

## Helmholtz 方程式の固有値解析のためのアダプティブ境界要素

野替一義\* 神谷紀生\*\* 安藤英司\*\*\*

ADAPTIVE BOUNDARY ELEMENTS FOR EIGENVALUE ANALYSIS OF THE HELMHOLTZ EQUATION

Kazuyoshi NOGAE Norio KAMIYA and Eiji ANDOH

A method for determination of eigenvalues of the Helmholtz equation by using adaptive boundary elements is presented. The h-version mesh refinement scheme as well as an efficient eigenvalue determination method by virtue of the Newton iteration are employed. Subdivision of selected elements is controlled by their influence on the error of the determinant of the system coefficient matrix at each iteration level. Example computations are shown to investigate the potentiality of the proposed scheme.

Key Words : Adaptive Boundary Element Method, Eigenvalue Analysis, Helmholtz Equation

### 1 はじめに

境界要素法(BEM)や有限要素法(FEM)で得られた結果の計算精度は要素分割に本質的に依存するので、有効な解を得るためには解析者の習熟によって要素分割を行う必要がある。そこで、この手間を省き、精度を向上させるため、自動的に誤差評価し、要素分割を行う方法として適応要素(アダプティブ要素あるいはメッシュ)の研究が必要になる。

アダプティブ法は数学的および数値実験的立場から研究が進み、FEMにおいては一部実用化されるまでに至っている。しかしFEMにおいても固有値解析に関するものはきわめて少ない。その理由は、固有値が要素ごとの値ではなく、対象となる領域全体について定められる値であるので、通常の場合の問題の解析とは異なった誤差評価を行わなければならないこと、および固有値に対応するモードごとにアダプティブ要素分布が変化することによる。Fribergら<sup>(1,2)</sup>は階層的アダプティブ法を用いた方法を誘導しており、またCookら<sup>(3)</sup>は運動エネルギーとひずみエネルギーに基づくアダプティブ法を構成している。現在のところFEMによるものは、著者らの知る限り、これらだけである。

本研究では、Helmholtz方程式のBEM固有値解析にお

けるアダプティブ要素を構成する方法を考える。従来、BEMにおけるアダプティブ法は、FEMにおけるものを流用することがしばしば行われた。しかし、元来BEMはFEMとは異なる指導原理に基づいて定式化されたものであり、その上固有値は要素や節点値に直接付随するものでないので、別の考えに基づくアダプティブ要素の構成を考えなければならない。以下では、著者らの最近の研究において提案したBEMによる固有値解析法<sup>(4,5)</sup>に関連して、固有値の決定精度に与える要素分割の効果に基づく、アダプティブh法(要素細分化法)を提案する。解析例によってその有効性を検討する。

### 2 多重相反法による固有値解析

アダプティブ境界要素を構成するためには、BEMによって固有値の決定が精度良く、しかも効率的に行われることが前提になる。またアダプティブ要素の構成法はこの決定法に関連する。以下では固有値を決定するために、安藤ら<sup>(4,5)</sup>による多重相反境界要素定式に基づくNewton反復法を用いるので、まずその概略を述べる。

ここで考えるHelmholtz方程式は次のように与えられる。

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

\* 非会員 名古屋大学大学院

\*\* 学識会員 名古屋大学情報文化学部 464-01 名古屋市中千種区不老町 Tel. 052-781-5111 (内線4474)

\*\*\* 非会員 三菱電機(株)

$u$  はポテンシャルであり、 $k$  は波数である。 $\Omega$  は境界 $\Gamma$  で囲まれた閉領域である。Laplace 方程式の基本解  $u_0^*$  を用い、式(1)を積分方程式に変換すると

$$cu + \int_{\Gamma} (uq_0^* - qu_0^*) d\Gamma = k^2 \int_{\Omega} uu_0^* d\Omega \quad (2)$$

となる。ここで  $c$  は定数であり、式(2)を適用する点の位置によって定められる。また  $q = \partial u / \partial n$ 、 $q_0^* = \partial u_0^* / \partial n$  であり、 $n$  は境界における外向き単位法線ベクトルである。

ここで次式を満たす関数  $u_j^*$  を考える。

$$\nabla^2 u_{j+1}^* = u_j^* \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

これを式(2)の領域積分項に代入し、式(1)および Green の公式により変形を  $N$  回繰り返すと次に示す境界積分方程式が得られる(なお式(2)の右辺と類似の領域積分項は  $N$  を十分大きくとれば 0 に近づくことが示されるので、これを省略する<sup>(6)</sup>)。

$$cu + \sum_{j=0}^N (-k^2)^j \int_{\Gamma} uq_j^* d\Gamma = \sum_{j=0}^N (-k^2)^j \int_{\Gamma} qu_j^* d\Gamma \quad (4)$$

ただし、 $q_j^* = \partial u_j^* / \partial n$  である。

これを離散化しマトリックス表示すると次のようになる。

$$\sum_{j=0}^N (-k^2)^j H_j u = \sum_{j=0}^N (-k^2)^j G_j q \quad (5)$$

ここで、行列  $H_j$ 、 $G_j$  は基本解  $q_j^*$ 、 $u_j^*$  と内挿関数の積を境界要素上で積分して得られるマトリックス、 $u$ 、 $q$  は境界節点上での  $u$ 、 $q$  の値を成分に持つベクトルである。すべての節点について式(5)を書き下したものをまとめて次のように表す。

$$H(k)u = G(k)q \quad (6)$$

$H$  および  $G$  は  $k^2$  の多項式で表される。

次に連立方程式(6)に次のような同次境界条件を与える。

$$\left. \begin{array}{l} u = 0 \quad (\text{on } \Gamma_u) \\ q = 0 \quad (\text{on } \Gamma_q) \end{array} \right\} \quad (7)$$

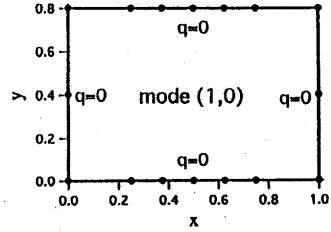
式(7)を式(6)に代入し、変形すると

$$A(k)x = B(k)o \quad (8)$$

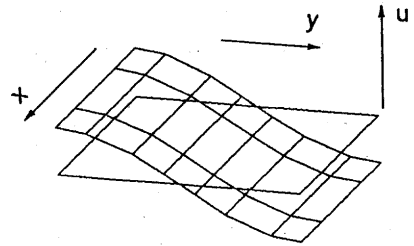
となる。ただし、 $x$  は 0 でない  $u$ 、 $q$  の成分からなる未知数ベクトルである。式(8)が連立方程式(6)の境界条件(7)に対する固有値問題である。これが意味のある解  $x \neq 0$  を持つためには  $A(k)$  の行列式が 0、すなわち

$$\det A(k) = 0 \quad (9)$$

となる必要がある。この行列式(9)の分布から、固有値を求めるとみかけの固有値が出たり、行列式の零



(a)



(b)

Fig.1: Mode(1,0) (a)adaptive mesh (b)mode shape

点を特定しにくいなどの欠点があるため、文献<sup>(4,5)</sup>では次のような固有方程式を定義した。

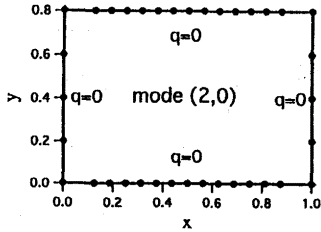
$$\eta \equiv \frac{\det A(k)}{\det R(k)} = 0 \quad (10)$$

ただし、 $R(k)$  は、 $A(k)$  の任意の列ベクトルを  $B(k)$  の対応する列ベクトルで入れ換えたものである。 $\eta$  の分布から Newton 法により固有値を求める方法は文献<sup>(4,5)</sup>に示してある通り、 $A$  と  $R$  が  $k^2$  の多項式になることにより、また  $\eta$  の分布が反復計算のしやすい形となるために極めて効率が高くなる。

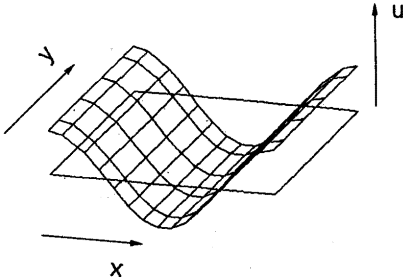
### 3 誤差評価と要素の細分割

与えられた要素分割に対応して連立方程式(6)が得られたとする。ここで、ある 1 つの境界要素(要素  $m$  とする)を細分割したとき式(6)は次のように変更される。

$$\bar{H}_m u_m = \bar{G}_m q_m \quad (11)$$



(a)



(b)

Fig.2: Mode(2,0) (a)adaptive mesh (b)mode shape

ここで

$$\bar{H}_m = \begin{bmatrix} H^{(m-1)} & \bar{H}^{(m-1, m_{\Gamma_m})} \\ \bar{H}^{(m_{\Gamma_m}, m-1)} & \bar{H}^{(m_{\Gamma_m}, m_{\Gamma_m})} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\bar{G}_m = \begin{bmatrix} G^{(m-1)} & \bar{G}^{(m-1, m_{\Gamma_m})} \\ \bar{G}^{(m_{\Gamma_m}, m-1)} & \bar{G}^{(m_{\Gamma_m}, m_{\Gamma_m})} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$H^{(m-1)}$ 、 $G^{(m-1)}$ は最初のマトリックス $H$ 、 $G$ から $m$ 番目の成分を除いたものであり、 $\bar{H}^{(m-1, m_{\Gamma_m})}$ 、 $\bar{H}^{(m_{\Gamma_m}, m-1)}$ 、 $\bar{H}^{(m_{\Gamma_m}, m_{\Gamma_m})}$ 、 $\bar{G}^{(m-1, m_{\Gamma_m})}$ 、 $\bar{G}^{(m_{\Gamma_m}, m-1)}$ 、 $\bar{G}^{(m_{\Gamma_m}, m_{\Gamma_m})}$ は細分化された要素によって新たに得られた係数マトリックスである。また $m_{\Gamma_m}$ は $m$ 番目の要素上での自由度を示す。

式(11)に境界条件(7)を与えて書き直すと、次のようになる。

$$\bar{A}_m(k) \bar{x}_m = \bar{B}_m(k) \mathbf{0} \quad (14)$$

したがって、1つの要素 $m$ を細分化したとき、式(10)と同様に、固有値は次の式から求めることができる。

$$\eta_m \equiv \frac{\det \bar{A}_m}{\det \bar{R}_m} = 0 \quad (15)$$

なお、 $\bar{R}_m$ は $R$ を構成する方法と同様に $\bar{A}_m$ と $\bar{B}_m$ から決定される。

あらかじめ与えられた要素分割によって式(10)から決定される固有値を $\hat{k}_i$ とする。

$$\eta(\hat{k}_i) = 0 \quad (16)$$

ここで添字 $i$ は $i$ 番目の固有値を示す。次に、この $\hat{k}_i$ を式(15)の左辺に代入すれば、一般に等号は成り立たない。

$$\eta_m(\hat{k}_i) \neq 0 \quad (17)$$

そこで式(17)に対応して次のような $\gamma_{im}$ を定義する。

$$\gamma_{im} = \det \bar{A}_m(\hat{k}_i) \quad (18)$$

この $\gamma_{im}$ は $\det A(\hat{k}_i)$ と $\det \bar{A}_m(\hat{k}_i)$ の差を示す。つまり、式(14)を解いて得られる固有値を $k_{im}$ とすると、 $\gamma_{im}$ は $\hat{k}_i$ と $k_{im}$ の差に直接関係する量である。初期要素を細分化したもによって得られる結果はより正解に近いものと考えるのは自然であるから、 $\gamma_{im}$ は要素 $m$ を細分化したことによる解の修正度合を表すもの、言い替れば細分化される前の要素 $m$ の固有値に対する誤差表示式とみなすことができる。

$\gamma_{im}$ は、すべての要素 $m=1, \dots, M$ (境界要素数を $M$ とする)について計算すれば、個々の要素を細分化したとき、固有値に及ぼす誤差の度合の分布を表すものとなる。したがって、この値の大きい要素を選択的に細分化することが考えられ、たとえば次のようになる。 $i$ 番目のモードにおける上記の誤差の平均値 $\gamma_{i,ave}$ は

$$\gamma_{i,ave} = \frac{\sum_{j=1}^M |\gamma_{ij}|}{M} \quad (19)$$

となるので、

$$|\gamma_{im}| > \gamma_{i,ave} \quad (20)$$

を満たすとき $h$ 法により要素 $m$ を細分化するものとする。このような方法を順次繰り返し、解の収束には、 $s$ と $s-1$ 回目の固有値の相対的割合が十分小さくなったかどうかを判断する。

$$\text{Max}(e_i^s) \equiv \frac{k_i^s - \hat{k}_i^{s-1}}{k_i^s} < \varepsilon \quad (21)$$

具体的な解析の手順はつぎのようになる。

1. まず、形状、境界条件、波数 $k$ の範囲を入力し、初期要素分割について多重相反式化による係数マトリックスを計算する。境界条件を代入し、指定された $k$ の範囲内で $\eta$ の概略の分布から、Newton法により固有値を決める。このとき用いる初期要素分割は、理想的には問題を定義するのに必要な最も少ないものによる。ある程度細かい要素を用いれば、最終結果を得るためのアダプティブイタレーションの回数は少なくてすむ。

Table 1: Example 4.2

| adaptive analysis |      |      |      | equal 72elms |
|-------------------|------|------|------|--------------|
| 10th              | 11th | 12th | 13th |              |
| 1.50              | 1.51 | 1.51 | 1.51 | 1.50         |
| 3.40              | 3.40 | 3.40 | 3.40 | 3.40         |
| 4.59              | 4.60 | 4.60 | 4.59 | 4.59         |
| 6.28              | 6.28 | 6.29 | 6.28 | 6.25         |
| 6.51              | 6.51 | 6.50 | 6.50 | 6.53         |
| 8.03              | 8.10 | 8.03 | 8.03 | 8.01         |
| 8.34              | 8.36 | 8.35 | 8.35 | 8.33         |
| 9.55              | 9.55 | 9.56 | 9.56 | 9.91         |

2. 次に誤差解析を行う。要素の分割は最も単純な2等分割によるものとし、誤差解析は考える $k$ の範囲で一番小さい固有値( $i=0$ )からはじめる。要素 $m$ を2分割し、これに対応する $\gamma_{im}(i=0)$ を求める。初期要素分割のすべての要素について $\gamma_{im}$ を求め、 $\gamma_{i,ave}$ を計算する。式(20)の条件を満たす要素を2分割し、新しい要素分割を決定する。この要素分割において固有値を計算し、式(21)より $e_i$ を計算する。考える $k$ の範囲内に含まれるすべてのモードについて $e_i$ が $\epsilon$ より小さければ計算を終了し、そうでなければ $e_i$ が最大の固有値に対して再び誤差解析を行い、すべての $e_i$ が $\epsilon$ より小さくなるまで解析を繰り返す。

以上がここで用いたアダプティブ要素構成と固有値解析のプロセスであるが、注意する必要があることは、 $e_i$ が最大となる固有値に対して誤差解析を行うという点である。固有値はそれぞれ異なる内部モードが対応するから、各モードごとにアダプティブ要素分割を行うほうが精度がよくなるはずであるが、そのようにすると固有値の数と同じだけのアダプティブ要素が必要になるので、計算の効率が悪くなる。そのため、ある範囲の $k$ に対するすべての固有値に対して共通の要素分割で高い精度を得、かつ効率をよくするために上で示した方法を用いた。

#### 4 解析例

以下では、境界要素法として最も単純な一定要素を用い、初期分割としては、問題の幾何学的条件と境界条件を表示するために必要な最小の分割に近いものから計算を行うものとする。

##### 4.1 モードと要素分割

前章で述べたように波数 $k$ の範囲を決めたとき、その中にはいくつかの固有値、固有モードが存在する。ま

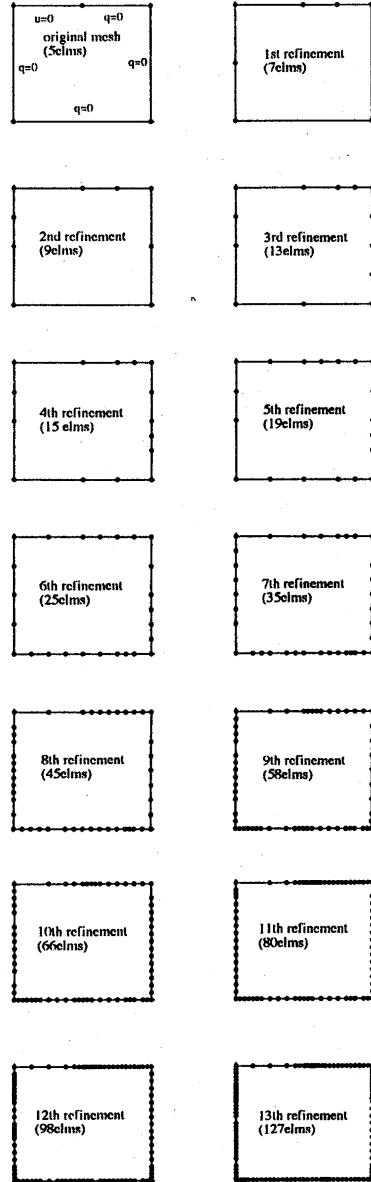


Fig.3: Example 4.2

Table 2: Entire adaptive process for Ex.4.2

| original | 1st   | 2nd   | 3rd    | 4th    | 5th    | 6th    | 7th    | 8th    | 9th    | 10th   | 11th   | 12th   | 13th    |
|----------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| 5elms    | 7elms | 9elms | 13elms | 15elms | 19elms | 25elms | 35elms | 45elms | 58elms | 66elms | 80elms | 98elms | 127elms |
| 1.38     | 1.41  | 1.42  | 1.42   | 1.42   | 1.46   | 1.46   | 1.46   | 1.47   | 1.49   | 1.50   | 1.51   | 1.51   | 1.51    |
| 3.03     | 2.92  | 2.84  | 2.70   | 2.68   | 2.64   | 3.39   | 3.39   | 3.39   | 3.40   | 3.40   | 3.40   | 3.40   | 3.40    |
| 3.97     | 3.94  | 3.80  | 3.41   | 3.39   | 5.60   | 4.58   | 6.28   | 6.29   | 4.58   | 4.59   | 4.60   | 4.60   | 4.59    |
|          | 8.70  | 6.53  | 4.57   | 4.57   | 6.65   | 6.28   | 7.99   | 6.49   | 6.28   | 6.28   | 6.28   | 6.29   | 6.28    |
|          |       | 9.35  | 5.70   | 5.67   | 8.60   | 6.54   | 8.15   | 7.98   | 6.51   | 6.51   | 6.51   | 6.50   | 6.50    |
|          |       |       | 6.76   | 6.30   | 9.61   | 8.15   |        | 8.28   | 8.03   | 8.03   | 8.10   | 8.03   | 8.03    |
|          |       |       | 8.26   | 6.61   |        | 9.59   |        |        | 8.32   | 8.34   | 8.36   | 8.35   | 8.35    |
|          |       |       |        |        |        | 9.97   |        |        | 9.55   | 9.55   | 9.55   | 9.56   | 9.56    |

ずはじめに、特定のモードをきめたときにアダプティブ要素がどのように構成されるかを検討する。 $L_x = 1.0$ 、 $L_y = 0.8$ の長方形領域の境界が剛壁であるとき、モード(1,0)と(2,0)について解析を行った。この時の固有値の解析解は次の式で与えられる。

$$k_e = \pi \sqrt{\left(\frac{s}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{t}{L_y}\right)^2} \quad (s, t = 0, 1, \dots) \quad (22)$$

ここで、 $s$ 、 $t$ はそれぞれ $x$ 、 $y$ 方向のモード数を示す。

解析には、一定要素を用い、初期要素は各辺を2等分し、合計8要素とした。(1,0)のときは $k = 3.0 \sim 3.5$ 、(2,0)のときは $k = 6.0 \sim 7.0$ で解析を行った。行列 $H_j$ 、 $G_j$ の多項式の次数は成分の絶対値の最大値が解析範囲の上限で $10^{-12}$ より小さくなるまでとった。また、 $Max(e_j^e)$ が $10^{-3}$ より小さくなるまで解析を行った。得られた固有値はそれぞれ3.14と6.28で、均一18要素と36要素で得られた固有値はそれぞれ3.15と6.29である。最終要素分割とその時の内部モードをFigs.1,2に示す。固有値が対応するモードによってアダプティブ要素分布が変化する。この結果から、モードの変化の大きい部分に小さい要素が配置されることがわかる。また、均一な要素分割よりも同等以下の要素数で精度良く解を得た。

#### 4.2 境界条件が変化する長方形

例題4.1と同じ形状寸法の長方形領域についてFig.3に示すような境界条件を与えたものを、 $k = 0.1 \sim 10.0$ の範囲で $Max(e_j^e)$ が $10^{-3}$ より小さくなるまで解析を行った。初期要素が5要素としてアダプティブイタレーションを開始した結果と、アダプティブ法を用いない均一72要素のものについての解析結果をTables 1,2およびFig.3に示す。解析解がないので示していないが、本法を用いた場合の最終要素分割は特異点の付近を細かく分割し、モードの特異性を良く表していると考えられる。均一72要素

の結果は全体に良い結果を示しているが、9.55(9.56)に対する結果はかなりの違いがあり、特異点のある問題では、より高次の固有値については均一分布はふさわしくないことを示していると思われる。固有値は個々の節点に付随する値ではないが、やはりこのような問題においてはアダプティブプロセスが必要になることを示している。

#### 5 まとめ

本研究ではHelmholtz方程式の境界要素法固有値解析に対するアダプティブ要素構成法として、一つの要素を細分割して得られる新たな行列式 $\gamma_{ij}$ をその要素の固有値に対する誤差として定義し、アダプティブh法によって要素分割を行うという方法を提案した。

固有値解析のアダプティブ法が他のアダプティブ法と異なる点は固有値は領域全体の値であるので要素に対応した固有値の誤差を表すものを定義しなければならないことと、固有値解析における最適要素分割はそれぞれの内部モードによって異なるという2点である。

単純な境界条件については、均等分割によっても妥当な結果を得ることは可能であるが、複雑な境界条件については、アダプティブ法に基づく解析が必要であると思われる。

#### 参考文献

- (1) Friberg, P. O., An error indicator for the generalized eigenvalue problem using the hierarchical finite element method, Int. J. Num. Meth. Eng., **23**, 91-98, 1986
- (2) Friberg, O., Möller, P., Makovička, D. and Wiberg, N. E.,

An adaptive procedure for eigenvalue problem using the hierarchical finite element method, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **24**, 319-335, 1987

- (3) Cook, R. D. and Avrashi, J., Error estimation and adaptive meshing for vibration problems, *Comp. Struct.*, **44**, 619-626, 1992.
- (4) 安藤英司、神谷紀生、Helmholtz 方程式の境界要素法固有値解析、*日本機械学会論文集(C編)*、57 卷、543 号、3457-3462、1991
- (5) 安藤英司、野替一義、神谷紀生、Helmholtz 方程式の境界要素法固有値解析(第 2 報、三次元問題と定式化の理論的検討)、*日本機械学会論文集(C編)*、58 卷、554 号、2934-2938、1992
- (6) Kamiya, N., and Andoh, E., A note on multiple reciprocity boundary element method : Neglect of domain term, *Eng. Anal. Bound. Elms.*, **10**, 273-275, 1992