

# 境界上の速度の積分を用いた粘性流れの解析

宇多小路 豊\*, 齊藤 圭司郎\*\*

## NUMERICAL FLOW CALCULATION BY VELOCITY INTEGRALS ON BOUNDARY

Yutaka UTAKOJI, Keijiro SAITOH

Two dimensional incompressible viscous flow calculation has been presented. Flow field is divided to small sub-domains, vorticity and vortical velocity distributions in the sub-domain are calculated using B.E.M. (Boundary Element Method) similar to J.C.Wu's formulation, then, vortical velocities are superposed with potential flow to obtain overall flow field. Effects of vorticity distribution outside of sub-domain boundary are taken into calculations by boundary integrals of velocity. Vorticity diffusion is treated as transient potential flow problems by B.E.M.. The transport of vortices is considered as the instantaneous vortex source distributed in the flow field. Calculations of viscous flow on flat plate at  $Re = 10^3$  and  $10^5$ , and flows around a circular cylinder at  $Re = 1000$  and  $1200$  are presented. Merits to divide for sub-domains are explained, referring sparse but large size matrices.

Key Words: Boundary Element Method, Numerical Analysis, Viscous Flow, Velocity Distribution

### 1. 緒言

J.C.Wu等の手法<sup>(1)-(3)</sup>と同様な境界要素法を用いて流れの場を計算することを試みる。J.C.Wu等が定式化した手法はガウスの積分によって境界よりも外に存在する渦度等の影響を境界上の速度の積分に変換する意味を持っているので、余り大きくない領域を設定して領域内の渦度分布により誘起される速度を計算すると同時に、境界の外に遠くに存在して影響の少ない渦による影響をまとめて境界上の速度の積分値として計算に取り込むことができる。この様な観点から、比較的小さな境界を設けて小規模の計算を行い、これを繰り返して全体の流れを求めることを試みた。また、J.C.Wu等の計算よりは高いレイノルズ数の流れの計算を試みる。

#### 主な記号

$t$ : 時間ステップ及び時刻,  $u_i$  (及びベクトル  $u$ ): 速度  
 $\delta$ : デイラックの衝撃関数,  $\nu$ : 動粘性係数  
 $\omega$  (及びベクトル  $\omega$ ): 渦度,  $d$ : 円柱直径  
 $U$ : 一様流速

#### 添字

$i$ : 座標軸, 二次元では  $i = 1, 2$   
 $p$ : 観測点に於ける値,  $q$ : ソース点に於ける値  
 $V$ : 渦で誘起された速度成分 (Vortical Velocity)

### 2. 解析方法

Fig.1に示すように流れの場を閉じた境界  $S$  で区切り流れを速度と渦度を用いて解析する手法をとる。

速度をポテンシャル流れ (渦無し流れ) 部分とソレノイダル部分に分解 (L.Morino等の表現<sup>(4)</sup>では Helmholtz Decomposition) して取り扱うこととする。逆に云うと、固体壁面でスリップしている渦無し流れをまず想定し、次いで、壁面上でスリップしないために生じた渦による流れ (速度のソレノイダル部分、以下の説明では L.Morino 等と同様に Vortical Velocity と呼ぶ) を導入する。渦度分布から Vortical Velocity を先ず計算し、次に、得られた Vortical Velocity にポテンシャル流れを合算することで特定の点の速度を求め、これを各点毎に繰り返して流路全体の流れを求める。

流れがスリップしないために固体壁近傍に必要となる渦層が領域内部に広がっていく過程は、境界要素法を用いた拡散問題として取り扱うこととする。

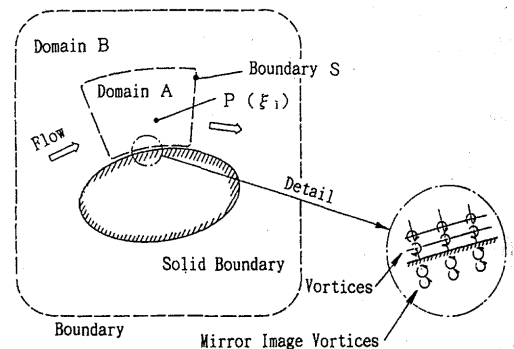


Fig. 1 Flow Domain and Boundary.

\* 非会員

\*\* 非会員 京都大学大学院工学研究科,

〒612 京都市伏見区竹田中島町 1-2-501,

〒606-01 京都市左京区吉田本町,

TEL 075-645-4181

TEL 075-753-5245

## 2.1 基礎方程式

2.1.1 速度の積分表示式 ガウスの発散の定理から容易に導かれる恒等式

$$\int_A \{P \cdot (\nabla \times \nabla \times Q) - Q \cdot (\nabla \times \nabla \times P)\} dA \\ = \oint_S \{Q \times \nabla \times P - P \times \nabla \times Q\} \cdot n dS \quad (1)$$

$P, Q$ : 領域  $A$  で単値, 有限, かつ, 第二次微係数まで連続なベクトル

$n$ : 境界  $S$  に垂直な外方向単位ベクトル

$S$ : 領域  $A$  を区切る閉じた境界

から出発して速度  $u$  と渦度  $\omega$  の関係を記述する式を誘導すると次のようになる。

$$\int_A (\nabla^2 \Phi + \omega \times) G dA \\ = \oint_S \{(u \cdot n) - (u \times n) \times\} G dS \quad (2)$$

$$G = \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r} \right) \right\} \quad (\text{二次元}) = -\frac{r}{2\pi r^2}$$

$r$ : 観測点からソース点に向かう位置ベクトル

$$r = |r|, \quad r^2 = \sum_{i=1}^2 (x_i - \xi_i)^2$$

$x_i$ : ソース点の座標,  $\xi_i$ : 観測点の座標

$\Phi$ : 速度ポテンシャル,  $\nabla^2 \Phi = 0$  (非圧縮性流れ)

ソース点と観測点一致する特異点の計算から, 観測点の速度の値が次のように表示できる。

$$\beta u(\xi_i) = - \int_A (\nabla^2 \Phi + \omega \times) G dA \\ + \oint_S \{(u \cdot n) - (u \times n) \times\} G dS \quad (3)$$

$\beta = 1$ :  $P(\xi_i)$  が領域の中にある場合

$\beta = \frac{1}{2}$ :  $P(\xi_i)$  が滑らかな境界上にある場合

角を持った境界上においては  $\beta$  は流体領域側の角度  $\gamma$  を  $2\pi$  で割った値である。

式(2),(3)を渦によって誘起された速度 (Vortical Velocity)  $u_V$  に適用すると

$$\int_A \omega \times G dA = \oint_S \{(u_V \cdot n) - (u_V \times n) \times\} G dS \quad (4)$$

$$\beta u_V(\xi_i) = - \int_A \omega \times G dA \\ + \oint_S \{(u_V \cdot n) - (u_V \times n) \times\} G dS \quad (5)$$

となる。 $G$  と  $n$  の演算をまとめて書くと

$$\beta u_V(\xi_i) = - \int_A (\omega \times G) dA \\ + \oint_S \{(G \cdot n) - (G \times n) \times\} u_V dS \quad (6)$$

となる。この式は J.C.Wu 等の提示した式<sup>(1)</sup>である。

なお, 煩雑さを避けるために, 渦で誘起された流れを区別する目的で付けた添え字  $V$  を省略するが, 以下の検討は飽くまで固体壁が置かれたために付加的に発生する Vortical Velocity についての検討である。

2.1.2 渦の拡散方程式 次の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u$$

$p$ : 圧力,  $\rho$ : 流体の密度,  $\nu$ : 動粘性係数

両辺の rot をとり整理すると

$$\nabla^2 \omega - \frac{1}{\nu} \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{1}{\nu} \{\nabla \times (u \times \omega)\} \quad (7)$$

を得る。一方, 時刻  $\tau$  の時に位置  $\xi_i$  に付加された時間依存渦源が, 時刻  $t$  の時に位置  $x_i$  に及ぼす影響を記述する関係式は

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{\nu} \delta(x, t; \xi, \tau) \quad (8)$$

$G$ : グリーンの関数,  $= G(x, t; \xi, \tau)$

$t$ : 観測時刻,  $x_i$ : 観測点の位置

$\xi_i$ : 瞬間的な単位ソースの置かれた位置

$\tau$ : 瞬間的な単位ソースの置かれた時刻

であり, これを満足する  $G(x, t; \xi, \tau)$  は

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{\exp\{-r^2/[4\nu(t-\tau)]\}}{[4\nu(t-\tau)]^m}$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^2 (x_i - \xi_i)^2$$

であることが知られている<sup>(1)</sup>。(二次元では,  $m = 1$ )

この  $G(x, t; \xi, \tau)$  を式(7)の両辺に乘じ,  $x_i$  について部分積分を2回行い更に時間  $t$  についても部分積分(たたみこみ積分)を行うと次式がえられる。

$$\alpha \omega(\xi_i, t) = \nu \int_0^t d\tau \oint_S (G n \cdot \nabla \omega - \omega n \cdot \nabla G) dS \\ + \int_0^t d\tau \int_A \{G \nabla \times (u \times \omega)\} dA + \int_A [G \omega]_{r=0} dA \quad (9)$$

右辺の第2項をベクトル演算の公式により展開すると,

$$\alpha \omega(\xi_i, t) = \nu \int_0^t d\tau \oint_S (G n \cdot \nabla \omega - \omega n \cdot \nabla G) dS \\ + \int_0^t d\tau \int_A \{G(\omega \cdot \nabla u - u \cdot \nabla \omega - \omega \nabla \cdot u)\} dA \\ + \int_A [G \omega]_{r=0} dA \quad (10)$$

となる。式(10)の  $\omega \cdot \nabla u$  は渦糸の方向に流体の微小部分が引き伸ばされるために渦度が上昇することを意味する項であるが二次元問題ではこの項はゼロである。また,  $\omega \nabla \cdot u$  は流体が圧縮されれば渦度が上昇することを示す項であるが, 非圧縮性を仮定しているためこの項もゼロとなる。更に, 二次元であるから渦度ベクトル  $\omega$  はスカラー  $\omega$  で書き表すことができ, 式(10)が簡単な式(11)となる。なお,  $\omega$  は二次元平面上で反時計廻りを正とする。

$$\alpha\omega(\xi_i, t) = \nu \int_0^t d\tau \oint_S (Gn \cdot \nabla\omega - \omega n \cdot \nabla G) dS \\ + \int_0^t d\tau \int_A G(-u \cdot \nabla\omega) dA + \int_A [G\omega]_{r=0} dA \quad (11)$$

$\alpha = 1$ :  $P(\xi_i)$  が領域  $A$  の中にある場合

$\alpha = 0$ :  $P(\xi_i)$  が領域  $A$  の外にある場合

**2.1.3 基礎方程式の考察** 式(4)を Fig.1の領域  $B$  に適用すると固体壁の外側の鏡像渦ならびに領域  $B$  の流路に分布する実像渦の点  $P(\xi_i)$  に及ぼす影響は境界上の速度の積分で表されることがわかる。すなわち、領域  $A$  の境界  $S$  上の速度の積分値は領域  $B$  の渦度(鏡像渦を含む)の点  $P(\xi_i)$  に対する影響を集約したものに等しい。この関係を利用するのが本研究の狙いのひとつである。

ところで、式(10)の右辺の積分の第2項は、J.C Wu<sup>(1)(3)</sup>は  $\omega[u \cdot \nabla G]$  としている。しかし、ベクトル演算の公式を利用し、かつ、 $\nabla \cdot \omega = \nabla \cdot \nabla \times u = 0$ であることを考慮して、式(7)の右辺を

$$\nabla \times (u \times \omega) = \omega \cdot \nabla u - u \cdot \nabla \omega + u \nabla \cdot \omega - \omega \nabla \cdot u$$

と展開したので各々の項の物理的な意味が理解できて一般の流体力学の立場からは理解し易い。

移送項の大きい一般の流れの場合には、着目している格子点の近傍で速度ベクトル  $u$  の方向の  $G$  の勾配を求めてその点の速度との積を求めるよりも、Fig.2のような考えで渦の移送量を求める方が適切である。

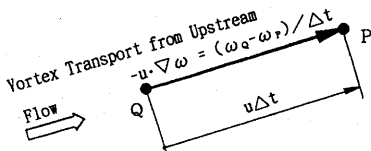


Fig. 2 Vorticity Transport.

## 2.2 方程式の離散化

**2.2.1 速度の積分表示式の離散化** 式(6)を二次元の場合について展開し、微小線分あるいは微小三角形の中を積分して以下の式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \beta u_1 \\ \beta u_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} E_2 \\ -E_1 \end{bmatrix} \{\omega\} + \begin{bmatrix} F_S & F_V \\ -F_V & F_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$[E_i] \text{ は } E_i^{pq} = - \int_{\Delta A_q} \frac{\xi_i^p - x_i^q}{2\pi r^2} M(x^q) dA_q \quad \text{kw}$$

を  $pq$  要素とする  $(m+n) \times (m+n)$  サイズの行列、 $n$  は境界上の格子点の総数、 $m$  は領域内の格子点(内点)の総数、 $M(x^q)$  は領域内の三角形要素の内挿関数である。 $[F_S]$  と  $[F_V]$  は

$$F_S^{pq} = - \int_{\Delta S_q} \frac{(\xi_1^p - x_1^q)n_1 + (\xi_2^p - x_2^q)n_2}{2\pi r^2} N(x^q) dS_q$$

$$F_V^{pq} = - \int_{\Delta S_q} \frac{(\xi_1^p - x_1^q)n_2 - (\xi_2^p - x_2^q)n_1}{2\pi r^2} N(x^q) dS_q$$

を  $pq$  要素とする  $(m+n) \times n$  サイズの行列、 $N(x^q)$  は境界上の線分要素の内挿関数である。

**2.2.2 渦の拡散方程式の離散化** 式(11)を二次元の場合について展開して微小線分あるいは微小三角形の中を積分して以下の式が得られる。

$$\{\alpha\omega(\xi^p, t)\} = [A]\{\omega\} - [B]\{H_B\} \\ + [C]\{-u \cdot \nabla\omega\} + [D]\{[\omega]_{r=0}\} \quad (13)$$

$H_B = -n \cdot \nabla\omega$  (渦度の境界上の流束)である。 $[A]$  と  $[B]$  は

$$A^{pq} = \nu \int_0^t d\tau \int_{\Delta S_q} F(x^q, t; \xi^p, \tau) N(x^q) dS_q$$

$$B^{pq} = \nu \int_0^t d\tau \int_{\Delta S_q} G(x^q, t; \xi^p, \tau) N(x^q) dS_q$$

を  $pq$  要素とする  $(m+n) \times n$  サイズの行列である。また

$$F(x^q, t; \xi^p, \tau) = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial G}{\partial x_i} n_i = -n \cdot \nabla G$$

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{\exp\{-r^2/[4\nu(t-\tau)]\}}{4\pi\nu(t-\tau)}$$

である。 $\tau$  について部分積分を行って整理すると

$$A^{pq} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta S_q} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \frac{\sum_{i=1}^2 y_i n_i}{r^2} N(x^q) dA_q$$

$$B^{pq} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta S_q} E_1\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right) N(x^q) dS_q$$

$$E_1(w) = \int_w^\infty \frac{\exp(-w)}{w} dw \quad (\text{積分指数関数})$$

観測点とソース点が一致した  $p = q$  の場合には  $A^{pq}$  は弱い特異点となるので、Cauchyの主値計算を行って Free Term を、特異点を除外した数値積分の値に加算する必要がある。 $[C]$  と  $[D]$  は

$$C^{pq} = \int_0^t d\tau \int_{\Delta A_q} G(x^q, t; \xi^p, \tau) M(x^q) dA_q$$

$$D^{pq} = \int_{\Delta A_q} G(x^q, t; \xi^p, 0) dA_q$$

をそれぞれ  $pq$  要素とする  $(m+n) \times (m+n)$  サイズの行列である。 $\tau$  について部分積分を行って整理すると

$$C^{pq} = \frac{1}{4\pi\nu t} \int_{\Delta A_q} E_1\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right) M(x^q) dA_q$$

となる。次に示す  $[D]$  は  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  のようなたみこみ積分ではない。

$$D^{pq} = \int_{\Delta A_q} \frac{\exp(-r^2/4\nu t)}{4\pi\nu t} dA_q$$

### 2.3 境界上の値の決定

Fig.3のように固体壁に沿った流れの方向を  $x_1$  軸の方向にとると固体壁上で流体がスリップしない条件は式(12)から

$$\begin{aligned} [E_{2B}]\{\omega_B\} = & -\{\beta u_1\} - [E_{2I}]\{\omega_I\} \\ & + [F_S]\{u_1\} + [F_V]\{u_2\} \end{aligned} \quad (14)$$

において、固体壁上でスリップを許した時のポテンシャル流れと Vortical Velocity  $u$  (正確に云うと  $u_v$ ) の和がゼロになるように  $\omega_B$  を定めることである。なお、添字  $B$  は境界上の値、 $I$  は領域内の値を示す。

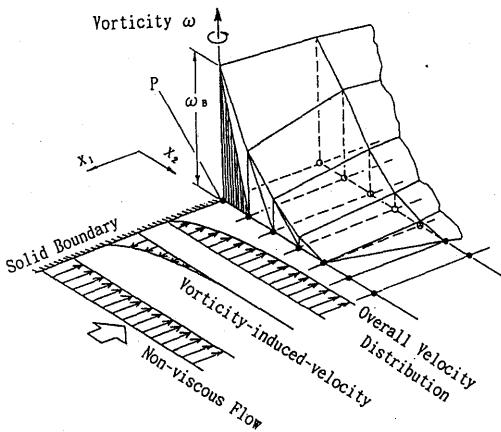


Fig. 3 Determination of Vorticity on Solid Wall Boundary.

一方、式(13)で  $P(\xi_i)$  点を流路領域側から境界に近づけると、 $P$  点が領域内にあるので  $\alpha = 1$  であって

$$\begin{aligned} \{\omega(\xi^p, t)\} = & [A]\{\omega\} - [B]\{H_B\} \\ & + [C]\{-u \cdot \nabla \omega\} + [D]\{[\omega]_{r=0}\} \end{aligned}$$

と書くことができる。渦度が固体壁境界上で(14)式によって決定されるので渦度の流束の方は、次の式(15)を満足する様に定めねばならない。

$$\begin{aligned} [B]\{H_B\} = & -\{\omega_B\} + [A]\{\omega_B\} \\ & + [C]\{-u \cdot \nabla \omega\} + [D]\{[\omega]_{r=0}\} \end{aligned} \quad (15)$$

ここで  $\omega_B$  は境界上の渦度の値である。

Fig.4(a)のように小さな領域  $A$  を取り囲んだ境界  $S$  を設定すると、緒言の中で言及した通り、境界上の速度の積分によって固体壁境界の場合の鏡像渦のみならず、Fig.4(a)の上流と下流の渦度分布の影響も取り込むことができる。すなわち、速度を境界  $S$  上で積分すれば、固体壁境界の鏡像渦だけではなく上流と下流の固体壁面近くの渦層の影響も計算に取り込ま

れるので、限られた範囲の格子点のみを考慮にいれた小さな支配方程式で計算を行い、境界  $S$  で囲まれた領域  $A$  を順次移動させて流域全体の流れを求めることができる。

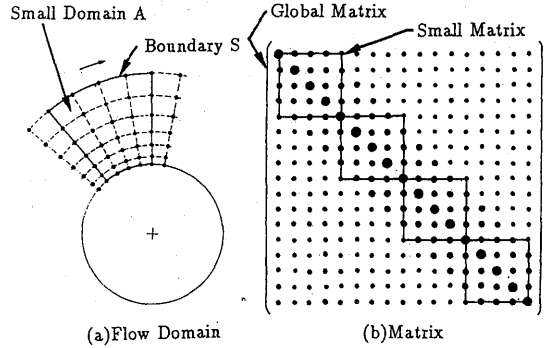


Fig. 4 Small Domain and Corresponding Small Matrix.

### 2.4 内点の計算

未知数であった境界上の渦度が式(14)から決定できるのでこれを式(12)に戻すと領域内部の任意の格子点の速度が計算できる。また、境界上の渦度が既知になれば式(15)から境界上の渦度の流束が決定できるので、これを式(13)に戻すと領域内部の任意の位置の渦度が計算できる。このように渦の拡散式と速度の式から流れを求めることができる。

### 3. 計算

先ず、要素内を積分して行列の要素を求めるに際し、領域内は三角形要素に分割した。要素内では渦度分布が線形であると仮定し、多点のガウスの求積法を用いて計算した。渦度の拡散方程式の積分指数関数は Abramowitz 他のハンドブックの級数展開による方法<sup>(5)</sup>で計算した。

物理量の変化の少ない流れの方向の格子間隔を流れに垂直方向の格子間隔に較べてかなり粗くしている。そのような場合でも、ガウスの求積法が適切な計算値を生むように配慮をした。すなわち、渦度の拡散計算では着目している格子点の極近傍だけが意味のある数値を持って寄与する。そこで三角形要素をサブの三角形に分割して、着目している格子点の極近傍のサブ三角形の計算を行い、その結果を元の三角形要素の格子点と関係づけて計算を行った。

半無限長の平板を、 $Re$  数が  $10^3$  と  $10^5$  の場合について計算した。速度分布が平衡状態になるまで、すなわち、初期には Rayleigh の流れで覆われていた平板が Blasius 型の流れで覆われてしまうまで計算を繰り返し行った。

円柱の計算は解析例あるいは実験結果が公表されている  $Re$  数が 1000 と 1200 について出発流れの計算を行った。格子を円柱の中心点を通る放射状の直線と同心円で構成し、円柱に近い部分では半径方向の格子間隔を円周方向の間隔よりも狭い目に設定し、円柱から遠い部分はほぼ正方形の格子になるように計画した。分割数は円周方向の半円周分を 120 分割、半径方向を 127 分割とし、流れが上下対称であるという仮定のもとに上半分のみの計算を実施した。

#### 4. 計算結果と考察

##### 4.1 平板

Fig.5 は  $Re$  数が  $10^3$  と  $10^5$  の平板の計算結果で、計算を行った区間のほぼ中央の速度分布と Blasius の解を比較した図である。今回の平板の計算では流れの方向にはクーラン数を 1 以下にするのに十分な粗さの格子間隔を設定し、一方、渦度の粘性拡散を精度よく計算するために流れに直角な方向の格子間隔は充分細かく設定して、かなり高い  $Re$  数のもとの計算を実施した。計算の結果得られた境界層内の速度分布は、Blasius の解にかなり近いものである。これらの計算例は、境界要素法によって粘性流れの全体をどの程度示せるかを検討するために実施したもので、境界層内の速度分布の細部を論じることを目的にはしていないが、 $Re = 10^3$  と  $10^5$  の平板近くの速度勾配の違いは Blasius の速度分布の  $Re$  数依存性<sup>(6)</sup> でおおよそ説明できる大きさのものであり、粘性流れの解析法としてほぼ妥当と思われる。

流れの方向の格子間隔を大きくとったため Fig.4(a)

の境界  $S$  の上流と下流部分から内部の格子点までの距離が非常に大きくなるので、式 (15) を解いて定める渦度の流束の影響は内部の格子点には及ばなくなる。従って、式 (15) は固体壁面上のみで解けばよく、支配方程式が非常に小規模となる利点がある。

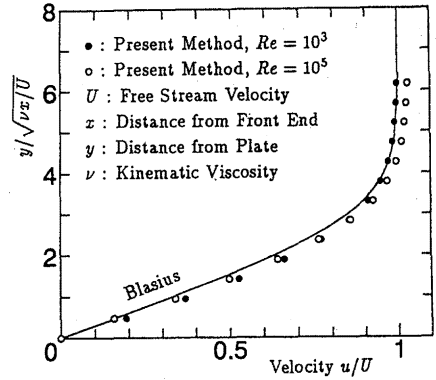


Fig. 5 Velocity Profile on Flat Plate at Mid Point.

##### 4.2 円柱

$Re = 1000$  の  $Ut/d = 0.5 \sim 2.0$  の計算結果と Ta Phuoc Loc の差分法による結果<sup>(7)</sup> の比較を Fig.6 に示す。双子渦の長さの成長の様子を Fig.7 に示す。流線や双子渦の成長の様子は、Kawamura 等<sup>(8)</sup> や C.L.Rumsey 等<sup>(9)</sup> の差分法による計算結果、および、Taneda<sup>(10)</sup> の実験結果とよく一致している。

次に、剥離点の移動の様子を Kawamura 等<sup>(8)</sup> や C.L.Rumsey 等<sup>(9)</sup> の差分法による計算結果と Nagata 等<sup>(11)</sup> の実験結果とともに Fig.8 に示す。時刻  $1 \leq Ut/d$  以降では剥離点は  $70^\circ \sim 80^\circ$  となり、Kawamura 等<sup>(8)</sup> や C.L.Rumsey 等<sup>(9)</sup> の結果よりは剥離点の角度が若干小

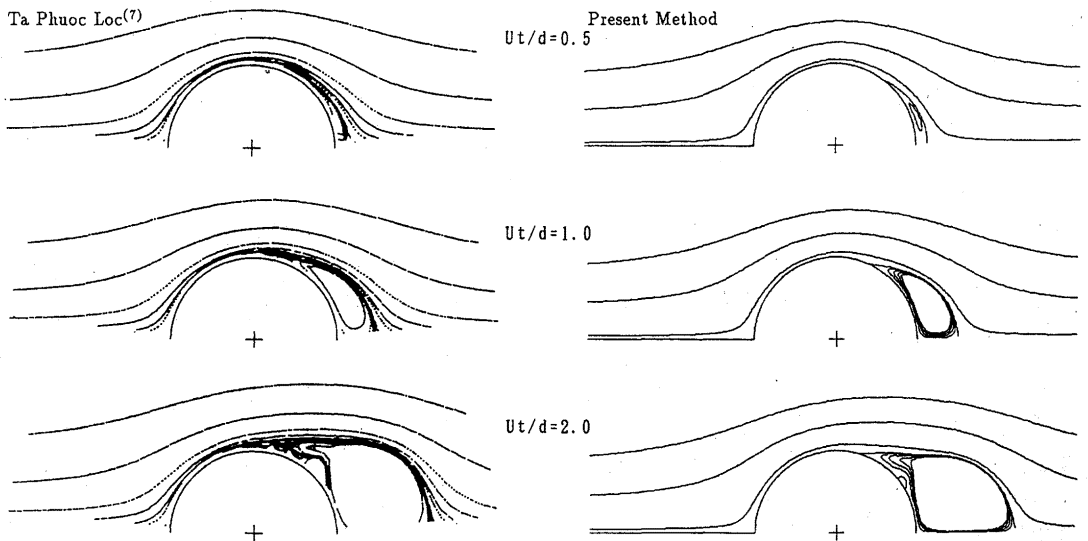


Fig. 6 Stream Lines of Present Method and Ta Phuoc Loc<sup>(7)</sup>. ( $Re = 1000$ )

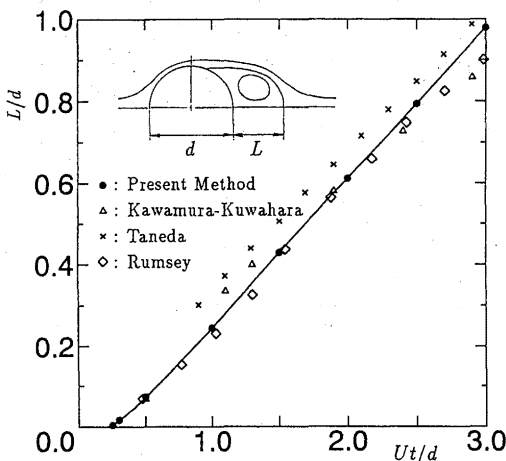


Fig. 7 Time History of Wake Region Size.

( $Re = 1200$ )

さいが、 $Ut/d$ の小さい時刻に後方よみ点近傍で剥離を起こし時間の経過とともに前方に移動して行く過程の最初の部分は、C.L.Rumsey等<sup>(9)</sup>の計算結果、および、Nagata等<sup>(11)</sup>の実験結果に近い値となっている。

J.C.Wu等が $Re=40$ 程度の円柱回りの流れの計算例を示していたのに比べて今回の計算例がかなり高い $Re$ 数を達成できたのは、流れに直角方向の格子間隔を極度に狭くし、それに伴って非常に細長くなる三角形要素等の中を更にサブの小さな三角形に細分する等の工夫を行って、数値積分の精度を確保することができたためであろう。

#### 4.3 領域を分割したことの効果

計算例では円柱の回りに細長いセクター状の小さな領域 $A$ を設け、その領域内の渦度がセクターの中央の格子点に及ぼす影響の面積積分の結果と、領域 $A$ を囲む境界 $S$ 上のVortical Velocityが中央の格子点に及ぼす影響の線積分の結果を合算して中央部の格子点のVortical Velocityを算出している (Fig.4(a)参照)。このことは、大型の行列の対角線近傍のみを切りとった小型の行列 (Fig.4(b)参照) で計算を行うことを意味し、しかも、行列の中の遠い点の影響を示す部分を境界 $S$ 上の線積分で完全に補っている。この様な観点から、小規模の計算の繰り返しを行って流域全体の流れの解析を行ったものである。

#### 5. 結語

流れの方向にはクーラン数の条件を満たす格子間隔を選び、流れと直角方向には渦の粘性拡散を捕捉するのに十分な細かさの格子間隔を選ぶことによりかなり高い $Re$ 数の流れを扱うことができた。

円柱回りの出発流れの双子渦の生成等の状況は差

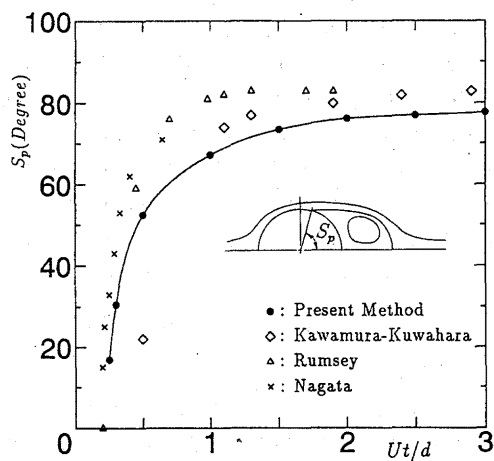


Fig. 8 Time History of Separation Angle.

( $Re = 1200$ )

分法による解析例や実験結果とおよそ一致するが、時刻 $1 \sim Ut/d$ 以降での剥離点は差分法による他の計算例より若干小さい結果が得られた。

領域を分割して小さな境界を設け、境界上の速度の積分によって境界よりも外の渦度の影響を取り込む方法をとったので、小さな支配方程式で取り扱うことができ、各回の計算量を減らすことができた。

本研究に際し、助言を頂いた京都大学の赤松教授に御礼を申し上げます。

#### 参考文献

- (1) Banerjee,P.K., and Butterfield,R., Boundary Element Methods in Engineering Science, (1981), 333-336, 217, McGraw-Hill Book Co.(UK).
- (2) Wu,J.C., and Thompson,J.F., Numerical Solution of Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations Using An Integro-Differential Formulation, Pergamon Press, Computers & Fluids, Vol.1, (1972), 197-215.
- (3) Wu,J.C., and Rizk,Y.M., Integral Representation Approach for Time Dependent Viscous Flows, International Conference on Numerical Methods of Fluid Dynamics(6th), (1979), 559.
- (4) Morino,L., Boundary integral equations in aerodynamics, Appl Mech Rev, Vol.46, No.8, (1993).
- (5) Abramowitz,M., and Stegun I.A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, Issued Jun.1964, Seventh Printing May 1968 with corrections, 229.
- (6) Rosenhead,L., Laminar Boundary Layers, (1963), Oxford University Press, 229.
- (7) Ta Phouc Loc, Numerical analysis of unsteady secondary vortices generated by an impulsively started circular cylinder, J. Fluid Mech., Vol.100, (1980), 111.
- (8) Kawamura,T., and Kuwahara,K., Computation of High Reynolds Number Flow around a Circular Cylinder with Surface Roughness, AIAA Paper, No.84-0340(1984).
- (9) Rumsey,C.L., Details of Computed Flowfield over a Circular Cylinder at Reynolds Number 1200, Forum on Unsteady Flow Separation, FED-Vol.52, ASME(1987).
- (10) Taneda,S., Visualization Experiments on Unsteady Viscous Flow around Cylinders and Plates, IUTAM Symp., 2(1971), 1165.
- (11) Nagata,H., Minami,K., and Murata,Y., Initial Flow Past an Impulsively Started Circular Cylinder, Bull. JSME, Vol.22, No.166, (1979), 512.