

# 近似代数を用いた最適設計法

依田 潔

## Design Optimization Using Approximate Algebra Approach

Kiyoshi YODA

An approach to design optimization problems is proposed using approximate algebra, wherein the system matrix equation includes symbolic parameters expressing its shape or material properties. The unknown vector components of the matrix equation are expressed as series expansions with respect to the symbolic parameters in the matrix elements. Then the problem is converted to finding unknown numerical coefficients of the series expansions. The calculated results such as potential distributions are explicitly provided as series expansions with respect to the shape or material variables. Thus design optimization problems can be solved directly by comparing the calculated distribution functions with desired quantities. Preliminary results have been demonstrated using finite element, boundary element method, and moment method.

**Key Words:** Symbolic Computation, Inverse Problem, Finite Element Method, Boundary Element Method, Moment Method, Boundary-value Problems, Approximate Algebra

### 1. はじめに

従来有限要素解析などで代表される境界値問題は数値演算で実行されることが多かった。この場合、解析対象の形状または物性パラメータを変化させたときは再び解析ソルバーを起動する必要があった。これまでも、記号演算型プログラミング言語を用いて前記ソルバーの入力となる行列方程式の各行列要素を導出することが提案されていたが [1]、解析ソルバーは数値演算で実行されていた。Beltzer は行列方程式を含む計算全体を記号で実行する境界値問題の計算法を提案した [2]。一方、筆者は、このような場合、出力分布は形状・物性パラメータの関数で表現されていることに着目し、境界値逆問題を直接解く方法を提案した [3-5]。最近筆者のアイデアをモーメント法や代用電荷法に適用した結果も報告されている [6-8]。記号演算で行列方程式を解く場合の問題点は計算時間と主メモリ容量が増大することである。すなわち、実用的な問題を解くことが困難であった。最近、近似代数という概念が提案された [9-10]。これは、代数計算を近似的に実行し、計算の効率化を図る手法である。筆者は近似代数の概念を記号演算型の行列方程式の解法に適用して、境界値逆問題特に最適設計問題に適する計算手法を提案する。

### 2. 原理

簡単な例題により、今回提案する行列方程式の近似解法を説明する。式(1)は未知パラメータ  $a$  を含む行列方程式である。

$$\begin{bmatrix} a & 1+a \\ 2+a & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

パラメータ  $a$  がゼロに近い値をもつと仮定すれば、未知変数  $x$  および  $y$  は式(2)のごとく  $a$  の級数展開式で近似的に与えることができる。

$$x = f_{11} + f_{12} a \quad \text{and} \quad y = f_{21} + f_{22} a, \quad (2)$$

ここで、 $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$  は定数である。(1), (2)から次式を得る。

$$(f_{11} + f_{21} + f_{22}) a + f_{21} - 1 = 0 \quad (3)$$

$$(f_{11} + 2 f_{12} + 3 f_{21}) a + f_{11} = 0 \quad (4)$$

なお、パラメータ  $a$  はゼロに近いので、2次項を無視した。(3), (4) は  $a$  に関する恒等式であるから次式を得る。

$$f_{11} + f_{21} + f_{22} = 0 \quad (5)$$

$$f_{21} - 1 = 0 \quad (6)$$

$$f11 + 2f12 + 3f21 = 0 \quad (7)$$

$$f11 = 0 \quad (8)$$

(5)-(8)式を数値的に解き、(2)に代入すると次式を得る。

$$x = -1.5a \quad \text{and} \quad y = 1 - a \quad (9)$$

この手法では数値的に行列方程式を解くので、従来の記号演算による行列方程式を解くよりも、著しく計算時間を低減できる。級数展開の次数を増加させることにより、より広範囲で計算精度を向上させることが可能である。また、多変数のTaylor級数展開を用いれば未知パラメータを複数用意できる。したがって、最適設計など初期設計値の近傍における最適化などに本手法を適用できると考えられる。

### 3. 2次元有限要素問題

Fig. 1は楕円形状を有する薄膜抵抗体の2次元モデルである。抵抗体は一樣な導電率 $\sigma$ をもち、長軸半径の長さは未知パラメータ $a$ で与えられている。短軸半径長は2とする。また、長軸の両端部が直流電流源に接続されている。

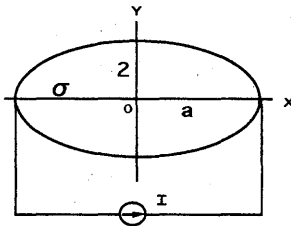


Fig. 1 Two dimensional oval-shaped conductor model

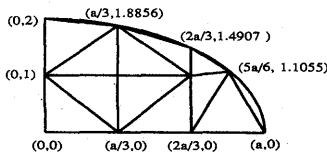


Fig. 2 Finite Element Model

Fig. 2は4分の1領域の有限要素モデルであり、要素分割数は簡単のため11とした。なお、直流電流源は無限小の大きさを有する電極に接続される有限要素モデルとなっているが、デルタ関数を用いて定式化している。長軸半径 $a$ を変化させると、これに対応して精

円周上の節点も移動する。記号演算が可能なMathematica言語を用いて、変分法による近似代数型の有限要素計算プログラムを記述した。この結果、各節点電圧は入力変数 $a$ の級数展開式として与えられる。従って、所望の電圧分布などの種々の設計目標値を与える形状パラメータ $a$ は、直接Newton法または最小2乗法などにより求めることができる。例えば、Fig. 1における印加電流を1Aとして座標 $(a,0)$ の電位を求めることにより、この抵抗体の抵抗値が求められる。この抵抗値は次式で表現される。

$$Ra = (2.83439 + 0.675867d + 0.00303785d^2) / \sigma \quad (10)$$

ここに、 $d=a-3$ であり、設計変数 $a$ は3に近い値を仮定している。従来の記号演算解法[5]と比較して計算時間

は約  
1/80に  
低減し  
た。

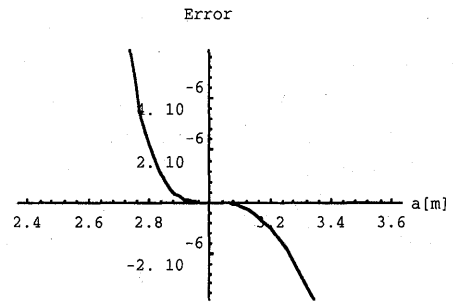


Fig. 3 Relative error of the resistance compared to the exact symbolic solution

従来の記号演算結果に対する相対誤差をFig. 3に示す。2.7 < a < 3.3において、 $5 \times 10^{-6}$ 以下の誤差であった。最終のNewton法の計算時間は約1/10に低減した。計算結果の精度を確認するためには、級数展開の次数あるいは展開する中心点を変化させればよい。

### 4. 2次元境界要素問題

Fig. 4に4要素の簡単なLaplace問題を示す。長方形の一辺の長さが未知数 $c$ であり、他辺は固定で長さ1である。Dirichlet条件(電位 $u = 1$  [V]及び $0$  [V])が上下の要素で与えられ、Neumann条件( $\partial u / \partial n = q = 0$ )が左右の要素で与えられている。ここで考える問題は点A (

0.5,0.5)の電位を与えたときに長さ  $c$  を決定することである。

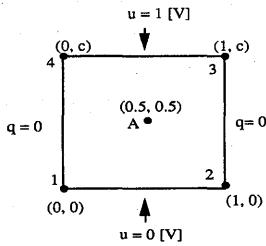


Fig. 4 Simple Laplace problem with 4-node boundary elements

境界要素法で用いる行列方程式においては、行列要素は無理関数を含むので、各行列要素をさらに設計パラメータに関して級数展開して、上記近似代数手法を適用した。点Aの電位は次式で与えられた。

$$u(0.5, 0.5) = 0.49931 - 0.450138 d + 0.530316 d^2, \quad (11)$$

ここで、 $d = c - 1$ 、すなわち  $c$  は1の近傍の値と仮定した。

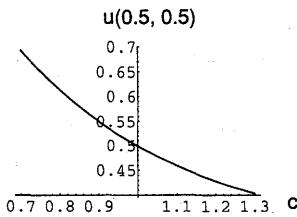


Fig. 5 Plot of the target potential

Fig. 5 は上記電位を  $c$  の関数としてプロットした結果であり、従来の厳密な記号演算の場合にくらべプロット時間は1/400 に減少した。

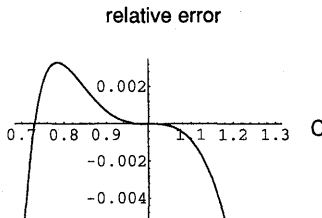


Fig. 6 Relative error of the target potential

厳密な記号演算結果に対する相対誤差は、 $0.8 < c < 1.2$  において  $10^{-3}$  のオーダーであった (Fig.6)。最終のNewton法の計算時間は約1/4000 に低減した。本手法は境界要素法などで用いる非対称フルマトリックスに適していると考えている。なお、この場合でも級数展開式の係数を計算する数値行列はスパース行列となる。

## 5. 一次元モーメント法

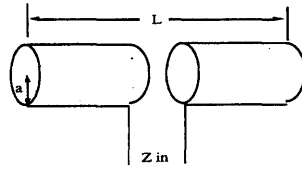


Fig. 7 Diagram of dipole antenna model

Fig. 7 は長さ  $L$ 、半径  $a$  を有するダイポールアンテナであり、 $Z_{in}$  は入力インピーダンスである。長さ方向に19要素を持つ1次元モデルに対して、モーメント法で計算する。給電には簡単のためデルタギャップモデルを用いた。ここで考える問題は入力抵抗を与えたときに、アンテナの長さ  $L$  を求めることである。Fujimotoらは筆者が以前提案した記号演算手法をモーメント法に適用した結果を報告した [6]。彼らは、積分核(kernel)の記号積分は、級数展開を用いた。筆者もこの手法を利用した。得られたシステム行列の各要素は三角関数などの無理式を含むため、さらに  $L = 0.47\lambda$  ( $\lambda$  は波長) のまわりで、Taylor展開して多項式化した。提案した近似代数による解法を用いて得られた2次近似の入力抵抗を次式に示す。

$$\begin{aligned} \text{Rin2} = & \text{Re} [ 1. / (-0.437155 + 0.64245 I + \\ & (1.9965 - 2.56136 I) b + \\ & (-2.21609 + 2.5418 I) b^2 ) ] \quad (12) \end{aligned}$$

ここで、 $b = L/\lambda$ 、 $a = 0.005\lambda$ 、 $\text{Re} [ ]$  は実数を取るオペレータ、 $I$  は虚数単位である。

3次近似の入力抵抗は次式で与えられた。

$$\begin{aligned} \text{Rin3} = & \text{Re}[1./(-6.17273 - 1.30807 I + \\ & (38.6065 + 9.88877 I) b + (-80.1098 - \\ & 23.9478 I) b^2 + (55.2438 + 18.787 I) b^3)] \end{aligned} \quad (13)$$

Fig. 8 は 2 次近似と 3 次近似による入力抵抗の比較結果である。横軸は波長で規格化したアンテナ長  $b$  である。0.42 <  $b$  < 0.49 における誤差は 10% 程度である。級数展開の次数を上げることにより、精度をさらに向上できる。

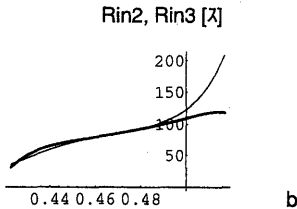


Fig. 8 Calculated input resistance of second (thin line) and third order (thick line) approximation

今後は、設計変数および要素数を増加させる予定である。

[1] W. Luft, J. M. Roesset and J. J. Connor, 'Automatic generation of finite element matrices,' J. Structural Div. ASCE, 97, 349-362 (1971)  
 [2] A. I. Belzer, 'Engineering analysis via symbolic computation - a breakthrough', Appl. Mech. Rev., 43, 6, 119-127 (1990)

[3] K. Yoda, 'Forward and inverse boundary-value problem solver using symbolic computation,' in Nonlinear Phenomena in Electromagnetic Fields, T. Furuhashi and Y. Uchikawa (Eds.), Elsevier Science Publishers, 189-192 (1992)  
 [4] 依田、記号演算を用いた境界値問題の解法、日本シミュレーション学会、第13回計算電気・電子工学シンポジウム論文集、301 (1992)  
 [5] 依田、Mathematicaを用いた2次元有限要素逆解析、日本シミュレーション学会、第11回シミュレーション・テクノロジー・カンファレンス論文集、103 (1992)  
 [6] M. Fujimoto, M. Analoui and Y. Kagawa, 'Symbolic approach to inverse problem in method of moments by Mathematica--one dimensional case,' 日本シミュレーション学会、第14回計算電気・電子工学シンポジウム論文集、261 (1993)  
 [7] 安武、加川、代用電荷法によるポテンシャル問題の記号演算、境界要素法研究会 BEM テクノロジー・カンファレンス '93 論文集、31 (1993)  
 [8] 安武、加川、数式処理言語 Mathematica による代用電荷法逆解析 - ポテンシャル問題の場合、境界要素法研究会 第10回 BEM シンポジウム 論文集、71 (1993)  
 [9] T. Sasaki, Collection of Research Reports, Research Institute of Mathematical Study, Kyoto University 676, 307 (1988)  
 [10] T. Kitamoto, 'Approximate eigenvalues, eigenvectors and inverse of a matrix with polynomial entries,' preprint, submitted to Jpn. J. Indus. App. Math. (April 1993)