境 界 要 素 法 研 究 会 (JASCOME)
BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集第4回
(1994年6月)

JASCOME
Proc. of BTEC-94
June 1994

非定常非線形熱伝導問題の境界要素法解析

後藤 孝宣*, 鈴木 正昭†

A BOUNDARY ELEMENT APPROACH FOR NONLINEAR HEAT CONDUCTION PROBLEMS

Takanobu GOTO and Masaaki SUZUKI

A new approach of boundary element method to treat transient nonlinear heat conduction with temperature-dependent thermal diffusivity is proposed. A problem whose exact solution is known is solved and the result is compared with exact solution. Another problem that was solved by other methods is also solved. These results show the validity of this method. No linearization being used in the present formulation, the results hold the nonlinear characteristics of the problem. Some integral formulae are presented for integral calculations of the fundamental solution. They are so useful and efficient that re-calculation of the coefficients of the matrices is practical in the actual computation.

Key Words : Nonlinear Heat Equation, Temperature-dependent Thermal Diffusivity, Boundary Element Method, Integral formulae of Fundamental Solution.

1 序論

熱拡散率αが温度Tに依存する非線形熱伝導方程式、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha(T)\Delta T \qquad (1)$$

は、熱伝導問題の解析においてしばしば現れる。たとえば、ステファン問題の潜熱モデルやエンタルピーモデルは方程式(1)の形で表される [1]-[3]。また、熱伝導率、比熱、密度が温度に依存するような問題も、Kirchhoff変換することにより、(1)の形に帰着される [4]-[6]。

本研究は、この応用上重要な非線形方程式を取り扱うための境界要素法の1つの定式化を提示し、厳密解のわかっている問題等の解析を通じて、この方法の有効性を示す。この定式化は、非線形熱伝導方程式の非線形部分を線形部分と分離し、変形、処理する方法である。この方法は、次のような特長をもつ。1)非線形熱伝導問題を、その非線形性を考慮したまま(すなわちモデル化における線形化をすることなく)解析するため、問題の持つ非線形性が異なれば、それが結果に直接反映される。2)本定式化に要するものは、離散化非線形方程式の数値解法以外は、線形問題に対する境界要素法に対するものと同様であり、新たな手間や困難が生じることはない。

この定式化による解析に、2次元熱伝導方程式の基本解の積分に関するいくつかの公式を適用した。

*学識会員, 東京工業大学原子炉工学研究所, 〒152 目黒区大岡山 2-12-1,TEL 03-3726-1111.
†非会員, 同 上

これらを用いることにより、数値積分公式を用いる場合に比べて高精度で、はるかに高速な積分計算ができ、解析全体に占める係数(積分)の計算時間の割合を大きく減らすことができた。これにより、解析途中における係数の再計算が実用の範囲内で可能になることが示される。

2 定式化

実際のすべての熱伝導問題で、$\alpha(T) > 0$と仮定してよいから、方程式(1)は、

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T \tag{2}$$

と書きかえられる。方程式(2)に対する境界積分方程式を、

$$C_m\frac{\partial T}{\partial t} + \Delta T = 0 \tag{3}$$

の基本解T^*を用いて導くと、

$$\begin{aligned} c_iT_i &= \int_0^\tau \int_\Gamma (\frac{\partial T}{\partial n}T^* - \frac{\partial T^*}{\partial n}T)d\Gamma dt \\ &\quad + \int_\Omega [TC_mT^*]_{t=0}\, d\Omega \\ &\quad - \int_\theta^\tau \int_\Omega (C(T) - C_m)\frac{\partial T}{\partial t}T^* d\Omega dt \end{aligned} \tag{4}$$

となる。ここで、Ωは考える領域、Γはその境界、iはソース点をあらわし、C_mは定数、τは時間ステップである。この方程式(4)の右辺の最後の非線形領域積分項を次のように変形する。まず、

$$H(T) = \int_0^T (C(s) - C_m)ds \tag{5}$$

と定義する [1]。これの時間微分は、

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = (C(T) - C_m)\frac{\partial T}{\partial t} \tag{6}$$

となるから、

$$\int_0^\tau (C(T) - C_m)\frac{\partial T}{\partial t}T^* dt = \int_0^\tau \frac{\partial H(T)}{\partial t}T^* dt \tag{7}$$

を得る。ここで、時間に関して一定要素を用いると、

$$\begin{aligned} &\int_0^\tau \frac{\partial H(T)}{\partial t}T^* dt \\ &= [H(T)T^*]_{t=0}^{t=\tau} - \int_0^\tau H(T)\frac{\partial T^*}{\partial t}dt \\ &\approx [H(T)T^*]_{t=0}^{t=\tau} - [H(T)]_{t=\tau}[T^*]_{t=0}^{t=\tau} \\ &= [H(T)]_{t=0}^{t=\tau}[T^*]_{t=0} \\ &= (H(T(x,\tau) - H(T(x,0)))\ T^*(x,0) \end{aligned} \tag{8}$$

となる。これを用いると、方程式(4)は、

$$\begin{aligned} c_iT_i &= \int_0^\tau \int_\Gamma (\frac{\partial T}{\partial n}T^* - \frac{\partial T^*}{\partial n}T)d\Gamma dt \\ &\quad + \int_\Omega [C_mT(x,0) - H(T(x,\tau)) \\ &\qquad + H(T(x,0))]T^*(x,x_i,0,\tau)d\Omega \end{aligned} \tag{9}$$

となる。この境界積分方程式は非線形項として領域積分を含むが、方程式(4)とは異なり、それは、時間積分がすでになされており、$\partial T/\partial t$を含まない点に注意する。

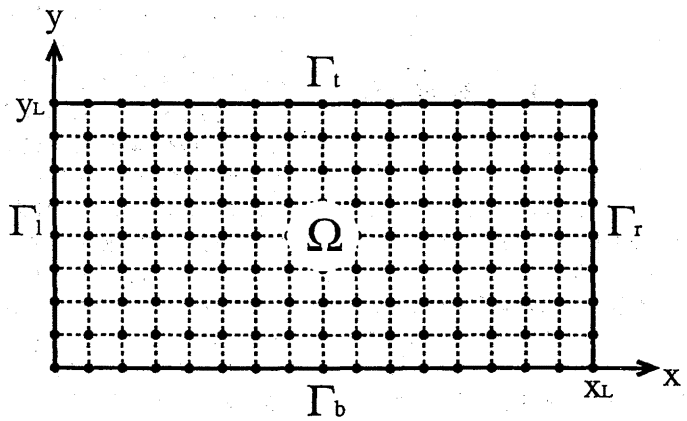

Figure 1. Example of domain Ω
and its discretization

3　解析

3.1　離散化

第２章で導いた境界積分方程式（９）を空間に関しては Figure 1 に示したような線形要素を用いて離散化する。境界の角では二重節点を用いた [7]。時間に関しては、前述の通り一定要素を用いる。ここで必要となる T^*に関する積分、

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_j}\phi^k E_1(\frac{C_m(r-r_i)^2}{4\tau})d\Gamma \tag{10}$$

$$\frac{1}{4\pi\tau}\int_{\Omega_{mn}}\phi_x^k\phi_y^l exp(-\frac{C_m(r-r_i)^2}{4\tau})d\Omega \tag{11}$$

には、精度、計算効率、プログラミングの簡単さの点で優れている、Appendix に示した積分公式を用いた。ここで、$\phi^k,(k=1,2)$ は、Figure 1 に示した線形要素Γ_jの線形補間関数、$\phi_x^k\phi_y^l,(k,l=1,2)$ は、Ω_{mn}の線形補間関数である [8]。また、$E_1(x)$ は、積分指数関数、

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \int_x^\infty \frac{exp(-s)}{s}ds \\ &= -\gamma - ln|x| - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{nn!} \end{aligned} \tag{12}$$

である [9]。γは、Euler の定数である。

離散化された非線形方程式は、Newton 法を用いて解いた。

3.2　解析例１

方程式（１）で、$\alpha(T)=T$とした、次の方程式を考える。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T\Delta T \tag{13}$$

初期、境界条件として、

$$T(x,y,0) = 1-\frac{1}{2}x^2 , \tag{14}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}(0,y,t) = 0 , \tag{15}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}(1,y,t) = -\frac{1}{1+t} , \tag{16}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}(x,y,t) = 0 \ on \ \Gamma_t\cup\Gamma_b , \tag{17}$$

を課す。この初期値境界値問題の厳密解は、

$$T(x,y,t) = \frac{1}{1+t}(1-\frac{1}{2}x^2) \tag{18}$$

である。

この問題の、x 方向の要素数 32、y方向の要素数 1 と離散化し、時間ステップを、$\tau=1/32$ としたときの解析結果と厳密解の比較を示したのが、Figure 2 である。本定式化による解が厳密解によく一致して

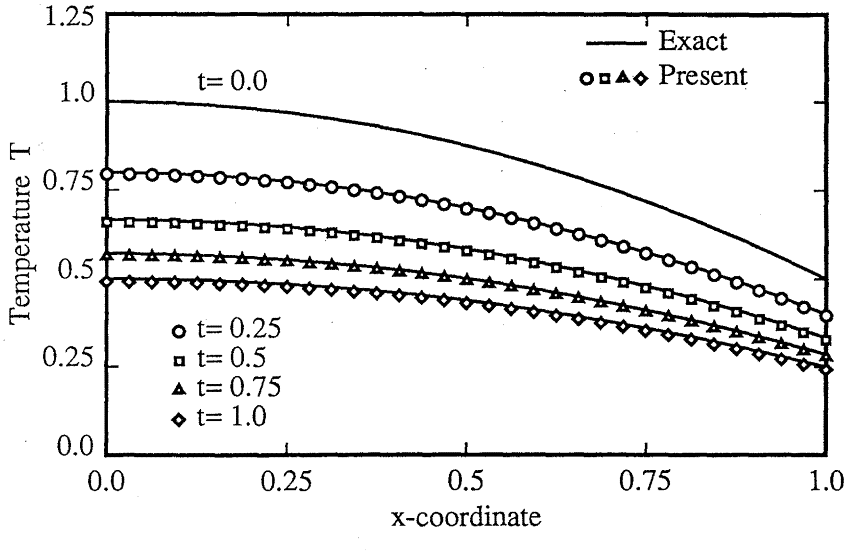

Fig. 2　Solution of Example 1.

いることがわかる。なお、方程式(3)で導入したC_mの値は次のように決定し、使用した。この問題では、解析対象としている時間空間領域、$0 \leqq t \leqq 1$、$0 \leqq x \leqq 1$において、温度は、$1/4 \leqq T \leqq 1$であるから、$1 \leqq C(T) = 1/T \leqq 4$である。したがって、$C_m$として、この範囲内の値である2.5を用いた。大抵の問題で、最高温度と最低温度を計算前に(境界条件などから)推定することが可能であるから、この方法で、計算で用いるC_mの値を決定することができる。

3.3 解析例2

次に、Skergetらが取り上げた、熱伝導率kが温度uに依存している非線形問題を考える[4]。この熱伝導の方程式は、

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y})$$

と表される。ここで、c、ρは比熱、密度である。kの温度依存性として、

$$k = k(u) = exp(0.3\frac{u-0.5}{0.5})$$

を与える。ここで、Kirchhoff変換[4]、

$$T = K(u) = \int_{u_0}^{u} k(u)du \tag{19}$$

を行い、$c = \rho = 1$と仮定すると、Tについての方程式、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{3}{5}T\Delta T \tag{20}$$

が得られる。Skergetらの課している初期、境界条件も式(19)にしたがって変換すると、

$$T(x,y,0) = \frac{5}{3}exp(-\frac{3}{10}) \,, \tag{21}$$

$$T(0,y,t) = \frac{5}{3}exp(-\frac{3}{10}) \,, \tag{22}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}(1,y,t) = 1 \,, \tag{23}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n}(x,y,t) = 0 \ on \ \Gamma_t \cup \Gamma_b \,, \tag{24}$$

となる。Skergetらは、この問題を式(20)における$\frac{3}{5}T$を1(=定数)と置くという近似を行ない、線形問題として解いている。彼等の離散化は、10境界要素、20境界節点、8内部三角形セル、56内点であり、時間ステップは1.0である。ここでは、Skergetらの解析と同程度の離散化として、x方向の要素数7、y方向の要素数6、そして時間ステップは同一の、$\tau = 1.0$とした。また$C_m = 1$とした。これは、Skergetらが、$\frac{3}{5}T = 1$とした1に対応している。本解析とSkergetらの解析結果を示したのが、Table 1である。Table 1は、上部境界の中点における温度(uに換算してある)の時間変化を示したものである。nonlinearは、第2章の定式化によるもの、linearは、本解析で$\frac{3}{5}T = 1$と線形化した(Skergetらと同じ仮定をした)場合の結果である。$t = \infty$は、定常状態の場合の解である。いずれもかなり粗い離散化と時間ステップによる解析であるが、良好な結果が得られている。

Table 1 Temperature at x= 2.5

time	nonlinear	linear	Skerget
4.0	0.86	0.76	0.73
8.0	1.48	1.25	1.21
12.0	1.72	1.50	1.46
16.0	1.80	1.63	1.61
20.0	1.83	1.71	1.69
∞	1.845		

Table 2 Temperature on Γ_t

x	linear	nonlinear	t=∞
0.714	0.686	0.753	0.761
1.429	1.175	1.270	1.281
2.143	1.557	1.665	1.677
2.857	1.873	1.985	1.997
3.571	2.144	2.253	2.265
4.286	2.383	2.485	2.496
5.0	2.595	2.689	2.699

しかしながら、Skerget らおよび本解析の linear の場合と、nonlinear の場合にはかなりの違いがあり、この問題では、非線形の効果を無視することはできないことがわかる。このことから、非線形問題を線形化して線形方程式を解くというアプローチは、解析を容易にするが、重要な非線形の情報を失う可能性が大きいといえる。

Table 2 は、(Table 1 の場合と同様の) linear、nonlinear の場合の上部境界における $t = 20$ のときの温度分布を示したものである。ここでも linear、nonlinear の差はかなりあり、解析例 1 でみたように、本解析が、非線形問題の解析に妥当な結果を得ることができることから、Table 1 での考察と同様のことがいえる。

4 結論

熱拡散率が温度に依存する非線形熱伝導問題に対する 1 つの境界要素法の定式化を提案し、厳密解のわかっている問題を解くことにより、その妥当性を確認した。本定式化は、非線形方程式を線形化のような仮定を設けず直接取り扱うので、非線形の性質(情報)を含む解が得られる。方程式 (1) で表される非線形熱伝導問題は、解析例 2 でみたように、物性値が温度依存性をもつ問題を含む広い適用範囲をもつが、その解析に先ず線形化の仮定をして線形方程式を導き、それを解くという方法を取ると、解に非線形性が反映されず、問題のもつ情報が失われる可能性があることが示された。本定式化は、式 (9) からもわかる通り、解析例として取上げた 2 次元問題のみならず 3 次元問題への適用も容易である。これらのことから、本方法が簡便であるが、上記の問題に対して一般的かつ有効な解析方法であることが結論される。

また、今回の解析では、Appendix に示した積分公式を用いることにより、係数 (積分) 計算を高精度化、高速化、簡単化した。特に面積分の高速化により、従来の数値積分公式を用いた場合、時間がかかるため、実用的ではなかった係数の解析途中での変更 (再計算) が、2 次元熱伝導問題の場合には、実用の範囲内で可能になると思われる。具体的には、本解析で、この計算に要する時間は、温度の計算を 1 時間ステップ進めるのにかかる時間と同じ程度であった。

参考文献

[1] 後藤孝宣, 鈴木正昭:相変化を伴う熱伝導問題の潜熱モデルの境界要素法による解, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, 第 3 巻, pp.1-6, (1993)

[2] Sluzalec, A.: Flow of metal undergoing laser irradiation, Numer. Heat Transfer, Vol.13, pp.253-263, (1988)

[3] Yokokawa, M.: Numerical simulation on the Marangoni convection in the molten pool, JAERI-M 92-038, Japan Atomic Energy Research Institute, (1992)

[4] Skerget, P. and Brebbia, C.A.: Time dependent non-linear potential problems, Topics in Boundary Element Research, Vol.2 (Edited by C.A. Brebbia), pp.63-86, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (1985)

[5] 菊田雅司, 都甲英俊, 田中正隆: 非線形熱伝導問題への応用, 境界要素法の応用 (JASCOME 編), pp.138-154, コロナ社, (1987)

[6] Bialecki, R.: Solving nonlinear heat transfer problems by BEM, BOUNDARY ELEMENTS X, Vol.2 (Edited by C.A. Brebbia), pp.195-222, CMP Publications, Southampton, (1988)

[7] Zabaras, N. and Mukherjee, S.: An analysis of solidification problems by the boundary element method, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol.24, pp.1879-1900, (1987)

[8] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C.: BOUNDARY ELEMENT TECHNIQUES, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (1984)

[9] Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical Functions, Fifth printing, National Bureau of Standards, Washington, D.C., (1966)

Appendix: 積分公式

3.1 節で用いる積分公式を示す。ここで、a, b, c, d, C は、定数で、$ab \geq 0$, $cd \geq 0$, $C > 0$ を満たすものと

する。また、

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x exp(-s^2) ds$$

である。この誤差関数、$erf(x)$ は、ワークステーションや汎用機等の高級言語コンパイラー付属のライブラリに入っており、計算機上で簡単に利用することができる。

$$\begin{aligned} & \int_a^b E_1(C(x^2+y^2))dx \\ = \; & bE_1(C(b^2+y^2)) - aE_1(C(a^2+y^2)) \\ & +2\int_a^b \frac{x^2 exp(-C(x^2+y^2))}{x^2+y^2} dx \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b E_1(Cx^2)dx \\ = \; & bE_1(Cb^2) - aE_1(Ca^2) \\ & +2\int_a^b exp(-Cx^2)dx \\ = \; & bE_1(Cb^2) - aE_1(Ca^2) \\ & +\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{C}} \left[erf(b\sqrt{C}) - erf(a\sqrt{C})\right] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\lim_{x \to 0} xE_1(x) = 0 \quad (27)$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 E_1(x) = 0 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b xE_1(C(x^2+y^2))dx \\ = \; & \frac{1}{2C}\Big[exp(-C(a^2+y^2)) \\ & \quad -exp(-C(b^2+y^2))\Big] \\ & +\frac{1}{2}\Big[(b^2+y^2)E_1(C(b^2+y^2)) \\ & \quad -(a^2+y^2)E_1(C(a^2+y^2))\Big] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b xE_1(Cx^2)dx \\ = \; & \frac{1}{2C}\left[exp(-Ca^2) - exp(-Cb^2)\right] \\ & +\frac{1}{2}\left[b^2E_1(Cb^2) - a^2E_1(Ca^2)\right] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \int_c^d \int_a^b exp(-\frac{x^2+y^2}{C})dxdy \\ = \; & \frac{\pi C}{4}[erf(\frac{b}{\sqrt{C}}) - erf(\frac{a}{\sqrt{C}})] \\ & \times[erf(\frac{d}{\sqrt{C}}) - erf(\frac{c}{\sqrt{C}})] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \int_c^d \int_a^b xexp(-\frac{x^2+y^2}{C})dxdy \\ = \; & \frac{C\sqrt{\pi C}}{4}[exp(-\frac{b^2}{C}) - exp(-\frac{a^2}{C})] \\ & \times[erf(\frac{c}{\sqrt{C}}) - erf(\frac{d}{\sqrt{C}})] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \int_c^d \int_a^b yexp(-\frac{x^2+y^2}{C})dxdy \\ = \; & \frac{C\sqrt{\pi C}}{4}[exp(-\frac{d^2}{C}) - exp(-\frac{c^2}{C})] \\ & \times[erf(\frac{a}{\sqrt{C}}) - erf(\frac{b}{\sqrt{C}})] \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \int_c^d \int_a^b xyexp(-\frac{x^2+y^2}{C})dxdy \\ = \; & \frac{C^2}{4}[exp(-\frac{b^2}{C}) - exp(-\frac{a^2}{C})] \\ & \times[exp(\frac{d}{\sqrt{C}}) - exp(\frac{c}{\sqrt{C}})] \end{aligned} \quad (34)$$