

境界要素法による熱弾性問題の設計感度解析

松本 敏郎*, 田中 正隆*, 石井 昇**, 畠口 正樹***

BOUNDARY ELEMENT DESIGN SENSITIVITY ANALYSIS OF THERMOELASTIC PROBLEMS

Toshiro MATSUMOTO, Masataka TANAKA, Noboru ISHII and Masaki HATAGUCHI

This paper is concerned with the design sensitivity analysis in thermoelastic problems. The domain integral originated from the thermal strain term of the governing equation results in boundary integral terms if there is no heat source. The boundary integral equation for thermoelastic problems regularized up to non-singular order is first presented. It is then differentiated with respect to the design variable and a sensitivity boundary integral equation is derived. Some numerical results are presented to show the effectiveness of the method.

Key Words : Boundary element Method, Design Sensitivity Analysis, Thermoelastic Problem, Galerkin Tensor, Direct Differentiation Method

1. 緒言

熱応力を受ける弾性体の最適設計においても設計感度解析が有益である。内部発熱を有しない定常熱弾性問題は境界積分方程式に領域積分項を含むが、Galerkinテンソルを用いることにより領域積分を境界積分に変換することができる⁽¹⁾。境界要素法による感度係数の効率的な求め方として、境界積分方程式を設計変数で直接微分することにより感度係数に関する境界積分方程式を導出し、さらにそれを離散化して解く直接微分法がこれまで提案されている^{(2)~(7)}。熱弾性問題においても離散化された代数方程式を設計変数で直接微分する方法がすでに提案されている⁽⁸⁾。

本研究では熱弾性問題について境界積分方程式を設計変数で直接微分することにより、すべての境界値の感度係数を関係づける境界積分方程式を導出した。さらにその境界積分方程式を離散化することにより、すべての境界値の感度係数を求める方法の定式化を行った。また、理論に基づいた3次元BEM熱弾性設計感度解析プログラムを開発し、数値解析例によりその有効性を検討した。

2. 熱ひずみを有する弾性体の境界積分方程式

一般に熱ひずみを有する場に関する静弾性問題の支配境界積分方程式は、次式で表される。

$$\int_{\Gamma} t_{ij}^* (u_i - u_i(y)) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* t_{ij} d\Gamma + (3\lambda + 2\mu) \int_{\Omega} u_{ij,i} T(x) d\Omega, \quad y \in \Omega \quad (1)$$

ただし、 λ, μ は Lamé の定数である。ここで、式(1)の右辺第2項の領域積分を境界積分に変換するために、次の Galerkin テンソル G_{ij}^* を導入する。

$$G_{ij}^* = \frac{1+\nu}{4\pi E} r \delta_{ij} \quad (2)$$

ただし、 ν は Poisson 比、 E は Young 率、 r は 2 点 x と y の距離、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。このとき、基本解 u_{ij}^* は次式により Galerkin テンソルと関係づけられる⁽¹⁾。

$$u_{ij}^* = G_{ij,kk}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{ik,kj}^* \quad (3)$$

* 学識会員, 信州大学工学部生産システム工学科, 〒380 長野市若里500, TEL 0262-26-4101

** 非会員, プリヂストン(株)

*** 非会員, 信州大学大学院

式(1)の右辺第2項を次のように置く。

$$F_j \equiv (3\lambda + 2\mu) \int_{\Omega} u_{ij,i}^* T(x) d\Omega \quad (4)$$

式(4)に式(3)を代入して2回部分積分すると、次式を得る。

$$F_j = \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} \left\{ \int_{\Gamma} (G_{ij,ik}^* n_k T - G_{ij,i}^* T_k n_k) d\Gamma + \int_{\Omega} G_{ij,i}^* T_{,kk} d\Omega \right\} \quad (5)$$

ここで発熱項を有しない定常な温度場を仮定すると、次式が成り立つ。

$$T_{,kk} = \nabla^2 T = 0 \quad (6)$$

このとき、式(5)は次のように境界積分のみで表すことができる。

$$F_j = \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} \int_{\Gamma} (G_{ij,ik}^* n_k T - G_{ij,i}^* q) d\Gamma \quad (7)$$

ただし、

$$q = n_k T_{,k} \quad (8)$$

と置いた。ここで式(7)における $G_{ij,i}^*$ 、 $G_{ij,ik}^*$ を次式のように置いて、 $G_{ij,i}^*$ のうち材料定数を含まない部分を分離して表現しておく。

$$\bar{G}_{ij,i}^* = \frac{1+\nu}{4\pi E} \bar{G}_{ij,i}^* \quad (9)$$

$$\bar{G}_{ij,ik}^* = \frac{1+\nu}{4\pi E} \bar{G}_{ij,ik}^* \quad (10)$$

ただし、

$$\bar{G}_{ij,i}^* = r_{,j} \quad (11)$$

$$\bar{G}_{ij,ik}^* = \frac{1}{r} (\delta_{jk} - r_{,j} r_{,k}) \quad (12)$$

である。このとき、式(7)は次式となる。

$$F_j = \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma} (\bar{G}_{ij,ik}^* n_k T - \bar{G}_{ij,i}^* T_k n_k) d\Gamma \quad (13)$$

結局、境界積分方程式は次式で表される。

$$\int_{\Gamma} t_{ij}^* (u_i - u_i(y)) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij,i}^* t_i d\Gamma + F_j \quad (14)$$

3. 直接微分法を用いた感度解析

式(14)を任意の設計変数で微分することにより、

変位と表面力の感度係数に関する次の境界積分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_{ij}^* (\dot{u}_i - \dot{u}_i(y)) d\Gamma &= \int_{\Gamma} \dot{u}_{ij,i}^* t_i d\Gamma \\ &- \left\{ \int_{\Gamma} \dot{t}_{ij}^* (u_i - u_i(y)) d\Gamma + \int_{\Gamma} t_{ij}^* (\dot{u}_i - \dot{u}_i(y)) d\Gamma \right\} \\ &+ \left\{ \int_{\Gamma} \dot{u}_{ij,i}^* t_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij,i}^* \dot{t}_i d\Gamma \right\} + \dot{F}_j \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、ドット(·)は設計変数による微分を表す。ここで任意の設計変数に対する、基本解の設計変数による微分 \dot{u}_{ij}^* 、 \dot{t}_{ij}^* 、および F_j の設計変数による微分 \dot{F}_j の具体形を以下に示す。まず \dot{u}_{ij}^* は以下のように表される。

$$u_{ij}^* = u_{ij,k}^* (\dot{x}_k - \dot{y}_k) + \frac{du_{ij}^*}{dE} \dot{E} + \frac{du_{ij}^*}{d\nu} \dot{\nu} \quad (16)$$

ただし、 \dot{x}_k 、 \dot{y}_k 、 \dot{E} 、 $\dot{\nu}$ はそれぞれ、点 x_k 、 y_k の座標感度、Young率、Poisson比の感度である。式(16)の各微分項は次式で表される。

$$u_{ij,k}^* = \frac{-1}{8\pi E r^2} \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \delta_{ij} r_{,k} - \delta_{ik} r_{,j} - \delta_{jk} r_{,i} + 3r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad (17)$$

$$\frac{du_{ij}^*}{dE} = \frac{-1}{8\pi E^2 r} \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (18)$$

$$\frac{du_{ij}^*}{d\nu} = \frac{1}{4\pi E r} \frac{1}{(1-\nu)^2} \left\{ (2\nu^2 - 4\nu + 1) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (19)$$

次に \dot{t}_{ij}^* は次式で表される。

$$t_{ij}^* = \dot{C}_{mkl} u_{kj,l}^* n_m + C_{mkl} \dot{u}_{kj,l}^* n_m + C_{mkl} u_{kj,l}^* \dot{n}_m \quad (20)$$

式(20)の各微分項は以下ようになる。

$$\dot{C}_{mkl} = \frac{dC_{mkl}}{dE} \dot{E} + \frac{dC_{mkl}}{d\nu} \dot{\nu} \quad (21)$$

$$\dot{u}_{kj,l}^* = u_{kj,lm}^* (\dot{x}_m - \dot{y}_m) + \frac{du_{kj,l}^*}{dE} \dot{E} + \frac{du_{kj,l}^*}{d\nu} \dot{\nu} \quad (22)$$

式(20)の \dot{n}_m の具体形は、離散化された要素の局所座標 ξ_1 、 ξ_2 を用いると簡単に表現することができる。まず n_m は次式で表される。

$$n_m = \frac{G_m}{|G|} \quad (23)$$

ただし、

$$G_m = \varepsilon_{mjk} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} \quad (24)$$

$$|G| = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

であり, ε_{mjk} は交代記号である. 式(23)を設計変数で微分すると \dot{n}_m が得られる. すなわち,

$$\dot{n}_m = \frac{\dot{G}_m |G| - G_m |\dot{G}|}{|G|^2} \quad (26)$$

$|\dot{G}|$, \dot{G}_m は \dot{x}_i を用いて書くことができる.

式(13)を設計変数で微分した \dot{F}_j は次式で表される.

$$\begin{aligned} \dot{F}_j = & \frac{\dot{\alpha}(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma} (\bar{G}_{ij,ik}^* n_k T - \bar{G}_{ij,i}^* q) d\Gamma \\ & + \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma} \{ (\bar{G}_{ij,ik}^* n_k + \bar{G}_{ij,ik}^* n_k) T - \bar{G}_{ij,i}^* q \} d\Gamma \\ & + \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma} (\bar{G}_{ij,ik}^* n_k \dot{T} - \bar{G}_{ij,i}^* \dot{q}) d\Gamma \\ & + \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma} (\bar{G}_{ij,ik}^* n_k \dot{T} - \bar{G}_{ij,i}^* \dot{q}) d\Gamma \end{aligned} \quad (27)$$

ただし,

$$\bar{G}_{ij,i}^* = \bar{G}_{ij,ik}^* (\dot{x}_k - \dot{y}_k) \quad (28)$$

$$\bar{G}_{ij,ik}^* = \bar{G}_{ij,ikl}^* (\dot{x}_l - \dot{y}_l) \quad (29)$$

である.

\dot{F}_j の評価には境界全体の T , q , \dot{T} , \dot{q} が必要となる. これらは熱伝導問題の感度解析⁷⁾により求めることができる.

式(16), (20), (28), (29)の積分核の特異性は, 実際の計算では問題とならない. たとえば,

$$u_{ij,k}^* = O(r^{-2}), \quad u_{ij,lm}^* = O(r^{-3}) \quad (30)$$

であるが, ソース点を含む要素内の任意の点 x とソース点 y の感度の相対量が

$$x_i - y_i \approx O(r) \quad (31)$$

であることから結局,

$$u_{ij}^* = O(r^{-1}), \quad i_{ij}^* = O(r^{-2}) \quad (32)$$

である. また \dot{F}_j についても,

$$\bar{G}_{ij}^* = O(r) \quad (33)$$

を考えると,

$$\bar{G}_{ij,ik}^* = O(r^{-1}), \quad \bar{G}_{ij,ikl}^* = O(r^{-2}) \quad (34)$$

となる. したがって, \dot{F}_j の全ての被積分関数は可積分となる.

以上のことから, 式(15)は元の積分方程式と同じ特異性のオーダーを有する被積分関数のみからなっており, 通常の数値積分が可能なのがある. 式(15)を離散化して整理すると, 境界の変位, 表面力, それぞれの感度係数を関係づける次の代数方程式に帰着する.

$$[H]\{\dot{u}\} = [G]\{\dot{t}\} - [C]\{u\} + [D]\{\dot{t}\} + [F] \quad (36)$$

式(36)において未知量を左辺に, 既知量を右辺に集めると次式のように書くことができる.

$$[A]\{\dot{v}\} = [B]\{w\} - [C]\{u\} + [D]\{\dot{t}\} + [F] \quad (37)$$

この式を解くことにより全ての境界の感度係数を求めることができる.

4. 数値計算例

本手法の有効性を確かめるために, 上記の理論に基づいて開発したプログラムを用いて実際に計算を行ない, 厳密解と比較して精度を調べた. 解析モデルとしてFig.1の厚肉円筒を考え, 内・外壁で一定の温度差を有する軸対称な問題を解析した. 問題の対称性から1/4領域を計算対象として, 2次アイソパラメトリック要素を用い, Fig.2のように要素分割を行なった. 境界条件としてFig.3のように上面と下面を全てコロ受けとし, 内壁の温度を100°C, 外壁の温度を0°Cであるとした場合を考える. Young率を $E=200$ [GPa], Poisson比を $\nu=0.3$, 線膨張係数を $\alpha=18 \times 10^{-6}$ [1/°C], 熱伝導率を $\lambda=20$ [W/mK] として計算を行った. また, 円筒の上面と下面は断熱とした. この条件のもとで設計変数をYoung率, Poisson比, 線膨張係数としたときの感度解析を行った. Fig.4から6には, 各設計変数に対する辺AB上の半径方向応力の感度係数の計算結果を示す. いずれの場合も, 厳密解と良く一致した精度の良い解が得られていることがわかる.

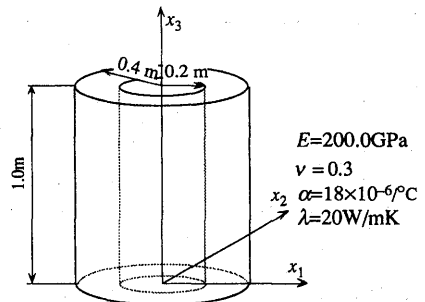


Fig.1 Thick cylinder

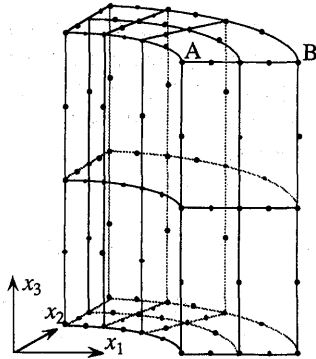


Fig.2 Boundary element discretization for a quarter region of the cylinder

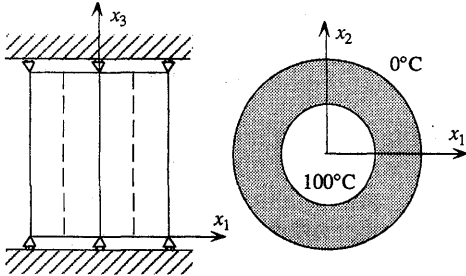


Fig.3 Boundary condition

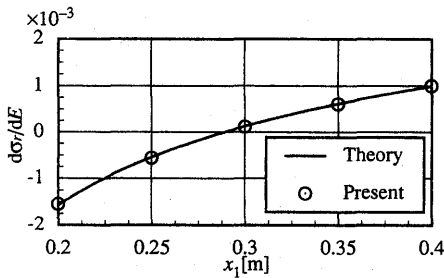


Fig.4 Results for the sensitivity coefficients of the radial stress with respect to E

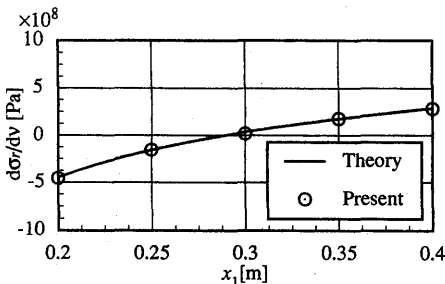


Fig.5 Results for the sensitivity coefficients of the radial stress with respect to ν

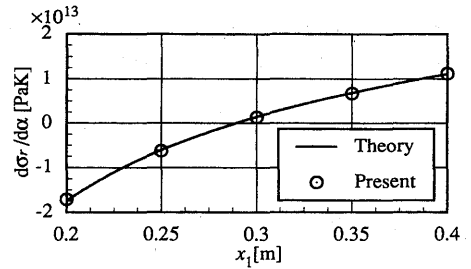


Fig.6 Results for the sensitivity coefficients of the radial stress with respect to α

5. 結言

本研究では、直接微分法を用いた定常非連成の熱弾性問題における境界の変位や表面力の感度係数の導出法を開発した。そしてその理論に基づきプログラムを開発し、その有効性を確認した。

参考文献

- (1) Danson, D. J.: A Boundary Element Formulation of Problems in Linear Isotropic Elasticity with Body Forces, *Boundary Element Methods*, Brebbia, C.A. (ed), (1981), Springer-Verlag; 田中正隆(監訳): 境界要素法の応用2, 第4章, 企画センター, (1983).
- (2) Kane, J. H.: Shape Optimization Utilizing a Boundary Element Formulation, *Betech 86: Proc. 2nd Boundary Element Technology Conf.*, Computational Mechanics Publications, (1986), pp.781-803.
- (3) Kane, J. H. and Sunil Saigal: Design Sensitivity Analysis of Solids Using BEM, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **114**, (1988), pp.1703-1722.
- (4) Barone, M. R. and Yang, R. J.: Boundary Integral Equations for Recovery of Design Sensitivities in Shape Optimization, *AIAA Journal*, Vol.26, (1988), pp.589-594.
- (5) Barone, M. R. and Yang, R. J.: A Boundary Element Approach for Recovery of Shape Sensitivities in Three-Dimensional Elastic Solids, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **74**, (1989), pp.69-82.
- (6) 松本敏郎, 田中正隆, 平田秀生: 境界要素法を用いた静弾性問題の感度解析に関する一考察, 境界要素法論文集, **7**, (1990), pp.159-164.
- (7) 松本敏郎, 田中正隆, 宮川守: 境界要素法を用いた直接微分法に基づく金型の三次元定常熱伝導設計感度解析法, 日本機械学会論文集, **59-567**, A(1993), pp.2750-2757.
- (8) Kane, J. H.: Boundary Element Design Sensitivity Analysis Formulations for Coupled Problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **7**, (1990), pp.21-32.