \\ \hat{\phi}_{cf} = \hat{\phi}_{up1} & \text{if } \hat{\phi}_{up1} \ge 1 \end{cases} \tag{6}$$

この条件を満足するスキームとして、Varonos らは次のハイブリッドスキームを定義し、VONOS(variable-order non-oscillatory scheme) と名付けた [2]．なお、ここでは一様なグリッドに対する場合を示した.

$$\hat{\phi}_{cf} = \begin{cases} \hat{\phi}_{up1} & \text{if } \hat{\phi}_{up1} \notin [0,1] \\ 10\hat{\phi}_{up1} & \text{if } 0 \le \hat{\phi}_{up1} \le \frac{3}{74} \\ \frac{3}{8}(1+2\hat{\phi}_{up1}) & \text{if } \frac{3}{74} \le \hat{\phi}_{up1} \le \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\hat{\phi}_{up1} & \text{if } \frac{1}{2} \le \hat{\phi}_{up1} \le \frac{2}{3} \\ 1 & \text{if } \frac{2}{3} \le \hat{\phi}_{up1} \le 1 \end{cases} \tag{7}$$

本論文では方程式 (1),(2),(3) の離散化に、対流項にはこの VONOS を、その他の項には中心差分を用いた．また、時間積分には Euler 陽解法を用いた．流れの方程式 (1),(2) を解くアルゴリズムには fractional step 法 [4]

$$\frac{\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}^n}{\Delta t} + \boldsymbol{u}^n \cdot \mathrm{grad}\ \boldsymbol{u}^n = \frac{1}{Re}\Delta \boldsymbol{u}^n \tag{8}$$

$$\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^{*}}{\Delta t} = -\mathrm{grad}\ p^{n+1} \tag{9}$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}^{n+1} = 0 \tag{10}$$

$$\Delta p^{n+1} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{u}^{*}/\Delta t \tag{11}$$

を用いた．ここで $f = 0$ とした．また、n は時間ステップである．このアルゴリズムの概略は次の通りである．式 (8) から div $\boldsymbol{u}^*$ が求まり、式 (11) から p^{n+1} が求められる．次に式 (9) から $\boldsymbol{u}^{n+1}$ が求められる．圧力 p に関する Poisson 方程式 (11) の解法には SOR を用いた．

3　数値解析例

3.1　バックステップ流れ中の熱伝達

前節で述べた方法で、2 次元非圧縮性流体のバックステップ流れにおける対流熱伝達の解析を行った．解析領域は [5] で取りあげられた領域と同じとし、Fig.2 に示した．ステップの高さ BC を h とし、流入部の高さ FA は $2h$ とした．すなわち、ステップ部の拡大比 (Expansion Ratio) は $2h+h/2h = 1.5$ である．流入部からステップまでの長さ AB は $5h$ とした．この間に、流入した流れは十分発達する．また、ステップから流出部までの長さ CD は $15h$ とした．流出部で流れはやはり十分発達しており、流出部の流れはステップの後方にできる循環流部分に影響を与えない (Fig3 参照)．

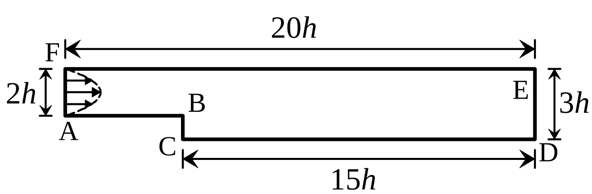

FIG.2 Computational domain

ここでは、[5] で取りあげられているレイノルズ数 $Re = h\bar{u}/\nu = 100$ の場合の流れを解析した．ここで $\boldsymbol{u} = (u, v)$、$\bar{u}$ は流入部 FA における水平方向の平均流速、ν は流体の動粘性係数である．

境界条件として、流れに関しては、流入部 FA では発達した流れ（u は放物線状の速度分布．$Re = 100$ となるように $\bar{u}$ を定めた．また、$v = 0$ である）とし、流出部 DE では自由流出、その他の境界は noslip とした．温度については、FA で $T = 0$、CD で $T = 1$ とし、その他の境界では、

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \tag{12}$$

とした．

初期条件は領域全体で

$$u = v = 0,\ T = 0 \text{ at } t = 0 \tag{13}$$

とした．

領域の離散化は、x 方向、y 方向それぞれについて一様とした．コントロールボリュームのサイズはすべて $\Delta x = h/8, \Delta y = h/16$ とした。また、時間ステップは $\Delta t = h/256$ とした。

3.2　流れの解析結果

Fig.3 は上述の条件のもとで解かれた定常に達した速度の分布を示したものである．CD の中央付近に示した三角形は reattachment point(B からでる流線が CD と出会う点) を示している．C から reattachment point までの距離は約 $6.2h$ である．これは [5] に示された解析の結果 (約 $6.3h$) および [6] で報告されている実験結果 ($6h$) と一致している．

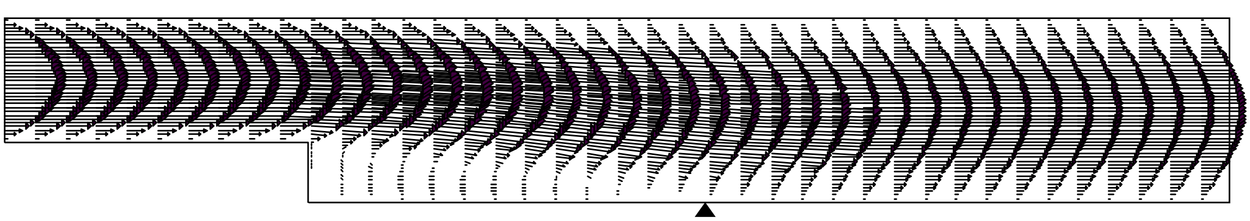

FIG.3 Velocity field and reattachment point. $Re = 100$

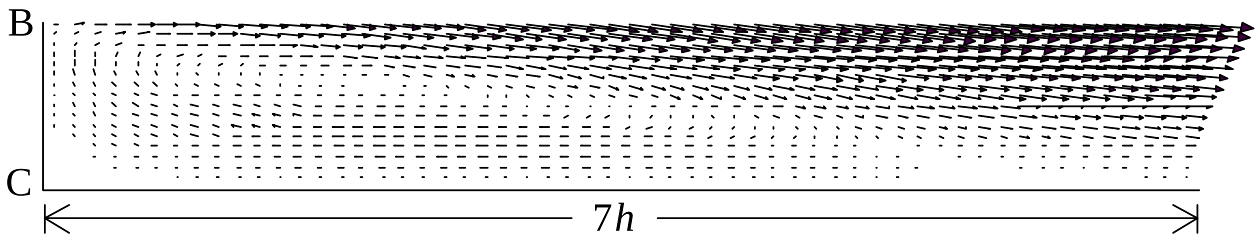

FIG.4 Velocity field around circulating region

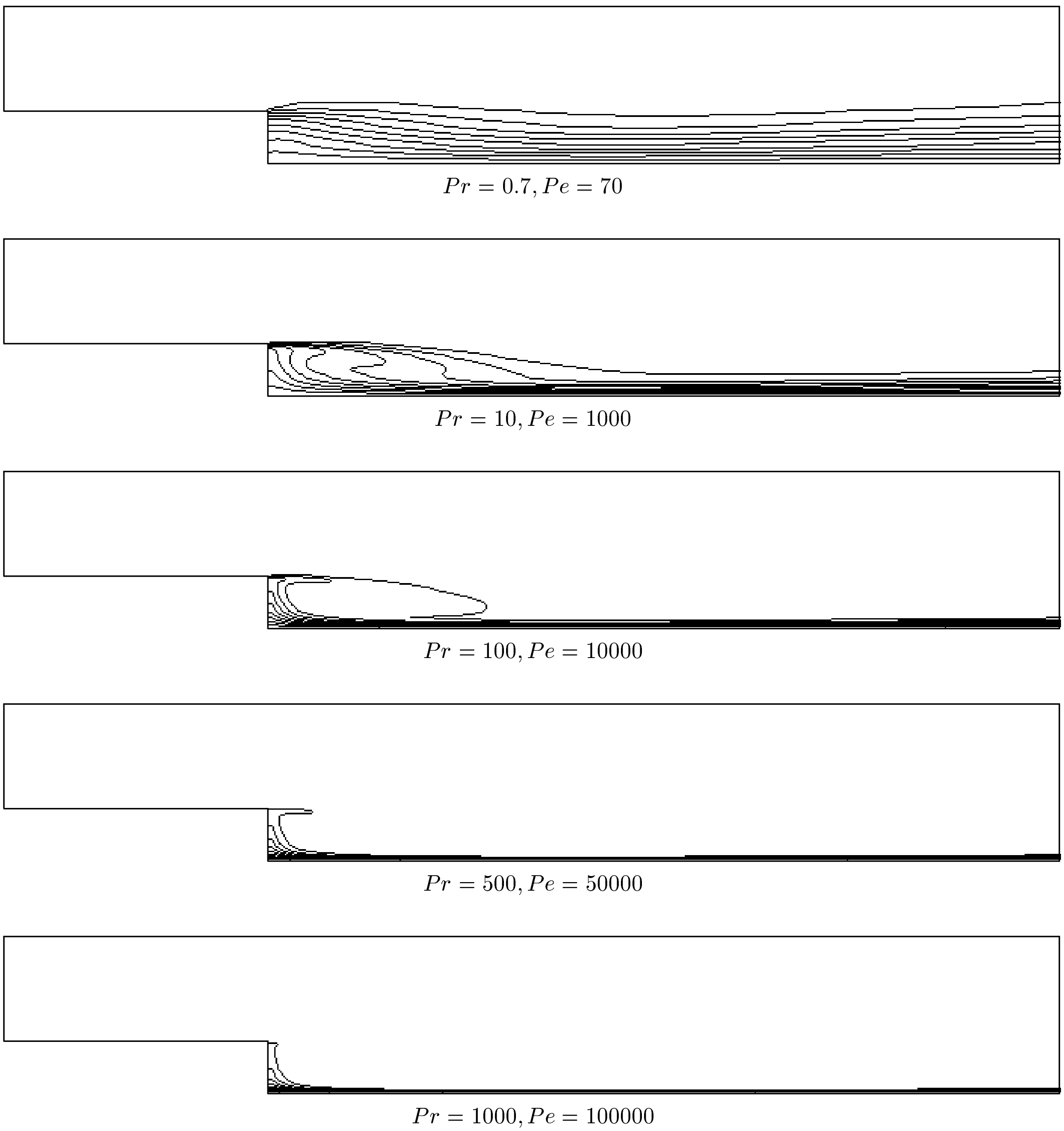

FIG.5 Temperature contours for Pr= 0.7, 10, 100, 1000, Re= 100

Fig.4 はステップ後部の循環流の構造を捉え易くするためにこの部分を拡大して示したもので、ステップから下流方向に $7h$ までの領域を示してある．この部分の流れの循環やよどみが熱伝達を特徴づけることになり、多くの応用で重要となっている．

3.3　対流熱伝達の解析結果

§3.2 で得られた速度場 ($Re = 100$) における対流熱伝達の解析を行った．Pr 数は Pr=0.7, 10, 100, 500, 1000(Pe=70, 1000, 10000, 50000, 100000) とした．$Pr = 0.7$ は数値解析が特に困難な場合ではないが、よく用いられる流体である空気の場合であるので代表的なケースとして取りあげた．

Fig.5 に定常に達した温度場の等高線を示した．等高線は $T = 0$ から $T = 1$ まで 0.1 間隔に示した．なお、数値解は境界条件から決まる温度の上限 $T = 1$ 下限 $T = 0$ を超えることはなかった．

$Pr = 0.7$ と $Pr = 10$ の場合、$T = 0.1$ の等高線（点 B からでる等高線のうち一番上にある）が、ステップの下流の領域で盛りあがっている．これはこの程度の Pr 数の範囲では熱伝導が対流熱伝達に対して支配的あるいは同程度であることを示している．この Pr 数の範囲では対流スキームの数値拡散の影響は目立つことはなく、スキームの違いによる数値解の差異はほとんど見られない．

$Pr \geq 100$ では対流熱伝達が支配的になり、流れのパターンが等高線の形状からも読み取れるようになっている．この Pr 数の範囲では Pr 数が大きくなるにつれ、数値拡散の大小が解に反映され始め、その違いが等温線の分布からも見て取れるようになってくる．$Pr = 1000$ の場合、本解析では点 B から下流に向かっての等温線の突き出しは非常に小さいが、K-K scheme を用いた解析では下流に向かって大きく突き出した解が得られる [5]．$Pr = 500$ の場合には本解析でも、この突き出しが見られる．$Pr = 500$ の場合は $Pr = 1000$ の場合に比べると熱伝導の寄与が大きく、この突き出しは熱伝導（拡散項）が大きくなるにつれて大きくなる．したがって、K-K scheme を用いて得られる解は熱伝導を大きく評価しすぎている、すなわち数値拡散が VONOS に比べて大きいと考えられる．

Fig.6 はステップ下流部底面 CD における局所ヌッセルト数、

$$Nu = -\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} h/\Delta T \tag{14}$$

の分布を示したものである．ここで ΔT は CD の境界温度 $T = 1$ と FA の境界温度 $T = 0$ の差である．Nu 数はいずれの場合にも C から下流に $6h$ のあたり（すなわち reattachment point の付近）で最大となる．それは特に $Pr \geq 100$ のとき顕著であり、このような高 Pr 数の範囲では、対流（循環流）が壁面 CD での熱伝達に強く影響を与えていることがわかる．

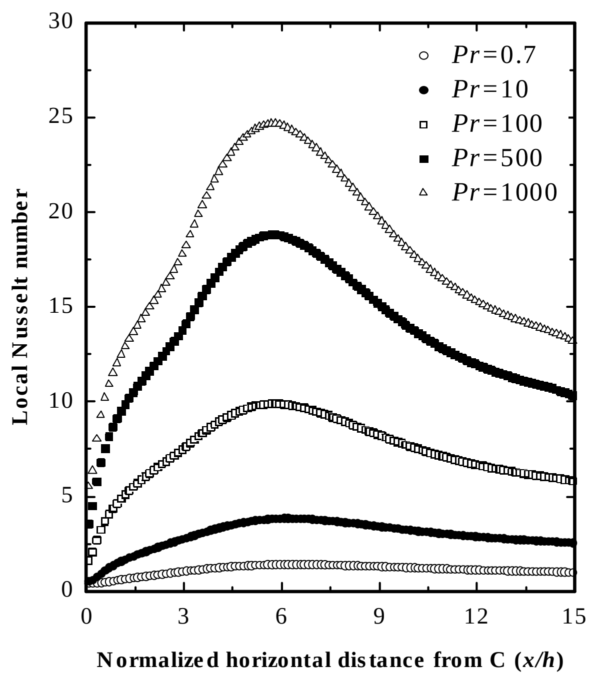

FIG.6 Local Nu distributions for various Pr

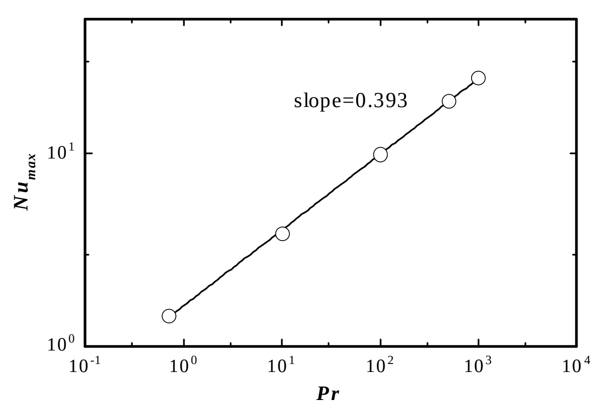

FIG.7 Maximum Nu versus Pr

Fig.7 は各 Pr 数に対する局所 Nu 数の最大値の変化を示したものである．図中の slope=0.393 は Pr と Nu_{max} の間に

$$Nu_{max} \propto Pr^n,\ n = 0.393 \tag{15}$$

の関係があることを表している．対流熱伝達における (15) のような Nu_{max} と Pr のべきの比例関係は様々な場合について報告されているが、本解析の数値解でもこの関係が $0.7 \leq Pr \leq 1000$ の範囲でよく成り立っていることがわかる．

これらのことから、ここで取りあげた $100 \leq Pr \leq 1000$ の場合のような対流が支配的な熱伝達の場合に、本解析方法は従来の高次の風上スキームよりも数値拡散の影響を受けにくい有用な方法である言える．

4 結論

本論文では、広い範囲の Pr 数の流体における対流熱伝達を解析するために、高精度で non-oscillatory、peak-preserving かつ数値拡散が小さい対流項の離散化スキーム (VONOS) を導入した．

この方法を用いて１つの代表的な熱伝達問題である２次元バックステップ流れにおける熱伝達問題を広い範囲の Pr 数 (0.7 - 1000) の場合について解析した．

その結果、$Pr \leq 10$ ($Pe \leq 1000$) では、本方法による解析結果は高次の風上法 (K-K scheme など) による対流項の離散化によるものと変わらなかった．一方、$Pr \geq 100$ ($Pe \geq 10000$) では、風上法が数値拡散の影響と思われる温度分布が得られるのに対して、本方法では数値拡散の影響は小さく、解の振動やオーバーシュート、アンダーシュートを引き起こすことなく大きな温度勾配も再現できることが示された．

本方法は高 Pe 数（高 Schmidt 数）という条件がより厳しいものとなる対流物質移動解析に対しても有効であると考えられる．

参考文献

[1] R.-J. Yang and L.-M. Fu, Thermal and flow analysis of a heated electronic component, *Int. J. Heat Mass Transfer,* **44,** 2261–2275, (2001)

[2] A. Varonos and G. Bergeles, Development and assessment of a variable-order non-oscillatory scheme for convection term discretization, *Int. J. Numer. Meth. Fluids,* **26,** 1–16, (1998)

[3] P.H. Gaskell and A.K.C. Lau, Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm, *Int. J. Numer. Meth. Fluids,* **8,** 617–641, (1988)

[4] R. Temam, Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis, North-Holland, Amsterdam, (1977)

[5] T. Kondoh, Y. Nagano and T. Tuji, Computational study of laminar heat transfer downstream of a backward-facing step, *Int. J. Heat Mass Transfer,* **36,** 577–591, (1993)

[6] K. Morgan, J. Periaux and F. Thomasset (Eds.), Analysis of Laminar Flow over a Backward Facing Step: A GAMM Workshop, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol.9, Friedr. Vieweg, Braunschweig, (1984)