

境界領域要素法による弾性板の自由振動解析システム

田中 正隆*, 松本 敏郎*, 塩崎 明**, 山本 圭志***

Free Vibration Analysis System of Elastic Plates Using Boundary-Domain Element Method

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO, Akira SHIOZAKI, and Keiji YAMAMOTO

This paper is concerned with the boundary-domain element method used for the analysis of free vibration of thin elastic plates. The fundamental solution of the biharmonic operator is used for the derivation of the integral equation formulation. The integral equations for the deflection and the rotation are so regularized that all integrals can be evaluated by the standard Gaussian quadrature. The resulting integral equations are discretized by means of the boundary-domain element method. The system of equations includes the nodal unknowns on the boundary and those of displacement in the inner domain. Elimination of the unknowns except for nodal displacements can lead us to the eigenvalue equations. Numerical analysis is carried out for several examples and the computational properties of the proposed method are investigated in detail, whereby its usefulness is demonstrated.

Key Words: Integral equation, Boundary-Domain Element Method, Free Vibration, Plate bending

1. 緒言

機械構造物などの動特性を調べる振動解析は、動的設計の手段として重要である。本研究では、主要な構造要素である弾性板の曲げ自由振動解析に対する解析システムを開発した。

境界要素法の定式化に必要となる、この問題の厳密基本解は、変形Bessel関数とその導関数を用いて表され⁽¹⁾、きわめて複雑である。また振動数が基本解の中に陰的に含まれており、自由振動解析が容易ではない。すなわち、未知の振動数を少しずつ変化させて係数マトリクスの行列式を零とする振動数を捜し出す方法に頼るほかない。しかも、同じ境界条件に対しても振動数を変化させるたびに係数マトリクスを計算し直さなければならず、境界だけで離散化できるにもかかわらず効率が悪い⁽²⁾⁽³⁾。

そこで本研究では、境界領域要素法による定式化を提案する^{(4)~(8)}。弾性板の静的曲げ問題の基本解を用いて積分方程式を導出する。さらにこの積分方程式中のすべての積分を、通常のGaussの数値積分公式で評価できるオーダーまで正則化する。この正則化された積分方程式を、高次の境界要素と領域要素により離散化する解析法

について述べる。この定式化と解法では、周波数が方程式系の係数マトリクスに陽的に含まれることになり、自由振動問題が代数固有値問題に帰着されるので、標準サブルーチンによる解析が可能となる。

本定式化に基づいて開発した自由振動解析システムを用いて、いくつかの例題について振動解析を行い、その有効性について検討する。

2. 解析手法

均質等方性材料からなる一様な板厚の弾性板に、座標系を定義すると、自由曲げ振動問題に対する支配微分方程式は次式のように表わされる^{(9)~(14)}。

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $w(x,t)$ は点 x 、時刻 t における弾性板のたわみ、 ρ は密度、 h は板厚、 ∇^4 は重調和作用素を表す。また D は曲げ剛性を表し、縦弾性係数(Young率) E 、Poisson比 ν 、板厚 h と次式で関係づけられる。

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

* 学識会員, 信州大学工学部生産システム工学科, 〒380 長野市若里500, TEL 0262-26-4101
** 非会員, 信州大学大学院工学系研究科, 〒380 長野市若里500, TEL 0262-26-4101
*** 非会員, 信州大学工学部生産システム工学科, 〒380 長野市若里500, TEL 0262-26-4101

角振動数を ω とし、たわみを $w(x,t)=W(x)e^{i\omega t}$ とおくと、式(1)よりたわみの時間に依存しない部分 $W(x)$ に関する微分方程式が次のように得られる。

$$D\nabla^4 W(x) - \omega^2 \rho h W(x) = 0 \quad (3)$$

上式が本論文で取り扱う自由曲げ振動問題の支配微分方程式である。

さて、本研究では積分方程式の定式化に際して、式(3)の重調和作用素、すなわち静的曲げ問題に対する基本解を用いる。この基本解を W^* とすれば次の微分方程式を満足する。

$$D\nabla^4 W^*(x,y) = \delta(x-y) \quad (4)$$

ただし、 y は弾性板内の1点であり、ソース点と呼ぶことにする。また、 $\delta(x-y)$ はDiracのデルタ関数である。式(4)より、 W^* は次のように導かれる。

$$W^*(x,y) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r, \quad r = |x-y| \quad (5)$$

式(5)の基本解を用いると、弾性板内の1点のたわみと境界上の諸量および領域内のたわみとを関係づける積分方程式が、次式のように得られる⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾。

$$\begin{aligned} W(y) = & \int_{\Gamma} \{ W^*(x,y) V_n(x) - \Theta_n^*(x,y) M_n(x) \\ & + M_n^*(x,y) \Theta_n(x) - V_n^*(x,y) W(x) \} d\Gamma \\ & - \sum_{k=1}^{K_c} [[W^*(x,y) M_{nr}(x)]_k + \sum_{k=1}^{K_c} [[M_{nr}^*(x,y) W(x)]] \\ & + \omega^2 \rho h \int_{\Omega} W^*(x,y) W(x) d\Omega, \quad y \in \Omega \end{aligned} \quad (6)$$

上式で Γ 、 Ω はそれぞれ弾性板の境界および領域を表し、 $\sum_{k=1}^{K_c} []_k$ は括弧内の関数値のかど点における不連続量の全かど点数 K_c に関する総和を表す。また Θ_n 、 M_n 、 M_{nr} 、 V_n はそれぞれ、境界の法線方向たわみ勾配、曲げモーメント、ねじりモーメント、相当せん断力を表し、次式によりたわみ W と関係づけられる。

$$\left. \begin{aligned} \Theta_n &= \frac{\partial W}{\partial n} = W_{,i} n_i \\ M_n &= -D \nu W_{,ii} - D(1-\nu) W_{,ij} n_i n_j \\ M_{nr} &= -D(1-\nu) W_{,ij} n_i t_j \\ Q_n &= -D W_{,ij} n_i \\ V_n &= Q_n + \frac{\partial M_{nr}}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ただし、 n_i 、 t_i はそれぞれ弾性板境界の単位法線ベクトル、単位接線ベクトルを表す。また、 s はある点から測った境界の弧長であり、 $\partial(\cdot)/\partial s = \partial(\cdot)/\partial t$ である。式(6)に現われる基本解 Θ_n^* 、 M_n^* 、 M_{nr}^* 、 V_n^* は W^* に対して式(7)で関係づけられ、その具体形は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Theta_n^* &= \frac{1}{8\pi D} r(2\ln r + 1) \frac{\partial r}{\partial n} \\ M_n^* &= -\frac{1+\nu}{4\pi} (\ln r + 1) - \frac{1-\nu}{8\pi} \left[2 \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 - 1 \right] \\ M_{nr}^* &= -\frac{1-\nu}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial t} \\ V_n^* &= Q_n^* + \frac{\partial M_{nr}^*}{\partial s} \\ Q_n^* &= -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \\ \frac{\partial M_{nr}^*}{\partial s} &= \frac{1-\nu}{4\pi r} \left(\kappa r - \frac{\partial r}{\partial n} \right) \left[2 \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ただし κ は点 x における境界の曲率である。

式(6)でソース点 y を境界に近づける極限をとると、たわみの境界量に関する積分方程式が得られる。このとき、基本解 V_n^* の特異性のオーダーが $1/r$ であるから、 V_n^* に関する積分はCauchyの主値の意味で評価しなければならない。

また、このときかど点を除いて W 、 Θ_n 、 M_n 、 V_n という4つの境界量を扱うことになる。そのうち2つが境界条件として与えられるので、境界上の1点における未知量は2つとなり、このままでは式が不足して問題を解くことができない。そこで通常は、たわみの境界量に関する積分方程式をソース点 y における $n(y)$ 方向に微分した、たわみ勾配の境界量に関する積分方程式をさらに組み合わせる解析に用いる。この積分方程式は、たわみの境界量に関する積分方程式を微分したために特異性が1階高くなっており、 $o(1/r)$ と $o(1/r^2)$ の特異核、超特異核が存在している。 $o(1/r)$ の特異核はCauchyの主値の意味で評価しなければならない。 $o(1/r^2)$ の超特異核に関しても、たわみ W の点 y におけるHölder連続性を仮定すると、やはりCauchyの主値のオーダーとなることがわかっている⁽¹⁵⁾。前者のたわみの境界量に関する積分方程式は容易に正則化することが可能であるが、後者のたわみ勾配に関する積分方程式では高次要素による主値の評価は困難である。そこで本研究では、文献(15)の静的曲げ問題解析と同様の手続きにより、以下に示すように通常の積分が可能なオーダーまで正則化された積分方程式を導出する。

まず、著者らが静的曲げ問題解析で示した正則化の方法と同じ手続きによって、式(6)を次のように可積分のオーダーまで特異性を落とした形に正則化する。

$$\int_{\Gamma} \left[W^* V_n - \Theta_n^* M_n + M_n^* \Theta_n - Q_n^* [W - W(y)] + M_{nr}^* \frac{\partial W}{\partial t} \right] d\Gamma - \sum_{k=1}^{K_c} [[W^* M_{nr}]_k + \omega^2 \rho h \int_{\Omega} W^* W d\Omega = 0 \quad (9)$$

上式は、すべての積分を通常の意味で評価することができる。

式(9)をソース点 y の座標で微分し、点 y で定義されるベクトル $n(y)$ を両辺に掛け、さらに静的曲げの問題解析で示したのと同様に、通常の意味の積分が可能なオーダーまで正則化すると、次式が得られる。

$$\int_{\Gamma} \left[\tilde{W}^* V_n - \tilde{\Theta}_n^* M_n + \tilde{M}_{nr}^* \{ \Theta_n - W_{,k}(y) n_k \} - \tilde{Q}_n^* [W - W(y) - \eta_k W_{,k}(y)] + \tilde{M}_{nr}^* \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} - W_{,k}(y) t_k \right\} \right] d\Gamma - \sum_{k=1}^{K_c} [[\tilde{W}^* M_{nr}]_k + \omega^2 \rho h \int_{\Omega} \tilde{W}^* W d\Omega = 0 \quad (10)$$

ただし、

$$(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial y_i} n_i(y) \quad (11)$$

である。式(10)の積分も、すべて通常の意味の積分として評価が可能である。

式(9)、(10)の領域積分項には内部節点におけるたわみの未知量が含まれているので、さらに内部節点の数だけソース点 y が領域内部にある場合の式(6)を必要とする。式(6)において、 V_n^* に関する積分は内点 y が境界に近づいた極限においてCauchyの主値のオーダーとなる。そこでこれを避けるために、内部ソース点 y から最も近い境界上の点 x_0 のたわみ $W(x_0)$ を用いて、式(6)を変形した次のような積分方程式を用いる。

$$W(y) = \int_{\Gamma} [W^* V_n - \Theta_n^* M_n + M_n^* \Theta_n - Q_n^* [W - W(x_0)] + M_{nr}^* \frac{\partial W}{\partial t}] d\Gamma + W(x_0) + \omega^2 \rho h \int_{\Omega} W^* W d\Omega - \sum_{k=1}^{K_c} [[W^* M_{nr}]_k \quad (12)$$

Q_n^* は $o(1/r)$ としてふるまうが、上式を用いれば Q_n^* の擬似特異性を緩和することができる。上式が、自由曲げ振動問題の内点のたわみに関する特異性を弱めた積分方程式である。

これまでに導出した式(9)、(10)、(12)に現われるすべての積分は、通常の意味で評価することができる。以上

3式を境界領域要素を用いて離散化する^{(6)~(8)}。この境界領域要素法を用いて、境界条件を適用すると境界の未知節点値と領域内部の領域内部の節点たわみに関する連立代数方程式系が得られる。

まず、式(9)、(10)でソース点を境界節点ごとにとり、境界領域要素法により離散化して、境界条件を適用することにより次式を得る。

$$[A]\{X\} + [A_w]\{W_{\Gamma}\} + \omega^2 [C \ B] \begin{Bmatrix} W_{\Gamma} \\ W^i \end{Bmatrix} = \{O\} \quad (13)$$

次に、式(12)でソース点を内部節点ごとにとり、同様に離散化して境界条件を適用すると次式を得る。

$$[a]\{X\} + [a_w]\{W_{\Gamma}\} - \{W^i\} + \omega^2 [c \ b] \begin{Bmatrix} W_{\Gamma} \\ W^i \end{Bmatrix} = \{O\} \quad (14)$$

式(13)、(14)で、 $\{X\}$ はたわみ以外の境界未知量ベクトル、 $\{W_{\Gamma}\}$ は境界上のたわみの未知量ベクトル、 $\{W^i\}$ は領域内部のたわみの未知量ベクトルを表す。また $\{O\}$ は零ベクトルを表し、その他はそれぞれのベクトルの係数マトリクスを表している。式(13)、(14)を連立させた連立同次方程式系から代数固有値方程式を導く。

式(13)で、係数マトリクス $[A]$ は (行数) \geq (列数) である。そこで $\{X\}$ を消去するために、 $[A]$ を正方マトリクス $[A_1]$ とその他の部分 $[A_2]$ とに分割し、式(13)を次のような2式に分ける。

$$[A_1]\{X\} + [A_{w1}]\{W_{\Gamma}\} + \omega^2 [C_1 \ B_1] \begin{Bmatrix} W_{\Gamma} \\ W^i \end{Bmatrix} = \{O\} \quad (15)$$

$$[A_2]\{X\} + [A_{w2}]\{W_{\Gamma}\} + \omega^2 [C_2 \ B_2] \begin{Bmatrix} W_{\Gamma} \\ W^i \end{Bmatrix} = \{O\} \quad (16)$$

式(15)を $\{X\}$ について解くと次のようになる。

$$\{X\} = -[A_1]^{-1} [A_{w1} \ O] \begin{Bmatrix} W_{\Gamma} \\ W^i \end{Bmatrix} - \omega^2 [A_1]^{-1} [C_1 \ B_1] \begin{Bmatrix} W_{\Gamma} \\ W^i \end{Bmatrix} \quad (17)$$

次に、式(14)、(16)を組み合わせて次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} A_2 \\ a \end{Bmatrix} \{X\} + \begin{Bmatrix} A_{w2} \ O \\ a_w \ -I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{\Gamma} \\ W^i \end{Bmatrix} + \omega^2 \begin{Bmatrix} C_2 \ B_2 \\ c \ b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{\Gamma} \\ W^i \end{Bmatrix} = \{O\} \quad (18)$$

式(18)に式(17)を用いて整理すると次のようになる。

$$[R] \begin{Bmatrix} W_{\Gamma} \\ W^i \end{Bmatrix} = \omega^2 [S] \begin{Bmatrix} W_{\Gamma} \\ W^i \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ただし、

$$[R] = \begin{bmatrix} A_2 \\ a \end{bmatrix} [A_1]^{-1} [A_{w1} \ O] - \begin{bmatrix} A_{w2} \ O \\ a_w \ -I \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} C_2 \ B_2 \\ c \ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_2 \\ a \end{bmatrix} [A_1]^{-1} [C_1 \ B_1] \quad (21)$$

式(19)より固有値 ω^2 と固有ベクトル $\{W_T, W^I\}^T$ が求められる。

式(19)は、係数マトリクス $[R]$ および $[S]$ に固有値を含まない一般固有値問題となっており、既存の固有値解析用のサブルーチンが利用できる。ただし、式(20)、(21)で表される $[R]$ および $[S]$ はいずれも実非対称マトリクスであることに注意する必要がある。

3. 解析例

本研究の定式化に基づき解析プログラムを開発した。これを用いていくつかの例題の解析結果を示す。なお、固有値解析のサブルーチンには、東京大学大型計算機センターの数値解析ライブラリプログラムNUMPACのHEQRVDを利用した。ただし、このサブルーチンは実非対称係数マトリクス $[A]$ に対して $[A]\{X\} = \lambda\{X\}$ の形をとる標準固有値問題に対して提供されているので、ここでは式(19)の両辺に $[S]$ の逆行列を掛けた形で利用した。

3.1 長方形板モデル ここでは、Fig.1に示すような外形 $a=1$ [m]、 $b=0.75$ [m]、板厚 $h=0.01$ [m]の全周単純支持長方形板の解析結果を示す。板材の材料定数はFig.1に示す値とした。角振動数 ω は無次元化して $\lambda = a(\omega^2 \rho h/D)^{1/4}$ として考える。要素分割は以下の2通りを考えた。

i) 境界要素 14, 内部セル要素 12, 節点 51

ii) 境界要素 28, 内部セル要素 48, 節点 173

Fig.2に境界要素 28の場合の要素分割図を示す。

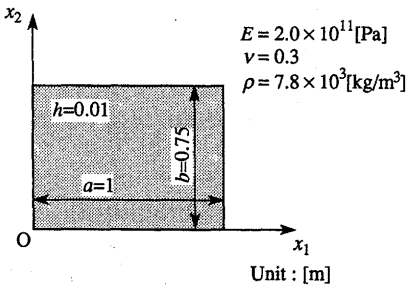


Fig.1 Simply-supported rectangular plate

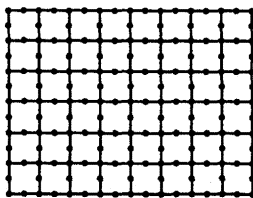


Fig.2 Boundary-domain element mesh with quadratic interpolations (24 boundary elements)

Table 1に第 j 番目の固有振動数の無次元パラメータの計算値 λ_j とその解析解 $\bar{\lambda}_j^{(10)}$ および相対誤差 $|\bar{\lambda}_j - \lambda_j|/\bar{\lambda}_j$ を示す。Fig.3には、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ および λ_5 に対応する固有モードを解析解 $^{(10)}$ と比較して示す。図中、シンボル(□)、(○)がそれぞれ境界要素14, 境界要素28で要素分割した場合を示し、実線が解析解を示している。Table 1からもわかるようにFig.3に示す5番目のモードぐらいまでであれば、どちらの要素分割でも精度良い解が得られている。しかしTable 1から、より高次のモードでは、粗い要素分割では急に計算精度が悪くなるのがわかる。これに対し、細かい要素分割の場合には高次のモードでも精度良い解が得られている。Fig.4に境界要素28の要素分割で計算したときの、Fig.3(a)~(d)に対応する固有モードの鳥瞰図を示す。

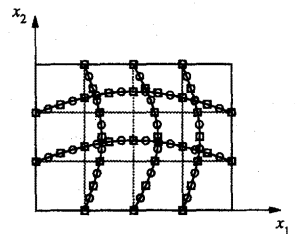
Table 1 Eigenfrequencies for simply-supported rectangular plate

i) 12 boundary elements

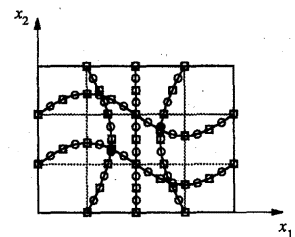
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
Analytical	5.236	7.551	8.947	10.314	10.472	12.610
Present	5.241	7.576	9.006	10.367	10.425	12.145
Error(%)	0.095	0.331	0.659	0.514	0.449	3.688

ii) 24 boundary elements

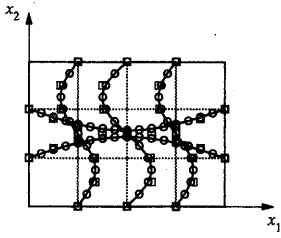
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
Analytical	5.236	7.551	8.947	10.314	10.472	12.610
Present	5.236	7.554	8.952	10.324	10.483	12.635
Error(%)	0.000	0.040	0.056	0.097	0.105	0.198



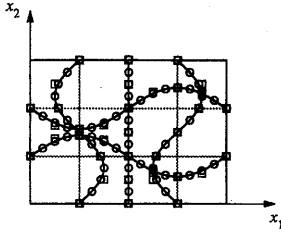
(a) 1st mode



(b) 2nd mode

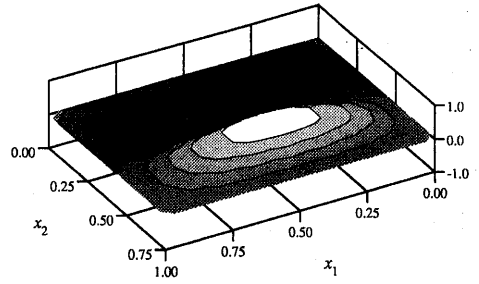


(c) 3rd mode

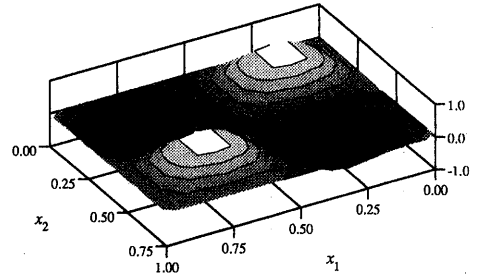


(d) 5th mode

Fig.3 Eigenmodes of simply-supported rectangular plate

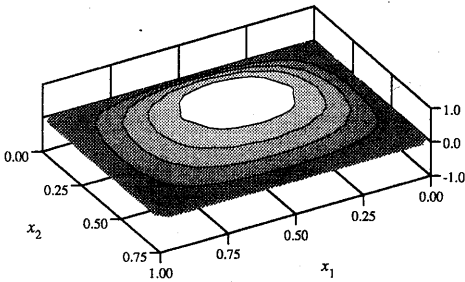


(c) 3rd mode

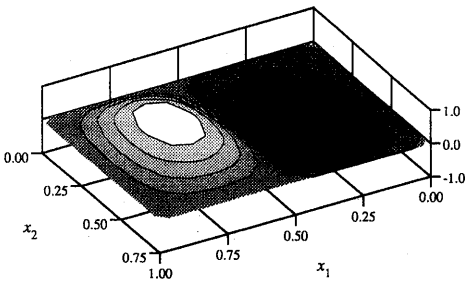


(d) 5th mode

Fig.4 Sketch for eigenmodes of simply-supported rectangular plate



(a) 1st mode



(b) 2nd mode

3.2 円板モデル ここでは, Fig.5に示すような半径 $R = 1$ [m], 板厚 $h = 0.01$ [m]の全周固定円板の解析結果を示す. 板材の材料定数はFig.5に示す値とした. 角振動数 ω はここでも無次元化して $\lambda = R(\omega^2 \rho h / D)^{1/4}$ として考え, 要素分割は以下の2通りを考えた.

- i) 境界要素 12, 内部セル要素 36, 節点 109
 - ii) 境界要素 20, 内部セル要素 100, 節点 301
- Fig.6に境界要素 20の場合の要素分割図を示す.

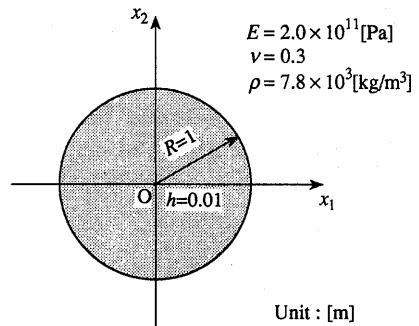


Fig.5 Clamped circular plate

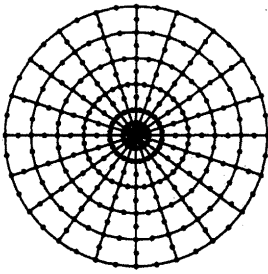


Fig.6 Boundary-domain element mesh with quadratic interpolations (20 boundary elements)

Table 2に第j番目の固有振動数の無次元パラメータの計算値 λ_j とその解析解 $\bar{\lambda}_j$ ⁽¹⁰⁾ および相対誤差 $|\lambda_j - \bar{\lambda}_j| / \bar{\lambda}_j$ を示す。円板の場合も長方形板の場合と同様に、粗い要素分割では急に計算精度が落ちており、細かい要素分割の場合には、高次のモードでも精度良く計算できることがわかる。

Table 2 Eigenfrequencies for clamped circular plate
i) 12 boundary elements

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
Analytical	3.196	4.611	5.906	6.306	7.144	7.799
Present	3.195	4.617	5.944	6.321	7.250	7.905
Error(%)	0.031	0.130	0.643	0.238	1.484	1.359

ii) 24 boundary element

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
Analytical	3.196	4.611	5.906	6.306	7.144	7.799
Present	3.196	4.612	5.910	6.308	7.160	7.811
Error(%)	0.000	0.022	0.068	0.032	0.224	0.154

4. 結言

弾性板の曲げ自由振動問題に対して、静的曲げの基本解を用いて積分方程式を導いた。得られた積分方程式を可積分のオーダーまで正則化することにより高次要素による離散化を容易にし、この境界領域要素法による解析法を示した。この定式化に基づいて開発されたプログラムにより、いくつかの例題を解析し、本手法による解析システムで精度良い解が得られることを確認した。

参考文献

(1) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, (1991), 培風館.
 (2) 安藤英司, 神谷紀生: Helmholtz方程式の境界要素法固有値解析, 日本機械学会論文集, 57-543, C (1991),

pp. 3457-3462.
 (3) 安藤英司, 神谷紀生: 境界要素定式に基づく Helmholtz方程式の標準ルーチンによる固有値の決定, 日本機械学会論文集, 58-553, C (1992), pp.2664-2668.
 (4) Bézine, G.: A mixed boundary integral - finite element approach to plate vibration problems, *Mech. Res. Comm.*, 7-3, (1980), pp.141-150.
 (5) Providakis, C. P., Beskos, D. E.: Free and forced vibrations of by boundary and interior elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, (1989), pp.1977-1994.
 (6) 田中正隆, 松本敏郎, 塩崎 明: 境界-領域要素法による弾性板の定常曲げ振動解析, 日本機械学会機械力学・計測制御講演論文集 (Vol. B), (1993), pp. 34-38.
 (7) 田中正隆, 松本敏郎, 塩崎 明: 弾性板の強制定常曲げ振動解析への境界-領域要素法の適用, 日本機械学会論文集, 59-567, A (1993), pp.2553-2559.
 (8) Tanaka, M., Matsumoto, T. and Shiozaki, A.: Application of boundary-domain element method to forced bending vibration problem of thin elastic plates, *Eng. Anal. with Boundary Elements*, in print.
 (9) 栖原二郎: 平板の曲げ理論, (1972), 培風館.
 (10) 関谷 壮, 浜田 実, 角 誠之助(編): 平板構造強度設計便覧, (1982), 朝倉書店.
 (11) Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S.: *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., (1959), McGraw-Hill.
 (12) Leissa, A.W.: *Vibration of Plates*, (1969), NASA SP-160.
 (13) Volterra, E. and Zachmanoglou, E.C.: *Dynamics of Vibrations*, (1965), pp.377-409, Charles E. Merrill Books.
 (14) Szilard, R.: *Theory and Analysis of Plates - Classical and Numerical Methods*, (1974), Prentice-Hall.
 (15) 松本敏郎, 田中正隆, 本藤浩司: 弾性平板の曲げ解析における境界積分方程式の正則化, 日本機械学会論文集, 57-541, A (1991), pp.2186-2193.
 (16) Balaš, J., Sládek, J. and Sládek, V.: *Stress Analysis by Boundary Element Methods*, (1989), pp.544-620, Elsevier.