

積分方程式による等方均質な場における塩水くさび問題の定常解析

ダウライ ホットマトア^{*}、登坂宣好^{**}

STEADY ANALYSIS OF SALT WEDGE PROBLEM OF ISOTROPIC-HOMOGENEOUS FIELD BY INTEGRAL EQUATION

Hotmatua DAULAY and Nobuyoshi TOSAKA

This paper discusses on applicability of the boundary element method to steady salt wedge phenomena on the seaside. The mathematical model of the phenomena is given as the coupled system of the flow equation and the convection equation. The fundamental solution tensor in the integral equation of the problem is constructed for the coupled differential equations. The nonlinear system derived in this study is solved using the Newton-Raphson method. Henry's problem is used to prove the validity of this method

Key Word: Salt Water Wedge Diffusion, Diffusion Coefficient, Coupled Integral Equation, Newton-Raphson's Method, Henry's Problem

1. はじめに

海岸附近の住民や農業にとって飲料水や農業用水等の水資源を確保する際、海水の侵入による地下水塩水化現象はたいへん重要な問題である。このような淡水に海水が侵入するとき示す現象は、一般に塩水くさび現象とよばれている。

この塩水くさび問題を解析するとき、次の二つの立場が考えられる [1],[2]。

1. 塩水と淡水とを非混合流体と考える立場—ポテンシャル問題
2. 塩水と淡水とを混合流体と考える立場—移流拡散問題

前者の立場は海水と塩水の海面を認識することができるがあまり実用的ではない。Liuら [3] はこの問題をHele-Shawモデルとし、それを境界積分方程式法(BIEM)によって解いている。後者の立場は混合流体として取り扱うため、濃度分布を認識することができるが、現象の支配方程式が非線形となるため解くことが難しくなっている。この立場に対してこれま

でFrind^[4]、Huyakornら^[5]、安富ら^[2]、加納ら^{[6],[7]}、森下ら^{[8],[9]}、著者ら^[10]の研究が報告されている。

Frind^[4]は長いモデルの非定常問題をFEMで解いた。Huyakornら^[5]はFEMで数多くの2-3次元モデルの非定常問題などを解いた。安富ら^[2]はHenryのモデルと知られるモデルの塩水側の境界条件を直してこの問題を解析した。加納らはBEM-WFDM、BEM-FEMなど結合解法を利用して解いた。森下らは一般化された境界要素法を利用してこの問題を解いた。著者らは境界要素法を利用してこの問題の幅広い拡散係数に対して解析した。

本論では、地下水塩水化現象で生じる塩水くさび問題を混合流体として扱い、浸透流方程式と移流拡散方程式とによって支配される連成問題と考えて、その積分方程式による近似解析を行う。本論ではFrind^[4]の基礎方程式に基づき、安富ら^[2]の境界条件を使って、加納ら^[11]の計算手法を利用することにする。この解析手法を検証するために、Henryの問題として知られるモデルの解析を行う。

*) 非会員 日本大学生産工学研究科数理工学専攻 〒275 習志野市泉町1-2-1 TEL 0474(74)2654

**) 学識会員 日本大学生産工学部数理工学科 教授 〒275 習志野市泉町1-2-1 FAX 0474(74)2669

2. 基礎方程式

多孔媒体の流れでは流れ現象と塩水の侵入は二つの偏微分方程式で表せる。ここで用いる基礎方程式は E.O.Frind^[4]によって示された基礎方程式を使用する。まず、浸透方程式は次のように書くことができる。

浸透流方程式：

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[K_{ij} \left(\frac{\partial h}{\partial x_j} + \eta c e_j \right) \right] = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

ただし、

$$K_{ij} = k_{ij} \frac{\rho_0 g}{\mu} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

$$h = \frac{p}{\rho_0 g} + z \quad (3)$$

$$\eta = \frac{\epsilon}{c_s} \quad \epsilon = \frac{(\rho_s - \rho_0)}{\rho_0} \quad (4)$$

$$S_s = \rho g (\alpha + \theta \beta) \quad (5)$$

ここに、 K_{ij} は透水係数、 k_{ij} は固有透水係数、 μ は粘性係数、 ρ_0 は淡水密度、 g は重力加速度、 h は水頭、 p は流体圧力、 z は位置水頭、 t は時間、 η は密度カップリング係数、 c_s は最大密度 ρ_s 、 ϵ は密度変化、 c は塩分濃度、 e_j は鉛直方向のみ 1 (この論文では $j=3$ 、 z の方向である)、他方向は 0、 S_s は比貯留係数、 α は多孔媒体の圧縮性、 θ は流体の圧縮性、 β は間隙率、 x_j ($j=1, 2, 3$) は直交座標である。

一方、移流拡散方程式は次のように考えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\theta D_0 \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) - q_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = \theta \frac{\partial c}{\partial t} \quad (6)$$

ただし D_0 拡散係数であり、 q_i はダルシー流速で、つぎのように与えられるものとする。

$$q_i = - \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} + \eta c e_j \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (7)$$

以上の基本方程式より等方均質な場における支配方程式は次のような連成非線形偏微分方程式によって与えられる。

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} - K \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} - K \eta c_{,3} = 0 \quad (8)$$

$$\theta \frac{\partial c}{\partial t} - \theta D_0 \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} + q_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = 0 \quad (9)$$

なお、定常問題の場合は上式より時間微分項を零と置いた次式となる。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} + \eta c_{,3} = 0 \quad (10)$$

$$\theta D_0 \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} - q_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = 0 \quad (11)$$

3. 積分方程式表現

ここでは移流拡散方程式の定常モデルに対する積分方程式表現を誘導する。連立非線形微分方程式 (10)、(11) を、次のように行列表現する。

$$L_{ij} U_j = B_i \quad (i, j = 1, 2) \quad (12)$$

ここで、 L_{ij} : 支配方程式の微分作用素行列、 U_j : 未知量ベクトル、 B_i : 非線形ベクトルとし L_{ij}, U_j, B_i はそれぞれ次のように表現される。

$$L_{ij} \equiv \begin{bmatrix} \Delta & \eta D_3 \\ 0 & d \Delta \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$U_j = [h, c]^T \quad (14)$$

$$B_i = [0, q_i c_{,i}]^T \quad (15)$$

ただし、 $D_i \equiv \partial / \partial x_i$ 、 $\Delta \equiv \partial^2 / \partial x_i \partial x_i$ 、 $d = \theta D_0$ である。

式 (12) の後で示す関数 u_{ik}^* に対する領域 Ω 上での以下の積分恒等式を以下のように与える。

$$\int_{\Omega} L_{ij} U_j u_{ik}^* d\Omega = \int_{\Omega} B_i u_{ik}^* d\Omega \quad (16)$$

式 (16) にガウスの発散定理を 2 回適用し、Dirac の Delta 関数の性質を用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} \alpha(y) h(y) &= \int_{\Gamma} \left\{ h \frac{\partial u_{11}^*}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} u_{11}^* \right\} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} d \left\{ c \frac{\partial u_{21}^*}{\partial n} - \frac{\partial c}{\partial n} u_{21}^* \right\} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} \eta n_z u_{11}^* d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} q_i c_{,i} u_{21}^* d\Omega \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(y) c(y) &= \int_{\Gamma} \left\{ h \frac{\partial u_{12}^*}{\partial n} - \frac{\partial h}{\partial n} u_{12}^* \right\} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} d \left\{ c \frac{\partial u_{22}^*}{\partial n} - \frac{\partial c}{\partial n} u_{22}^* \right\} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} \eta n_z u_{12}^* d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} q_i c_{,i} u_{22}^* d\Omega \quad (i = 1, 2, 3) \quad (18) \end{aligned}$$

ただし、 $\alpha(y)$ は境界点 y の幾何学的な形状に依存する形状係数で滑らかな境界の場合は 0.5 となる。

4. 基本解テンソル

積分方程式 (17)、(18) を近似解析するためには、それらに含まれる基本解テンソル u_{ik}^* ($i, k = 1, 2$) を具

体的に構成しなければならず、以下のように構成する。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_{ji} u_{ik}^* &= \delta_{ij} \delta(x-y) \\ \mathcal{L}_{ji} &\equiv \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ -\beta D_3 & d\Delta \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

を満足する基本解 u_{ik}^* として、 u_{ik}^* に対し \mathcal{L}_{ji} の転置余因子行列 \mathcal{M}_{ik} を用いた次のポテンシャル関数 ϕ^* による表現を与える。

$$\left. \begin{aligned} u_{ik}^* &= \mathcal{M}_{ik} \phi^* \\ \mathcal{M}_{ik} &\equiv \begin{bmatrix} d\Delta & 0 \\ \beta D_3 & \Delta \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(20)を式(19)に代入すると、次式を得る。

$$\mathcal{L}_{ji} u_{ik}^* = \mathcal{L}_{ji} \mathcal{M}_{ik} \phi^* = \mathcal{L} \delta_{ij} \phi^* = \delta_{ij} \delta(x-y) \quad (21)$$

ただし、 $\mathcal{L} = \det \mathcal{L}_{ji} = d\Delta$ と成る。従って求める基本解 ϕ^* は重調和作用素の基本解で次のように与えられる。

三次元の場合：

$$\phi^* = \frac{1}{8\pi d} r \quad (22)$$

二次元の場合：

$$\phi^* = \frac{1}{8\pi d} r^2 \ln r \quad (23)$$

ただし、 r は field 点 \mathbf{x} と source 点 \mathbf{y} の距離 $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ である。

以上の結果より、次のように u_{ik}^* ($i, k = 1, 2$) の具体的表現を与えることができる。

三次元の場合：

$$u_{11}^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (24)$$

$$u_{12}^* = 0 \quad (25)$$

$$u_{21}^* = \frac{\eta}{8\pi d r} (x_3 - y_3) \quad (26)$$

$$u_{22}^* = \frac{1}{4\pi d r} \quad (27)$$

二次元の場合：

$$u_{11}^* = \frac{1}{2\pi} (\ln r + 1) \quad (28)$$

$$u_{12}^* = 0 \quad (29)$$

$$u_{21}^* = \frac{\eta}{8\pi d} (2 \ln r + 1) (x_2 - y_2) \quad (30)$$

$$u_{22}^* = \frac{1}{2\pi d} (\ln r + 1) \quad (31)$$

5. 積分方程式の離散化表現

ここでは積分方程式(17)、(18)に対する離散化表現を考える。境界での水頭 h と濃度 c に関して次の離散化表現が考えられる。

$$\left. \begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= \sum \phi_i(\mathbf{x}) h_i \\ c(\mathbf{x}) &= \sum \phi_i(\mathbf{x}) c_i \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ただし、 ϕ_i は内挿関数である。ここでは一定要素を採用することにする。式(34)を式(17)、(18)に代入すると、次の離散化表現を得る。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}h + \mathbf{G}i + \mathbf{A}c + \mathbf{B}d + \mathbf{F}k &= 0 \\ \mathbf{A}h + \mathbf{B}i + \mathbf{H}c + \mathbf{G}d + \mathbf{F}k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ただし、 $\mathbf{H}, \mathbf{H}, \mathbf{G}, \mathbf{G}, \mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{F}, \mathbf{F}$ は影響行列を表し、 h, i, c, d はそれぞれ $h, \partial h / \partial n, c, \partial c / \partial n$ に対する境界の未知ベクトルであり、 k は内部の非線形の未知量ベクトルとする。これらをまとめて表現した式を次のように表すものとする。

$$\mathcal{F}(h, i, c, d, k) = 0 \quad (34)$$

6. 解析アルゴリズム

非線形の離散化方程式(34)を解くためにはここで Newton-Raphson 法を利用する。そのためには、式(34)に対し

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_0) \mathbf{B}(\delta \mathbf{x}) = \mathbf{Y}(\mathbf{x}_0) \quad (35)$$

が必要となる。ただし、 $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0)$ は式(34)の未知数に対する導関数の行列 (Jacobian matrix)、 $\mathbf{B}(\delta \mathbf{x})$ は未知数が $\delta \mathbf{x}$ だけ変化した行列、 $\mathbf{Y}(\mathbf{x}_0)$ は式(34)が \mathbf{x}_0 ときの行列、 \mathbf{x}_0 は初期値である。行列 $\mathbf{B}(\delta \mathbf{x})$ を求めて、得られた解を \mathbf{x}_0 に加えて新しい初期値が求められる。新しい初期値を Jacobian $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0)$ と $\mathbf{Y}(\mathbf{x}_0)$ に代入することによって新しい行列方程式が得られる。以上の手順を解に対する収束判定基準を満たすまで繰り返す。なお、これらの操作のフローチャートを Fig.1 に示す。

6. 数値計算例

先に述べた解析手法と手順とに基づき作成したプログラムを検証するため、Henry の問題として知られている Fig.1 に示したモデルを考える。上下に不透水境界をもつ帯水層において、一方側より淡水が一定流量で流れこみ、他方は塩水側としたものである。境界条件については安富ら^[2]と同じものを考える。つまり、塩水側境界において、解析領域内部に向かって、海水が侵入してくる部分は $c=1$ と考えて、逆に領域内

より外に向かって流出するところは $\frac{\partial c}{\partial n} = 0$ とする。
 なお、解析に用いた境界条件は図中に示すが、物理量は Table.1 に示す。

数値積分の実行に当たって、境界積分に対しては解析的に行い、領域積分は Gauss 数値積分公式を使用する。モデルの要素分割は Fig.2 に示すように 15 * 15 の等分割とする。Newton-Raphson 法の収束判定基準は 0.001 で与えた。結果を Fig.3 に 0.5 等濃度線の Huyakorn^[5]、Frind^[4]、Lee and Cheng^[13]、Henry^[15] と安富ら^[2]の結果と共に示す。この図より本手法による結果が他の結果と良く一致していることがわかる。Fig.4 はそのダルシー流速ベクトル図である。この図より、右側の下部より（塩水側）塩水が進み、右側の上部より淡水が出ていくことがわかる。

Table 1 Physical Parameters

Parameter(Symbol)	Value
Salt-water density(ρ_s)	1.025
Fresh-water density(ρ_f)	1.0
Concentration of salt-water(c_s)	1.0
Concentration of fresh-water(c_f)	0.0
hydraulic conductivity(K)	$1.0 * 10^{-2} m/sec$
Molecular diffusion coefficient(D_0)	$6.6 * 10^{-6} m^2/sec$
Fluid flux(q_n)	$6.6 * 10^{-8} m^2/sec$

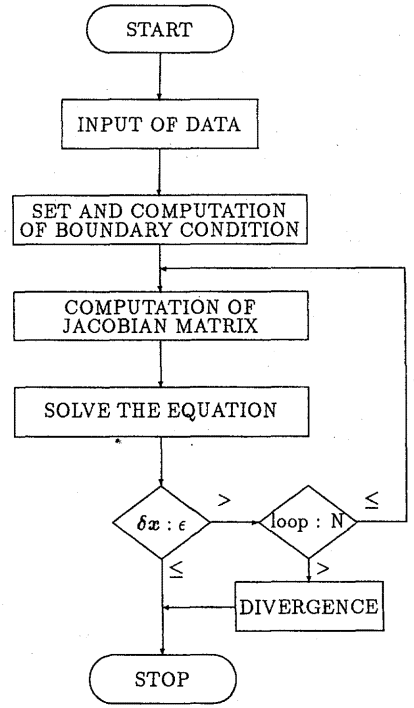


Fig.1 Flow chart

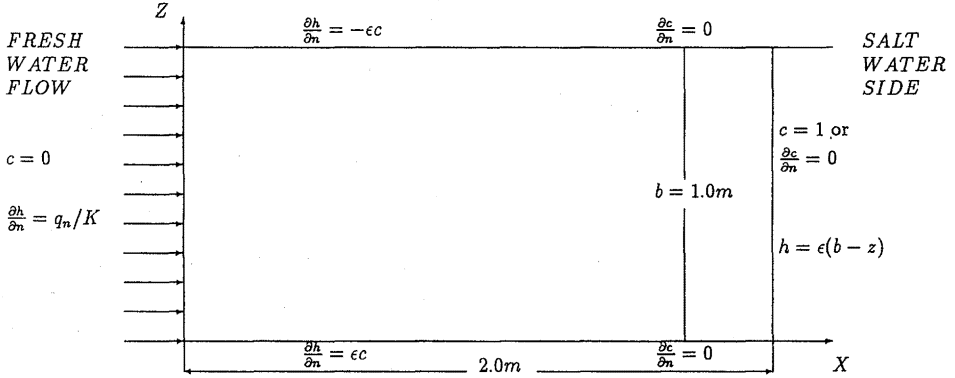


Fig.2 Problem description

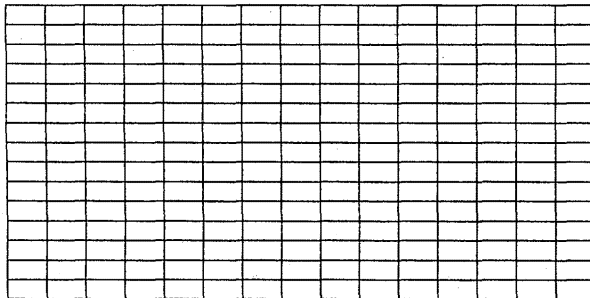


Fig.3 Element Mesh

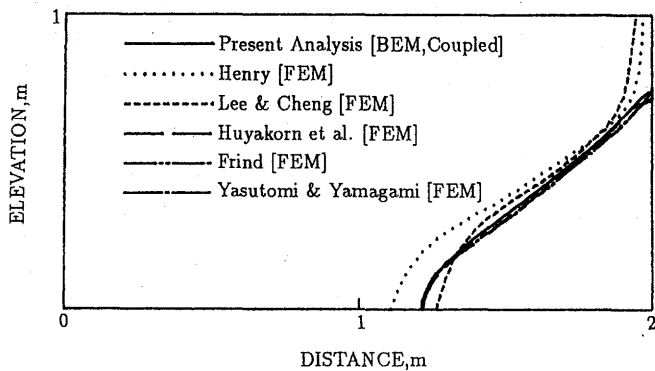


Fig.4 Concentration distribution(0.5 isochlor)

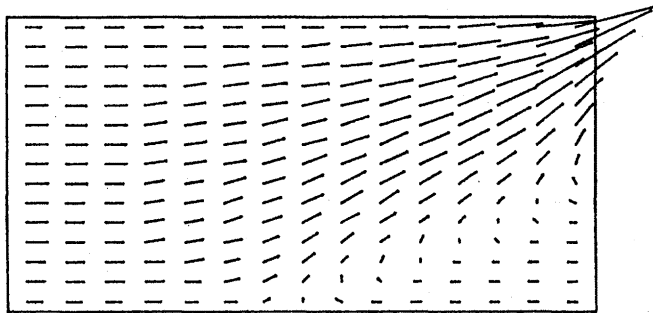


Fig.5 Velocity field

おわりに

本論では積分方程式を用いて等方均質な場における塩水くさび問題の定常解析をおこなった。本手法の有効性を検討するために、Henry問題として知られているモデルに適用し、他の解析と比較し良好な結果が得られることを示した。また、本手法は他手法と異なり、全水頭と塩分濃度を同時に取り扱うことができるという利点をもっている。すなわち、流れ場と濃度場を同時に解くことができる。今後の課題には非定常解析さらに非等方均質な場における塩水くさび問題などである。

参考文献

[1] 河野伊一郎、西垣誠、田中慎一：飽和・不飽和浸透流における非定常塩水化現象の有限要素法解析、土木学会論文報告集、第331号、(1983年3月)、pp.133-141

[2] 安富英樹、山上拓男：地下水塩水化現象の3次元有限要素解析、第4回計算力学シンポジウム報文集、(1990)、pp.242-247

[3] Liu, Philip L-F., Alexander H-D. Cheng, James A. Liggett, Joseph H. Lee: Boundary Integral Equation Solutions to Moving Interface between Two Fluid in Porous Media, Water Resources Research, Vol.17, No.5, (October 1981), pp.1445-1452

[4] Frind, E.O.: Simulation of long-term transient density-dependent transport in groundwater, Adv. Water Resources, Vol.5, (1982), pp.73-88

[5] Huyakorn, P.S et al.: Salt water Intrusion in Aquifers: Development and Testing of a Three Dimensional Finite Element Model, Water Resources Research, Vol.23, No.2, (1987), pp.293-312

- [6] Kanoh, M., T. Kuroki: BEM-WFDM Coupled Analysis for Groundwater Resources, Boundary Element Methods, Principles and Applications, Pergamon Press, (1990), pp.53-62
- [7] Kanoh, M., T. Kuroki, K. Onishi: BEM-FEM Coupled Analysis for Saltwater Wedge Diffusion in Groundwater, Boundary Element Methods, Fundamentals and Applications, Springer-Verlag, (1992), pp.149-58
- [8] 森下真幸、登坂宣好: 一般化された境界要素法による塩水くさび拡散問題の近似解析、境界要素法論文集第6巻、(1989)、pp.81-86
- [9] 森下真幸、登坂宣好: 一般化された境界要素法による塩水くさび問題の近似解析、計算力学シンポジウム第3回、(1989)、pp.235-240
- [10] ダウライ ホットマトア、登坂宣好: 地下水塩水化現象の積分方程式解析、境界要素法論文集、第9巻、(1992)、pp.143-149
- [11] 加納正道、蛸原幸義、黒木建実、荒牧軍治: 塩水くさび拡散問題の連成積分方程式、境界要素法論文集、第3巻、(1986)、pp.203-306
- [12] 加納正道、登坂宣好、黒木建実、荒牧軍治: 塩水くさびの移流拡散定常解析、境界要素法論文集、第4巻、(1987)、pp.149-154
- [13] Lee, C.H. and R.T.S.Cheng: On Seawater Encroachment in Coastal Aquifers, Water Resources Research, Vol.10, No.5, (1974), pp.1039-1043
- [14] A.A.G Sada Costa, J.L.Wilson: Coastal Seawater intrusion: A Moving-Boundary Problem, The International Conference on Finite Element in Water Resources, (1980), pp.2.209-2.218
- [15] Henry, H.R.: Effects of dispersion on salt encroachment in coastal aquifers, in Sea Water in Coastal Aquifers, (Ed. H.H.Cooper et al.) US Geological Survey Water Supply Paper 1613-C, 1964
- [16] P.S. ファコーン、G.F. ヒンダー (赤井浩一訳監修): 地下水解析の基礎と応用(下)、現代工学社、1983
- [17] 登坂宣好、大西和榮: 偏微分方程式の数値シミュレーション、東京大学出版会、1991