境 界 要 素 法 研 究 会 (JASCOME)
BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集第4回
(1994年6月)

JASCOME
Proc. of BTEC-94
June 1994

境界要素法による低レイノルズ数の三次元非圧縮性粘性流体および磁場の連成解析の定式化

河村　隆二

Formulation of Three-Dimensional Coupled Incompressible Viscous Flow at Low Reynolds Number and Magnetic Field Analysis by Boundary Element Method

Ryuji KAWAMURA

The three-dimensional vorticity and stream function method(ω-Φ method) is applied to incompressible viscous fluid problems at low Reynolds numbers by boundary element method. The stream function is governed by a simple Poisson equation and the vorticity equation is transient advection diffusion equation. The time integration of the fundamental solution has been performed in advection diffusion. This ω-Φ method is coupled to magnetic problem with flow. The ω-Φ-A method is formulated for coupled three-dimensional incompressible viscous fluid and magnetic field analysis.

KEY WORDS: Boundary Element Method, Incompressible Viscous Fluid, Vorticity, Stream Function, Three-Dimension, Navier-Stokes Equation, ω-Φ-A Method Low Reynolds Number, Maxwell Equation, Magneto-Hydoro Dynamics

1 まえがき

Navier-Stokes 方程式により支配される非圧縮性粘性流体解析は差分法、有限要素法により有効性が発揮されている。しかしながらメッシュ数が膨大なため計算時間が増大し、計算機の容量が小さいとき簡易計算をする場合には難点がある。
そのため境界要素法により、三次元で非線形項を右辺のソース項とする定式化がなされている[1],[2]。二次元の場合流れ関数のポアッソンの方程式と渦度輸送方程式を用いたNavier-Stokes方程式の解法の定式化が行われ、移流項のない基本解で近似し、簡単なモデルに対する流れに適用している[3]。一方Skerget等[4]は三次元で流速と渦度により定式化を行っている。先の論文で三次元渦度および流れ関数（ω-Φ法）による定式化を行い、戸高等が用いた例題を三次元化し、その有効性を確かめた[5]。この方法は丁度流れ関数は三次元ポアッソンの方程式に支配され、渦度移動方程式は三次元移流拡散方程式に相当しており、後者の場合三次元Navier-Stokes方程式と連続の式から導出され、さきの移流拡散方程式の基本解の時間積分[5]がそのまま利用できる。
磁性体内の運動物体の磁場解析についてはFEM、FDMにより数多く試みられている。BEM の場合Maxwellの方程式においてEddy電流を考慮することにより、定式化[7],[8]が可能である。基本解の時間積分が可能[6]となったので上述の非圧縮性粘性流体と運動物体の磁場の連成解析の定式化を行なう。FEM、FDMの場合いずれもPeclet数の大きい場合は非物理的な解が出る場合がある。BEMの場合はPeclet数が大きくても解が安定である。本論文では境界要素法による定式化を行う。

情報数理研究所相模原Ｒ＆Ｄセンター　〒229相模原市鹿沼台1-9-15 プロミテイふちのべ5F
TEL 0427(69)5811

2 定式化

三次元の非圧縮性粘性流体において流れ関数および渦度輸送方程式はそれぞれ磁場の影響をローレンツ力とすると、次式で与えられる。

$$\nabla^2\Phi = -\omega \qquad (1)$$

$$u = (\nabla\times\omega) \qquad (2)$$

$$\partial\omega/\partial t + (u\cdot\nabla)\omega - (\omega\cdot\nabla)u = \nu\nabla^2\omega$$

$$+[\nabla\times(\nabla\times B)\times B]/\rho\mu_m \qquad (3)$$

ここで、 u:流体速度(u_x, u_y, u_z)、演算子$\nabla=(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$、$\Phi$: 流れ関数(Φ_x, Φ_y, Φ_z), ω : 渦度($\omega_x, \omega_y, \omega_z$), ν : 動粘性係数($=\mu/\rho$)、μ:粘性係数、ρ:流体の密度、μ_m:透磁率である。磁場内の運動物体の Maxwellの方程式より、変位電流を無視し、Eddy 電流を考慮し、オームの法則から運動物体がある場合の三次元磁場の方程式は次式で与えられる。

$$\sigma\left[\frac{\partial A}{\partial t} + (u\cdot\nabla)A - (A\cdot\nabla)u\right] = \nu_m\nabla^2 A + J_0, \quad \text{in } \Omega \qquad (4)$$

ここで $\nu_m=1/\mu_m$、σ : 導電率(1/Ω m)、
μ_m: 透磁率 (H/m)、
ν_m: 磁気抵抗率(m/H)($=1/\mu_m$)、
運動物体速度 $u=(u_x, u_y, u_z)$ 、 H: 磁界の強さ(A/m)、B: 磁束密度 (Wb/m^2)、
E: 電場の強さ(V/m)、
A:ベクトルポテンシアル(Wb/m)、
J_0:強制電流密度(A/m^2)、J_e:渦電流密度(A/m^2)、 t: 時間である。
(3)式および(4)式で平均速度と偏差の速度の和$u=u_0+u'$に分けられ、

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (u_0\cdot\nabla)\omega = \nu\nabla^2\omega - (u'\cdot\nabla)\omega$$

$$+(\omega\cdot\nabla)u' + \{\nabla\times(B\cdot\nabla)B/\rho\mu_m\} \text{ in } \Omega \qquad (5)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (u_0\cdot\nabla)A = \nu_m/\sigma\nabla^2 A$$

$$-(u'\cdot\nabla)A + (A\cdot\nabla)u' + J_0/\sigma. \quad \text{in } \Omega \qquad (6)$$

となり、(1)式はポアッソンの方程式であり,(4)および(5)式はソース項のある移流拡散方程式である。(4)および(5)式の右辺第2項、第3項はソース項として考える。速度が大きくなるとこの項の体積積分値が大きくなる。また次式を満足している。

$$\omega = \nabla\times u \qquad (7)$$

$$\nabla\cdot\omega = 0 \qquad (8)$$

であり、初期条件は

$$\omega(x,y,z,0) = \omega_1(x,y,z) \qquad (9)$$

$$A(x,y,z,0) = A_0(x,y,z). \qquad (10)$$

Dirichlet境界条件は

$$\Phi(x_0,y_0,z_0,t) = \Phi_0 \quad \text{on } \Gamma_{11} \qquad (11)$$

$$\omega(x_0,y_0,z_0,t) = \omega_0 \quad \text{on } \Gamma_{12} \qquad (12)$$

$$A(x_1,y_1,z_1,t) = A_1, \quad \text{on } \Gamma_{13} \qquad (13)$$

(Dirichlet condition)

Neumann境界条件は

$$p_n = -\nabla\Phi\cdot n = p_0 \quad \text{on } \Gamma_{21} \qquad (14)$$

$$q = -\nu\nabla\omega\cdot n = q_0 \quad \text{on } \Gamma_{22} \qquad (15)$$

$$q_n = -K\nabla A\cdot n = q_{m0}, \quad \text{on } \Gamma_{23}$$

(Neumann condition) (16)

ここで$K=\nu_m/\sigma$である、またΓ_{11}、Γ_{12}、Γ_{13}、Γ_{21}、Γ_{22}、Γ_{23}はそれぞれ境界で、$\Gamma=\Gamma_{11}+\Gamma_{21}=\Gamma_{12}+\Gamma_{22}=\Gamma_{13}+\Gamma_{23}$

である。(1)式の基本解は

$$\Phi^*(x,y,z)=\frac{1}{4\pi r}\cdot \mathbf{1} \tag{17}$$

$$p^*(x,y,z)=\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})}{4\pi r^3}\cdot \mathbf{1} \tag{18}$$

(4)式および(5)式の演算子は

$$[-\frac{\partial}{\partial t}\omega^*-(u_0\cdot\nabla)\omega^*-\nu\nabla^2\omega^*]$$

$$=\mathbf{1}\cdot\delta^3(x-x')\delta(\tau-t) \tag{19}$$

および

$$[-\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*-(u_0\cdot\nabla)\Psi^*]-K\nabla^2\Psi^*$$

$$=\mathbf{1}\cdot\delta^3(x-x')\delta(\tau-t) \tag{20}$$

ここで $\mathbf{1}=(1.1.1)^T$ である。(19)式および(20)式の基本解は

$$\omega^*(r,t;r_i,\tau)=\mathbf{1}\cdot\exp[-(u_0\cdot r')/2\nu$$

$$-u_0^2t'/4\nu-r'^2/4\nu t']/(4\pi\nu t')^{3/2} \tag{21}$$

および

$$\Psi^*(r,t;r_i,\tau)=\mathbf{1}\cdot\exp[-(u_0\cdot r')/2K$$

$$-u_0^2t'/4K-r'^2/(4Kt')]/(4\pi Kt')^{3/2} \tag{22}$$

ここで　$t'=\tau-t$ $r'=r-r_i$。
(1)式、(15)式および(16)式についての境界積分方程式は各々次式となる。

$$\Theta_i\Phi(r_i)-\int_\Gamma p^*(r,r_i)\ \Phi(r)d\Gamma$$

$$=-\int_\Gamma \Phi^*(r,r_i)p(r)d\Gamma$$

$$+\int_\Omega \Phi^*(r,r_i)\omega(r,t)d\Omega \tag{23}$$

$$\Theta_i\omega(r_i,\tau)-\int_0^\tau\int_\Gamma q^*(r,t;r_i,\tau)\omega(r,t)d\Gamma dt$$

$$=-\int_0^\tau\int_\Gamma \omega^*(r,t;r_i,\tau)\ q(r,t)d\Gamma dt$$

$$+\int_\Omega \omega^*(r,0;r_i,\tau)\omega_i(r)d\Omega$$

$$-\int_0^\tau\int_\Omega \omega^*(r,t;r_i,\tau)(u'\cdot\nabla)\omega(r,t)\ d\Omega dt$$

$$+\int_0^\tau\int_\Omega \omega^*(r,t;r_i,\tau)(\omega\cdot\nabla)u'(r,t)\ d\Omega dt$$

$$+\int_0^\tau\int_\Omega \omega^*(r,t;r_i,\tau)\{\nabla\times(B\cdot\nabla)B/\rho\mu_m\}d\Omega dt \tag{24}$$

$$\Theta_iA(r_i,\tau)-\int_0^\tau\int_\Gamma \Phi^*(r,t;r_i,\tau)A(r,t)d\Gamma dt$$

$$=-\int_0^\tau\int_\Gamma \Psi^*(r,t;r_i,\tau)q(r,t)d\Gamma dt$$

$$+\int_\Omega \Psi^*(r,0;r_i,\tau)A_0(r)d\Omega$$

$$-\int_0^\tau\int_\Omega \Psi^*(r,t;r_i,\tau)(u'\cdot\nabla)A(r,t)\ d\Omega dt$$

$$+\int_0^\tau\int_\Omega \Psi^*(r,t;r_i,\tau)(A\cdot\nabla)u'(r,t)\ d\Omega dt$$

$$+\int_0^\tau\int_\Omega \Psi^*(r,t;r_i,\tau)J_0(r,t)/\sigma\ \ d\Omega dt, \tag{25}$$

ここで　Θ_i は観察点 r_i で決まる定数である。

$$p^*(r,r_i)=\mathbf{1}\cdot\{-\nabla\Phi^*(r,r_i)\cdot n\} \tag{26}$$

$$q^*(r,t;r_i,\tau)=\mathbf{1}\cdot\{-\nu\nabla\omega^*(r,t;r_i,\tau)$$

$$-u_0\omega^*(r,t;r_i,\tau)\}\cdot n. \tag{27}$$

$$\Phi_m^*(r,t;r_i,\tau)=\mathbf{1}\cdot\{-K\nabla\Psi^*(r,t;r_i,\tau)$$

$$-u_0\Psi^*(r,t;r_i,\tau)\}\cdot n. \tag{28}$$

(21)式及び(22)式で 小さいτに対し ω, p, q, Aの変化が小さいとして、ω^*, q^*、Ψ^*、Φ^*の時間積分を実行[6]できる。
(23)式、(24)式及び(25)式についての境界積分方程式は 各々次式となる。

$$\Theta_i \Phi(r_i) - \int_\Gamma p^*(r, r_i)\Phi(r)d\Gamma$$
$$= -\int_\Gamma \Phi^*(r, r_i)p(r)d\Gamma$$
$$+\int_\Omega \Phi^*(r, r_i)\omega(r, \tau)d\Omega \qquad (29)$$

および

$$\Theta_i \omega(r_i, \tau) - \int_\Gamma q\tau(r, r_i)\ \omega(r, \tau)d\Gamma$$
$$= -\int_\Gamma \omega^*\tau(r, r_i)\ q(r, \tau)d\Gamma$$
$$+\int_\Omega \omega^*(r, 0; r_i, \tau)\omega_0(r)d\Omega$$
$$-\int_\Omega \omega^*\tau(r, r_i)(u' \cdot \nabla)\ \omega(r, \tau)\ d\Omega$$
$$+\int_\Omega \omega^*\tau(r, r_i)(\omega \cdot \nabla)\ u'(r, \tau)\ d\Omega$$
$$+\int_\Omega \omega^*\tau(r, r_i)\{\nabla \times (B \cdot \nabla)B/\rho\mu_m\}\ d\Omega$$
$$(30)$$
$$\Theta_i A(r_i, \tau) - \int_\Gamma p^*_m(r_i - r, \tau)A(r, \tau)d\Gamma$$
$$= -\int_\Gamma A^*(r_i - r, \tau)q(r, \tau)d\Gamma$$
$$-\int_\Omega A^*\tau(r, r_i)(u' \cdot \nabla)\ A(r, \tau)\ d\Omega$$
$$+\int_\Omega A^*\tau(r, r_i)(A \cdot \nabla)\ u'(r, \tau)\ d\Omega$$
$$+\int_\Omega \Psi^*(r, 0; r_i, \tau)A_0(r)d\Omega$$
$$+\int_\Omega A^*(r_i - r, \tau)J_0(r, \tau)/\sigma\ d\Omega. \qquad (31)$$

(29)式、(30)式及び(31)式を離散化し、連立方程式 を解くことにより、(2)式より速度が求まる。 次に(7)式より$\hat{\omega}$ を求め、これを(30)式の新たな境界値として代入し、(30)式の結果を(2)式に代入して、(6)式より新たな境界値を求め、(29)式を解き、磁束密度$B=\nabla \times A$を求め再び(30)、(31)式を繰り返し計算を行う。

3 結論

境界要素法により、三次元ω-Φ-A法による非圧縮性粘性流体と磁場の連成解析の定式化を行った。レイノルズ数Reが大きくなると、ωの分布が広がっていることが判る。Re=100以上になると積分方程式に含まれる体積積分がおおきくなり、速度が境界値より大きくなり、最終的には解が発散する。このことからこの手法ではRe>100の場合では安定な解は得られない。
ニュートンラプソン法等を用いて適切な解を得る手段を考えなければω-Φ-A法で高レイノルズ数の場合安定な解は求めることは出来ない。本解析ではレイノルズ数が100程度まで解析が可能であり、流れ関数の解析で非斉次項の計算において最適計算が可能であれば更に高レイノルズ数まで解析が可能となろう。この定式化では境界条件はすべてω、Φ、Aは直接観測可能な値ででない、境界値を与えるときはu, Bから換算してきめなければならない。

参考文献

(1) 佐藤　尋、登坂　宣好；三次元非圧縮性粘性流れ問題の境界要素解析、第６回境界要素法シンポジウム、境界要素法研究会、pp. 211-216, (1989)
(2) K. Onishi, T. Kuroki and N. Tosaka; Further Development of BEM in Thermal Fluid Dynamics , BEM in Nonlinear Fluid Dynamics, Elsevier Applied Science, pp. 319-343, (1990)
(3) 戸高　孝、榎園　正人；境界要素法による非圧縮性粘性流体の解析、第１回境界要素法シンポジウム、境界要素法研究会、 pp. 247-252, (1984)
(4) P. Skerget, A. Aljevic, G. Kuhn and C. A. Brebbia ; Natural Convection Flow Problem by BEM, Boundary Elements IX, Elsevier Applied Science Vol. 3. pp. 401-417, (1988)
(5) 河村　隆二; 境界要素法による低レイノルズ数の非圧縮性流体の解析、第１０回境界要素法シンポジウム、境界要素法研究会、pp. 65-70, (1993)
(6) 河村　隆二、福間　通人；境界要素法による三次元非定常移流拡散方程式の解法、シミュレーション学会誌。pp. 160-165, Vol, 9, (1989)
(7) 榎園　正人、戸高　孝；境界要素法による交番磁界下の非定常一方向流れの解析、シミュレーション学会誌、Vol. 4, pp. 34-41, (1985)
(8) 河村　隆二; 境界要素法による三次元運動物体内磁場解析、第８回境界要素法シンポジウム、境界要素法研究会、pp. 103-108, (1991)