

# 直交異方性静弾性問題の 高速多重極境界要素法による解析

ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL ORTHOTROPIC ELASTOSTATIC PROBLEM  
BY FAST MULTIPOLE BOUNDARY ELEMENT METHOD

福井卓雄<sup>1)</sup>, 王徳法<sup>2)</sup>, 小林孝彰<sup>3)</sup>

Takuo FUKUI, De Fa WANG, and Takaaki KOBAYASHI

<sup>1)</sup> 福井大学大学院工学研究科 (〒 910-8507 福井市文京 3-9-1, E-mail: tak@taku.anc-d.fukui-u.ac.jp)

<sup>2)</sup> 福井大学大学院工学研究科 (〒 910-8507 福井市文京 3-9-1, E-mail: defawang@taku.anc-d.fukui-u.ac.jp)

<sup>3)</sup> 福井大学大学院工学研究科 (〒 910-8507 福井市文京 3-9-1, E-mail: yasshi@taku.anc-d.fukui-u.ac.jp)

This paper is concerned with a formulation of the fast multipole boundary element method in the two-dimensional orthotropic, elastostatic problems. The formulation is based on the complex function expression of the displacement and stress in the orthotropic elastic body. The fundamental singular solution and its associated solutions, the multipole and local expansions, and the translation relations, i.e. M2M, M2L and L2L, are expressed by the complex elastic potentials, that are analytic in the linearly transformed complex spaces. The boundary element method and the fast multipole method is formulated by these potentials, still the final expression of the method is presented in the real space. Some numerical tests assure that the computational complexity and required memory are of  $O(N)$ .

**Key Words :** *Boundary element method, Fast multipole method, Orthotropic elasticity, Two-dimensional elastostatic problem*

## 1. はじめに

本論文では, 2次元直交異方性体の静弾性問題における高速多重極境界要素法の定式化を行い, その数値解析手法について述べる。

境界要素法の解析に高速多重極法を適用して, 境界要素法の弱点である密行列を解くことによる計算負荷の大きさを回避することは, 境界要素法の応用において必須の手法となっている<sup>1)</sup>。著者の一人は, これまでに, 2次元等方性弾性問題<sup>2)</sup>, 3次元等方性弾性問題<sup>3)</sup>などにおいて高速多重極法の定式化とその境界要素法への適用法の研究を進めてきた。ここでは, これらの研究結果をふまえて, 2次元直交異方性弾性問題における高速多重極法と境界要素法への適用法を提案する。

境界要素法は, 解を基本解およびそれから派生する解によって表現し, それによって近似解を得る数値解析手法である。2次元異方性弾性問題においては, Airyの応力関数を用いて解を表現し, すべての解を複素ポテンシャルによって表現することが便利である<sup>4)</sup>。この意味においては, 異方性問題も等方性問題と変りはなく, むしろ, 適当な座標変換を導入すれば, 異方性問題の方が解の表現形は単純となる。本研究では, この考え方にもとづいて境界要素法および対応する高速多重極法を導いた。以下, 2. では直交異方性弾性体の2次元理論の

要約を述べ, 3. で境界要素法の定式化を, 4. で高速多重極法の定式化を行う。5. では本解法の計算効率を数値的に確認する。また, 6. では本解法の改善法について検討する。

## 2. 直交異方性弾性体の2次元理論

### 2.1 基礎式と境界値問題

直交異方性弾性体の静的問題における, ひずみ-変位関係, つり合い方程式, 構成関係は次のようである。

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ij}^{kl} \epsilon_{kl} \quad \text{or} \quad \epsilon_{ij} = s_{ij}^{kl} \sigma_{kl} \quad (3)$$

ここに,  $u_i$  は変位,  $\epsilon_{ij}$  はひずみ,  $\sigma_{ij}$  は応力,  $X_i$  は物体力,  $c_{ij}^{kl}$  は弾性テンソル,  $s_{ij}^{kl}$  はコンプライアンステンソル (弾性係数テンソルの逆) である。

座標系を異方性の軸と一致させてとるときには, 2次元問題における直交異方性体の弾性テンソルおよびコンプライアンステンソルは次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} c_{11}^{11} & c_{11}^{22} & 0 \\ c_{22}^{11} & c_{22}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{12}^{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s_{11}^{11} & s_{11}^{22} & 0 \\ s_{11}^{22} & s_{22}^{11} & 0 \\ 0 & 0 & s_{12}^{12} \end{pmatrix} \quad (4)$$

弾性係数の対称性を考慮すれば、独立な弾性係数の数は 4 である。

基礎式 (1), (2), (3) から、問題を変位で表現すれば、領域  $B$  およびその境界  $\partial B$  における境界値問題は、

$$\begin{aligned} c_{ij}^{kl} u_{k,l} + X_i &= 0 & \text{in } B \\ u_i &= \hat{u}_i & \text{on } \partial B_1 \\ T_{ij}^n u_j &= \sigma_{ij} n_j = \hat{s}_i & \text{on } \partial B_2 \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ここに、 $n_i$  は外向き法線ベクトルであり、 $\partial B = \partial B_1 + \partial B_2$  である。また、 $T_{ij}^n$  は変位から境界応力ベクトルを求める微分作用素であり、 $\hat{u}$ ,  $\hat{s}$  はそれぞれ境界  $\partial B_1$ ,  $\partial B_2$  上で与えられた変位および応力ベクトルである。

## 2.2 Airy の応力関数による解の表現<sup>4)</sup>

基礎式 (1), (2), (3) を満足する変位および応力場は、方程式

$$\begin{aligned} S_{22}^{11} \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - 4S_{12}^{11} \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^3 \partial \bar{z}} + 2(S_{11}^{11} + 2S_{12}^{12}) \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} \\ - 4S_{11}^{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial z \partial \bar{z}^3} + S_{11}^{22} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \bar{z}^4} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

を満足する Airy の応力関数  $\psi$  により表現することができる。ここに、直交座標  $(x_1, x_2)$  について  $z = x_1 + ix_2$  であり、 $S_{kl}^{ij}$  は次で与えられる。

$$\begin{aligned} S_{11}^{11} &= \frac{1}{4} (s_{11}^{11} + s_{22}^{22} + 4s_{12}^{12} - 2s_{11}^{22}) \\ S_{11}^{22} &= S_{22}^{11} = \frac{1}{4} (s_{11}^{11} + s_{22}^{22} - 4s_{12}^{12} - 2s_{11}^{22}) \\ S_{11}^{12} &= S_{12}^{11} = \frac{1}{4} (s_{11}^{11} - s_{22}^{22}) \\ S_{12}^{12} &= \frac{1}{4} (s_{11}^{11} + s_{22}^{22} + 2s_{11}^{22}) \end{aligned}$$

(6) の特性方程式の根  $\gamma_1, \gamma_2, 1/\bar{\gamma}_1, 1/\bar{\gamma}_2$  のうちの 2 根  $\gamma_1, \gamma_2$  に対し、 $z_\alpha = z + \gamma_\alpha \bar{z}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) とすると、方程式 (6) の一般解は、

$$\psi(z) = \phi(z_1) + \bar{\phi}(\bar{z}_1) + \chi(z_2) + \bar{\chi}(\bar{z}_2) \quad (7)$$

で与えられる。ここに、 $\phi, \chi$  は任意の解析関数である。直交異方性の場合には、特性根  $\gamma_1, \gamma_2$  は次のように容易に求めることができる。 $\alpha^2$  に関する 2 次方程式

$$s_{22}^{22} \alpha^4 - 2(s_{11}^{22} + 2s_{12}^{12}) \alpha^2 + s_{11}^{11} = 0 \quad (8)$$

の 2 根を  $\alpha_1^2, \alpha_2^2$  とすると、 $\gamma_1, \gamma_2$  は

$$\gamma_\lambda = \frac{\alpha_\lambda - 1}{\alpha_\lambda + 1}, \quad \alpha_\lambda = \frac{1 + \gamma_\lambda}{1 - \gamma_\lambda} \quad (\lambda = 1, 2) \quad (9)$$

により与えられる。

式 (7) を用いて、変位および応力は次の式で与えら

れる。

$$\begin{aligned} D = u_1 + iu_2 &= \delta_1 \phi'(z_1) + \rho_1 \bar{\phi}'(\bar{z}_1) \\ &+ \delta_2 \chi'(z_2) + \rho_2 \bar{\chi}'(\bar{z}_2) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Phi = \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} &= -4\gamma_1^2 \phi''(z_1) - 4\bar{\phi}''(\bar{z}_1) \\ &- 4\gamma_2^2 \chi''(z_2) - 4\bar{\chi}''(\bar{z}_2) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Theta = \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\gamma_1 \phi''(z_1) + 4\bar{\gamma}_1 \bar{\phi}''(\bar{z}_1) \\ &+ 4\gamma_2 \chi''(z_2) + 4\bar{\gamma}_2 \bar{\chi}''(\bar{z}_2) \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、 $\delta_\lambda, \rho_\lambda$  は、 $\beta_\lambda = s_{11}^{22} - s_{22}^{22} \alpha_\lambda^2$  ( $\lambda = 1, 2$ ) とするとき、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (1 + \gamma_1) \beta_2 - (1 - \gamma_1) \beta_1 \\ \delta_2 &= (1 + \gamma_2) \beta_1 - (1 - \gamma_2) \beta_2 \\ \bar{\rho}_1 &= (1 + \gamma_1) \beta_2 + (1 - \gamma_1) \beta_1 \\ \bar{\rho}_2 &= (1 + \gamma_2) \beta_1 + (1 - \gamma_2) \beta_2 \end{aligned} \quad (13)$$

## 3. 境界要素法

### 3.1 境界積分方程式

境界値問題 (5) の解は、Somigliana の公式

$$\begin{aligned} C_{ij} u_j(\mathbf{x}) &= \hat{u}_i(\mathbf{x}) + \int_{\partial B} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{jk}^y u_k(\mathbf{y}) ds_y \\ &- \int_{\partial B} S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) ds_y \end{aligned} \quad (14)$$

により表される。ここに、 $\hat{u}_i$  は物体力による特解、 $T_{ij}^n u_j = \sigma_{ij} [u_k] n_j$  は境界応力である。 $C_{ij}$  は自由項で、点  $\mathbf{x}$  が領域内部にあるとき  $\delta_{ij}$ 、滑らかな境界上にあるとき  $\delta_{ij}/2$ 、領域および境界の外部にあるとき 0 の値をとる。また、 $G_{ij}, S_{ij}$  はそれぞれ基本解および二重層核であり、 $S_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T_{jk}^y G_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  である。

境界値問題の解は、(14) において、点  $\mathbf{x}$  を境界に近づけたときの式を未知境界値についての積分方程式として解くことにより得られる。

### 3.2 基本解および二重層核

基本解および二重層核は、それぞれ、単位集中力  $P$  による変位および単位くい違い  $U$  による変位により与えられる。これらの複素関数表現は

$$\begin{aligned} D^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [G_{1j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + iG_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] P_j \\ &= \delta_1 \phi^{G'}(z_1) + \rho_1 \bar{\phi}^{G'}(\bar{z}_1) + \delta_2 \chi^{G'}(z_2) + \rho_2 \bar{\chi}^{G'}(\bar{z}_2) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} D^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [S_{1j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + iS_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] U_j \\ &= \delta_1 \phi^{S'}(z_1) + \rho_1 \bar{\phi}^{S'}(\bar{z}_1) + \delta_2 \chi^{S'}(z_2) + \rho_2 \bar{\chi}^{S'}(\bar{z}_2) \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ここに、 $z_\alpha$  は  $z \doteq \mathbf{x} - \mathbf{y}$  として定義する。

基本解に対する  $\phi^G, \chi^G$  は、

$$\phi^G(z_1) = \frac{Q}{2\pi} z_1 \log z_1, \quad \chi^G(z_2) = \frac{R}{2\pi} z_2 \log z_2 \quad (17)$$

により与えられる<sup>4)</sup>。ここに、係数  $Q, R$  は、得られる変位および応力場がつり合い条件および適合条件を満足するように決められた荷重係数であり、 $P = P_1 + iP_2$  により、

$$Q = \frac{(1 + \alpha_1)}{8(1 + \gamma_1)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)s_{22}^{22}} (\bar{\rho}_1 P + \delta_1 \bar{P}) \quad (18)$$

$$R = \frac{-(1 + \alpha_2)}{8(1 + \gamma_2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)s_{22}^{22}} (\bar{\rho}_2 P + \delta_2 \bar{P}) \quad (19)$$

で与えられる。

二重層核に対する  $\phi^S, \chi^S$  は、集中荷重  $P$  による応力ベクトル場  $T(P)$  と集中くい違い  $U$  による変位場  $u(U)$  との間の相反定理

$$\begin{aligned} P \cdot u(U) &= P_i S_{ij}(x, y) U_j \\ &= U_i T_{ik}^y G_{kj}(y, x) P_j = T(P) \cdot U \end{aligned} \quad (20)$$

を使って、(17) から導くことができる。結果は、

$$\phi^S(z_1) = \frac{V}{2\pi} \log z_1, \quad \chi^S(z_2) = \frac{W}{2\pi} \log z_2 \quad (21)$$

となる。ここに、係数  $V, W$  は、 $U = U_1 + iU_2$  および単位方向ベクトル  $\nu = n_1 + in_2$  について

$$\hat{\nu}_\lambda = \nu - \gamma_\lambda \bar{\nu}, \quad \hat{U}_\lambda = U - \gamma_\lambda \bar{U} \quad (\lambda = 1, 2) \quad (22)$$

とするとき

$$V = \frac{(1 + \alpha_1)}{4(1 + \gamma_1)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)s_{22}^{22}} \hat{\nu}_1 \hat{U}_1 \quad (23)$$

$$W = \frac{-(1 + \alpha_2)}{4(1 + \gamma_2)(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)s_{22}^{22}} \hat{\nu}_2 \hat{U}_2 \quad (24)$$

で与えられる。

### 3.3 境界積分方程式の離散化

境界積分方程式 (14) を離散化して解くために、境界に適当な近似基底を導入する。(14) の離散系は

$$\begin{aligned} C_{ij} u_j(x) &= \hat{u}_i(x) + \sum_{I=1}^N A_{ij}(x, E^I) s_j^I \\ &\quad - \sum_{I=1}^N B_{ij}(x, E^I) u_j^I \end{aligned} \quad (25)$$

となる。ここに、 $u_j^I, s_j^I$  は要素上の代表節点における変位および応力ベクトルであり、 $A_{ij}(x, E^I), B_{ij}(x, E^I)$  は要素  $E^I$  による影響関数である。

一定要素について考える。このときの影響関数は

$$A_{ij}(x, E^I) = \int_{E^I} G_{ij}(x, y) ds_y \quad (26)$$

$$B_{ij}(x, E^I) = \int_{E^I} S_{ij}(x, y) ds_y \quad (27)$$

である。上の積分を実行するために、Fig.1 に示す直線要素を考える。 $a, b$  は両端点、 $s$  は  $a$  から測った長さ、 $\theta$  は傾きである。 $z$  は直線上にあるので、

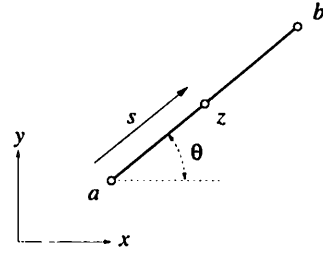


Fig.1 Line element ( $a, b$ )

$$z = \frac{z-a}{|z-a|} s + a = \frac{b-a}{|b-a|} s + a = e^{i\theta} s + a \quad (28)$$

である。要素の単位接線ベクトルが  $t = e^{i\theta}$  であることを考慮して、 $z_\lambda$  は

$$z_\lambda = (t + \gamma_\lambda \bar{t}) s + a_\lambda = t_\lambda s + a_\lambda \quad (29)$$

となる。このとき、線素  $ds$  は

$$ds = \frac{dz_\lambda}{e^{i\theta} + \gamma_\lambda e^{-i\theta}} = \frac{dz_\lambda}{t_\lambda} \quad (30)$$

と表すことができる。

(15), (16) を参照すれば、影響関数 (26), (27) を得るためには  $\phi^{G'}, \chi^{G'}, \phi^{S'}, \chi^{S'}$  の積分を評価すれば良いことがわかる。いま、 $z \doteq x, \zeta \doteq y$  とすると、たとえば、 $\phi^{G'}$  の積分は

$$\begin{aligned} \int_E \phi^{G'}(z_1 - \zeta_1) ds_y &= \frac{1}{t_1} \int_{a_1}^{b_1} \phi^{G'}(z_1 - \zeta_1) d\zeta_1 \\ &= \frac{\phi^G(z_1 - a_1) - \phi^G(z_1 - b_1)}{t_1} \\ &= \frac{Q}{2\pi t_1} [(z_1 - a_1) \log(z_1 - a_1) - (z_1 - b_1) \log(z_1 - b_1)] \end{aligned} \quad (31)$$

となる。同様にして、 $\phi^{S'}$  の積分は

$$\int_E \phi^{S'}(z_1 - \zeta_1) ds_y = \frac{V}{2\pi t_1} \log \frac{z_1 - a_1}{z_1 - b_1} \quad (32)$$

となる。 $\chi^{G'}, \chi^{S'}$  の積分についてもまったく同様である。

積分 (31), (32) の数値計算には注意が必要である。これらの式は対数関数を含んでいる。対数関数は多価であるが、係数  $Q, R$  および  $V, W$  は変位の一価性を保証するように決定されている。一般に数値計算においては対数関数の主値だけを使うので、この一価性が崩れる場合がある。つねに一価の変位が得られるような数値的工夫が必要である。

### 4. 高速多重極法

境界要素法の解析に高速多重極法を使うために、多重極展開および局所展開の定義、移動公式、高速多重極アルゴリズム適用上の注意について述べる。これらの諸関係は等方弾性体の場合<sup>2)</sup>と類似しており、形式上はむしろ単純になっている。

#### 4.1 多重極展開と局所展開

##### (1) 多重極展開

複素ポテンシャル  $\phi, \chi$  の多重極展開を導入するために、Fig.2 のように、源点  $y$ 、観測点  $x$  および展開中心  $O$  を考える。ここで、 $|z| > |\zeta|$  であるとする。

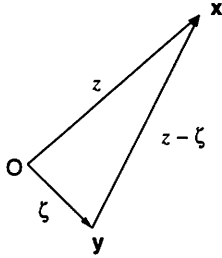


Fig.2 Source point  $y$ , field point  $x$  and  $O$

基本解のポテンシャル、たとえば、 $\phi^G(z-a)$  の Taylor 展開を実行すれば、多重極展開の形が得られる。その一般形は

$$\phi(z_1) = \frac{1}{2\pi} \left[ M_{-1} z_1 \log z_1 - M_0 \log z_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{z_1^n} \right] \quad (33)$$

$$\chi(z_2) = \frac{1}{2\pi} \left[ N_{-1} z_2 \log z_2 - N_0 \log z_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{z_2^n} \right] \quad (34)$$

である。ポテンシャル  $\phi, \chi$  を (10), (11), (12) に代入すれば多重極展開による変位および応力が得られる。異方性の場合には、等方性の場合と異なって、 $\phi$  と  $\chi$  の多重極展開は同じ形となっているが、それぞれに座標変換された空間における多重極展開となっている。

式 (33), (34) の収束条件はそれぞれ  $|z_1| > |\zeta_1|, |z_2| > |\zeta_2|$  である。一般に  $|z| > |\zeta|$  はこれらの条件を保証するものではない。このあとの移動公式についても同様のことがいえる。この点については、あとの 6. において議論する。

##### (2) 基本解の多重極モーメント

Fig.2 を参照して、 $\phi^G(z-\zeta), \chi^G(z-\zeta)$  の Taylor 展開を行い、(33), (34) と比較すれば、基本解の多重極モーメントが得られて

$$M_{-1}^G = Q, \quad M_0^G = Q\zeta_1, \quad M_n^G = \frac{Q\zeta_1^{n+1}}{n(n+1)} \quad (35)$$

$$N_{-1}^G = R, \quad N_0^G = R\zeta_2, \quad N_n^G = \frac{R\zeta_2^{n+1}}{n(n+1)} \quad (36)$$

となる。同様にして、二重層核の多重極モーメントは

$$M_{-1}^S = 0, \quad M_0^S = -V, \quad M_n^S = -\frac{V\zeta_1^n}{n} \quad (37)$$

$$N_{-1}^S = 0, \quad N_0^S = -W, \quad N_n^S = -\frac{W\zeta_2^n}{n} \quad (38)$$

である。

##### (3) 一定要素の多重極モーメント

一定要素の多重極モーメントは、(35)-(38) を  $\zeta_\lambda$  について積分すれば容易に得られる。Fig.3 に示すように、多重極点を原点とした要素の端点を  $a, b$ 、単位接線ベクトルを  $t = e^{i\theta}$  とすると、線素 (30) を用いて、積分

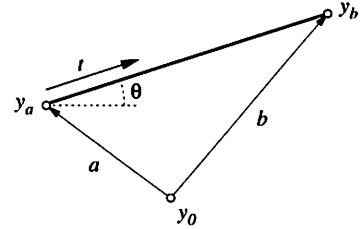


Fig.3 Integration of multipole moment

が実行できて、基本解の多重極モーメントは

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{-1}^G &= \frac{Q}{t_1} [\zeta]_{a_1}^{b_1}, & \tilde{M}_0^G &= \frac{Q}{t_1} \left[ \frac{\zeta^2}{2} \right]_{a_1}^{b_1} \\ \tilde{M}_n^G &= \frac{Q}{t_1} \left[ \frac{\zeta^{n+2}}{n(n+1)(n+2)} \right]_{a_1}^{b_1} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{-1}^G &= \frac{R}{t_2} [\zeta]_{a_2}^{b_2}, & \tilde{N}_0^G &= \frac{R}{t_2} \left[ \frac{\zeta^2}{2} \right]_{a_2}^{b_2} \\ \tilde{N}_n^G &= \frac{R}{t_2} \left[ \frac{\zeta^{n+2}}{n(n+1)(n+2)} \right]_{a_2}^{b_2} \end{aligned} \quad (40)$$

二重層核の多重極モーメントは

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{-1}^S &= 0, & \tilde{M}_0^S &= \frac{-V}{t_1} [\zeta]_{a_1}^{b_1} \\ \tilde{M}_n^S &= \frac{-V}{t_1} \left[ \frac{\zeta^{n+1}}{n(n+1)} \right]_{a_1}^{b_1} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{-1}^S &= 0, & \tilde{N}_0^S &= \frac{-W}{t_2} [\zeta]_{a_2}^{b_2} \\ \tilde{N}_n^S &= \frac{-W}{t_2} \left[ \frac{\zeta^{n+1}}{n(n+1)} \right]_{a_2}^{b_2} \end{aligned} \quad (42)$$

となる。

##### (4) 局所展開

$\phi$  と  $\chi$  の局所展開を、ポテンシャル問題の場合と同様に、巾級数

$$\phi(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n z_1^n, \quad \chi(z_2) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n z_2^n \quad (43)$$

で与える。多重極展開の場合と同様に、ポテンシャル  $\phi, \chi$  を (10), (11), (12) に代入すれば局所展開による変位および応力が得られる。

#### 4.2 移動公式

高速多重極法を構成するためには、多重極点の移動に伴う係数変換 (M2M)、多重極展開から局所展開への再展開 (M2L)、局所展開原点の移動に伴う係数の変換関係 (L2L) が必要である。これらの変換関係は、座標変

換された空間で行うという以外は、ポテンシャル問題の場合とまったく同じである。以下ではこれらをまとめる。

### (1) M2M

$O$  点における多重極展開を  $O'$  点における多重極展開に変換する。 $O'$  点から見た  $O$  点を  $\zeta$  とする。このとき、観測点  $z$  に対して  $|z| > |\zeta|$  である。新しい多重極モーメント  $M'_n$  は、 $|z_1| > |\zeta_1|$  のとき

$$\begin{aligned} M'_{-1} &= M_{-1}, & M'_0 &= \zeta_1 M_{-1} + M_0 \\ M'_n &= \frac{\zeta_1^{n+1}}{n(n+1)} M_{-1} + \frac{\zeta_1^n}{n} M_0 \\ &+ \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} \zeta_1^{n-m} M_m \end{aligned} \quad (44)$$

多重極モーメント  $N'_n$  は、 $|z_2| > |\zeta_2|$  のとき

$$\begin{aligned} N'_{-1} &= N_{-1}, & N'_0 &= \zeta_2 N_{-1} + N_0 \\ N'_n &= \frac{\zeta_2^{n+1}}{n(n+1)} N_{-1} + \frac{\zeta_2^n}{n} N_0 \\ &+ \sum_{m=1}^n \binom{n-1}{m-1} \zeta_2^{n-m} N_m \end{aligned} \quad (45)$$

となる。

### (2) M2L

$O$  点における多重極展開を  $O'$  点における局所展開に変換する。 $O$  点から見た  $O'$  点を  $\zeta$  とする。このとき、観測点  $z$  に対して  $|z| < |\zeta|$  である。多重極モーメント  $M_n$  から得られる局所展開係数  $K_n$  は、 $|z_1| < |\zeta_1|$  のとき

$$\begin{aligned} K_1 &= (\log \zeta_1 + 1) M_{-1} - \frac{M_0}{\zeta_1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m M_m}{\zeta_1^{m+1}} \\ K_n &= \frac{(-1)^n}{\zeta_1^n} \left[ \frac{\zeta_1 M_{-1}}{n(n-1)} + \frac{M_0}{n} \right. \\ &+ \left. \sum_{m=1}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} \frac{M_m}{\zeta_1^m} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

多重極モーメント  $N_n$  から得られる局所展開係数  $L_n$  は、 $|z_2| < |\zeta_2|$  のとき

$$\begin{aligned} L_1 &= (\log \zeta_2 + 1) N_{-1} - \frac{N_0}{\zeta_2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m N_m}{\zeta_2^{m+1}} \\ L_n &= \frac{(-1)^n}{\zeta_2^n} \left[ \frac{\zeta_2 N_{-1}}{n(n-1)} + \frac{N_0}{n} \right. \\ &+ \left. \sum_{m=1}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} \frac{N_m}{\zeta_2^m} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

となる。

### (3) L2L

$O$  点における局所展開を  $O'$  点における局所展開に変換する。 $O$  点から見た  $O'$  点を  $\zeta$  とする。このとき

も、観測点  $z$  に対して  $|z| < |\zeta|$  である。新しい局所展開係数  $K'_n$  は、 $|z_1| < |\zeta_1|$  のとき

$$K'_n = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} \zeta_1^{m-n} K_m \quad (48)$$

局所展開係数  $L'_n$  は、 $|z_2| < |\zeta_2|$  のとき

$$L'_n = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} \zeta_2^{m-n} L_m \quad (49)$$

となる。

### 4.3 高速多重極アルゴリズム

等方弾性体の場合<sup>2)</sup>と同様に、境界を含む領域を4分木により分割し、その上で計算を進める。計算アルゴリズムはまったく同様である。

### 5. 計算時間と記憶容量の検証

高速多重極法の効果を確認するために、 $2 \times 2$  個の円形空洞問題、 $3 \times 3$  個の円形空洞問題、径の比が  $2 : 1$  で長径が水平から  $30^\circ$  傾いた楕円の空洞問題を解析し、反復1回あたりの計算時間と必要記憶容量を計測した。弾性係数は

$$E_1 = E, \quad E_2/E_1 = 2, \quad \nu_{12} = 0.25, \quad G_{12}/E_1 = 0.4$$

で与えた(ここで与えた弾性係数の定義については、たとえば、文献<sup>5)</sup>を参照)。平面応力問題の場合、コンプライアンステンソルの成分は

$$\begin{aligned} s_{11}^{11} &= 1/E, & s_{22}^{22} &= 0.5/E \\ s_{11}^{22} &= s_{22}^{11} = -0.25/E, & s_{12}^{12} &= 1.25/E \end{aligned}$$

となる。

得られた計算時間および記憶容量を Fig.4 および Fig.5 に示す。ここでは、多重極展開は  $M_{25}$ 、 $N_{25}$  ま

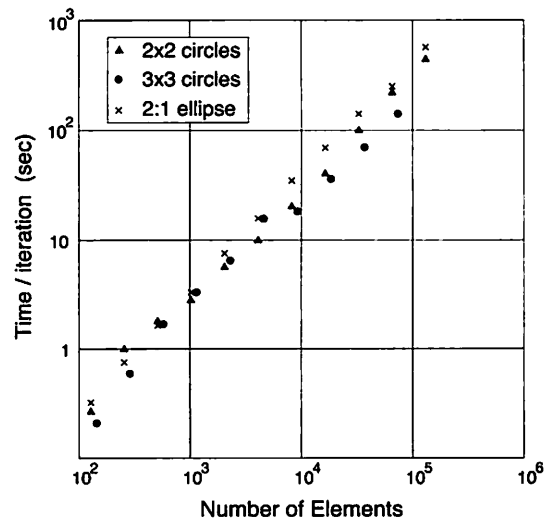


Fig.4 Computing time

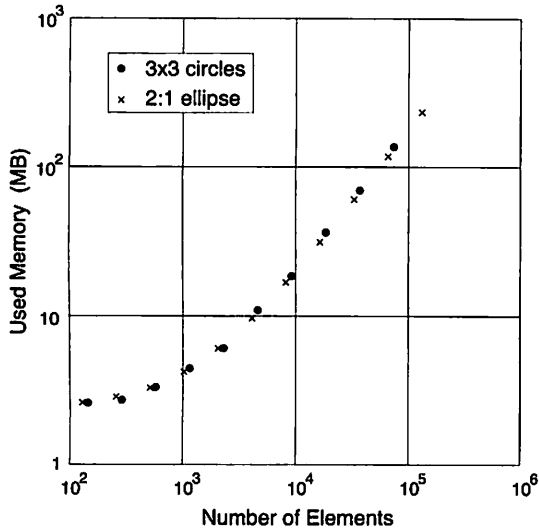


Fig. 5 Used memory

でとり、1近傍(対象とするセルに隣接するセル)を近傍としている。また、最小セルに含まれる要素数の最大値は8とした。

Fig. 4においては、反復1回あたりの計算時間は、問題によって多少異なるものの、要素数が1000以上の場合にはほぼ要素数に比例していることがわかる。一方、Fig. 5においては、使用記憶容量は、要素数が1000以上の場合には、ほぼ要素数に比例していることが明らかである。

## 6. 遠方・近傍の定義に関する検討

ポテンシャル  $\phi, \chi$  の多重極展開 (33), (34) が収束するための条件は、遠方条件  $|z_1| > |\zeta_1|$  および  $|z_2| > |\zeta_2|$  である。一方、ここで用いた多重極アルゴリズムにおいては、空間座標による一つの4分木を使って計算を行った。すなわち、座標変換前の  $z, \zeta$  を用いて遠近の判断をしている。しかし、一般には  $|z| > |\zeta|$  であつても  $|z_1| > |\zeta_1|$  (あるいは  $|z_2| > |\zeta_2|$ ) は自明ではない。条件  $|z_1| > |\zeta_1|$  および  $|z_2| > |\zeta_2|$  を満足するために、 $z, \zeta$  に与えられる条件について検討しよう。

条件  $|z_1| > |\zeta_1|$  を満足するためには、

$$\frac{|\zeta_1|}{|z_1|} = \frac{|\zeta + \gamma_1 \bar{\zeta}|}{|z + \gamma_1 \bar{z}|} = \frac{|\zeta| |1 + \gamma_1 (\bar{\zeta}/\zeta)|}{|z| |1 + \gamma_1 (\bar{z}/z)|} < 1$$

でなければならない。すなわち、

$$\frac{|\zeta|}{|z|} < \frac{|1 + \gamma_1 (\bar{z}/z)|}{|1 + \gamma_1 (\bar{\zeta}/\zeta)|} = \frac{|1 + \gamma_1 e^{-2i\theta}|}{|1 + \gamma_1 e^{-2i\alpha}|}$$

が  $z, \zeta$  に与えられる条件である。ここに、 $z, \zeta$  の偏角を  $\theta, \alpha$  とおいた。結局、任意の偏角をもつ  $z, \zeta$  について条件  $|z_1| > |\zeta_1|$  を満足するためには、

$$\frac{|\zeta|}{|z|} < \frac{|1 - |\gamma_1||}{|1 + |\gamma_1|} \quad (50)$$

でなければならない。 $\gamma_1$  については、 $|\gamma_1| < 1$  という条件があるので<sup>4)</sup>、右辺は0から1の間の値をとる。条件  $|z_2| > |\zeta_2|$  についてもまったく同様の条件が得られる。

一般に (50) の右辺は1より小さく、例題の場合でも約0.34であった。異方性のそれほど強くない場合には、近傍として2近傍をとることにより、解析の安定は維持できるものと考えられる。しかし、異方性の強い場合には条件値はさらに小さな値となり、空間座標系にもとづいた4分木上では高速多重極アルゴリズムの適用が困難となる。解決法としては、 $z_1$  系と  $z_2$  系それぞれに座標変換に合わせた別の4分木を作って、その上で計算を進める方法が考えられる。しかし、一般に  $\gamma_\lambda$  は複素数であり、直交異方性の場合でも  $\gamma_1 = \gamma_2$  となって変換の主軸が直交しない場合もあるので、具体的な方法についてはなお検討が必要である。

## 7. おわりに

2次元直交異方性体の静弾性問題において、高速多重極境界要素法の定式化を行い、その数値解析法を提案した。本論文で提案された事項および得られた結果は次の通りである。

1. 異方性弾性体の変位場および応力場の複素ポテンシャル表現を基礎として、複素ポテンシャルにより表現した基本解および二重層核を用いて、境界要素法を定式化した。
2. 複素ポテンシャルの多重極展開、局所展開、移動公式を導き、高速多重極法を定式化した。
3. 数値解析例により、計算時間と必要記憶容量が、要素数  $N$  に対して  $O(N)$  となることを検証した。
4. 高速多重極アルゴリズムの実行に空間座標を用いた4分木を使用する場合の遠近条件を導き、条件を満足させられない場合の改善手法について検討した。

上の最後の項目については、さらに検討が必要であり、現在これに関する研究が進行中である。

## 参考文献

- 1) 福井卓雄, 服部純一, 土居野優: 高速多重極法の境界要素解析への応用, 構造工学論文集, 43A, (1997), pp. 373-382.
- 2) 福井卓雄, 持田哲郎: 高速多重極境界要素法の2次元静弾性問題への応用, 境界要素法論文集, 13, (1996), pp. 131-136.
- 3) 福井卓雄, 玖津見敏広: 高速多重極境界要素法による3次元静弾性問題の解析, 境界要素法論文集, 15, (1998), pp. 99-104.
- 4) Green, A.E. and W. Zerna: *Theoretical Elasticity*, 2nd ed. Oxford, (1968).
- 5) アムバルツミヤン, S.A (大橋義夫監修, 神谷紀生訳): 異方性弾性板の理論, 森北出版, (1975, 原著 1967).