境界要素法論文集 Vol. 21 (2004年12月), 論文 No. 18-041015 JASCOME

変数係数楕円型方程式に支配される亀裂問題に対する境界要素法

A BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR A CRACK PROBLEM GOVERNED BY AN ELLIPTIC EQUATION WITH A VARIABLE COEFFICIENT

大久保 篤志[1), 若野 功[2)

Atsushi OHKUBO and Isao WAKANO

1) 京都大学情報学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町 E-mail: ohkubo@acs.i.kyoto-u.ac.jp)
2) 京都大学情報学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町 E-mail: wakano@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

We consider a boundary value problem for an elliptic equation with a variable coefficient in a two-dimensional bounded domain with a curved crack. We give the singularity of the solution at the tips of the crack with an assumption of the singularity of crack opening displacement. We also point out a difficulty to adopt the boundary element method for an elliptic equation with a variable coefficient.

Key Words: Crack problems, Elliptic equation with a variable coefficient, Boundary integral equation

1. 序

本論文では, 亀裂を含む2次元領域において変数係数楕円型方程式 $Lu := -\nabla \cdot a(x)\nabla u = f$ の境界値問題に対して, 境界要素法の適用の可能性について論じる.

領域中に亀裂が存在する場合, 一般には楕円型方程式の解の正則性定理が成立せず, 解は亀裂先端において特異性を有する. これは物理的には応力集中や電荷集中として知られている現象であり, 亀裂端点における解の特異性の考察は, 理論的にも応用的にも重要な問題である.

亀裂端点での解の漸近展開において, 特異性を有する項の係数は応力拡大係数と呼ばれている. 応力拡大係数は破壊力学における破壊評価基準となる重要なパラメーターの一つである (cf.[(1)]).

若野[(3)] は, 亀裂を含む2次元領域における弾性方程式に対して, 特異要素を含む境界要素解析を行い, 亀裂上での境界積分方程式の解に対する誤差評価を得た. 次節において, 若野[(3)] の内容をLaplace方程式の場合に置き換えて引用する.

続いて, 大久保[(4)] に従って, 変数係数方程式 $Lu = f$ に対して, 亀裂を含む2次元有界領域において, 境界値問題を定式化し, その解の亀裂端点における特異性に関する理論的結果について述べる.

2. Laplace方程式に対する結果

若野[(3)] をもとに, 亀裂を含む無限領域におけるLaplace方程式の境界値問題に対する境界要素解析を述べる.

先ず, 数値解析を行う上での理論的背景を説明することにする.

Σ を $\mathbb{R}^2$ における亀裂とし, 亀裂の弧長を l とする. また, $\mathbb{R}^2_\Sigma := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Sigma}$ とおく (Fig.1).

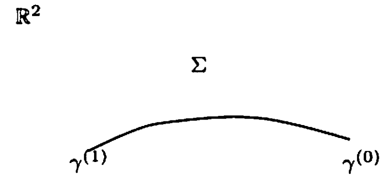

Fig. 1 亀裂

ここで, $\mathbb{R}^2_\Sigma$ における境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^2_\Sigma \\ \partial^{\pm}_{\nu} u = f & \text{on} \quad \Sigma \end{cases} \tag{1}$$

を考える.

境界値問題 (1) の解を考察する関数空間として, 関数

$$w(x) := (|x|^2+1)^{-1/2}(1+\log\sqrt{|x|^2+1})^{-1}$$

を重みとする次の重み付きSobolev空間 $H^1_w(\mathbb{R}^2_\Sigma)$ を定義する.

$$H^1_w(\mathbb{R}^2_\Sigma) := \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2_\Sigma); wu, \partial_1 u, \partial_2 u \in L^2(\mathbb{R}^2_\Sigma)\}$$

$H^1_w(\mathbb{R}^2_\Sigma)$ は

$$(u,v)_{H^1_w(\mathbb{R}^2_\Sigma)} := \int_{\mathbb{R}^2_\Sigma} (w^2 uv + \partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v) dx$$

を内積とする Hilbert 空間である.

更に, 重層ポテンシャルの密度関数が属す空間 $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ を

$$H_{00}^{1/2}(\Sigma) := \{\varphi \in H^{1/2}(\Sigma); \int_\Sigma d(x)^{-1}|\varphi(x)|^2 ds_x < \infty\}.$$

と定義する. ただし, $d \in C^\infty(\Sigma), d(x) > 0$ であって, 亀裂先端 $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}$ に対して, $\lim_{x \to \gamma^{(i)}} d(x)/|x - \gamma^{(i)}| = d \neq 0, (i = 0, 1)$ を満たすものとする.

このとき, 境界値問題 (1) の一意可解性について次の定理が成り立つ.

定理 1 $f \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)'$ とすると, 境界値問題 (1) は重み付き *Sobolev* 空間 $H_w^1(\mathbb{R}_\Sigma^2)$ において, 定数分の不定性を除き一意可解である.

ここで, $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ に対して, 重層ポテンシャル $DL(\varphi)$ を

$$DL(\varphi)(x) := \int_\Sigma \partial_{\nu,y} G(x,y)\varphi(y) ds_y$$

と定義する. ただし,

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x-y|}$$

であり, 2 次元における $-\Delta$ の基本解である.

このとき, 境界値問題 (1) は, 亀裂 Σ における次の積分方程式と同値である:

$$\partial_\nu DL(\varphi) = f \quad \text{on} \quad \Sigma$$

i.e.

$$\langle r_\Sigma \partial_\nu DL(\varphi), \psi \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Sigma)} = \langle f, \psi \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Sigma)}, \quad \forall \psi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma) \quad (2)$$

ただし, r_Σ は Σ への制限である.

ここで, cut-off 関数 $\chi_1^{(0)}, \chi_1^{(1)}$ を

$$\chi_1^{(0)}(s) := \begin{cases} 1 & s < s_1^{(0)}, \\ 0 & s_2^{(0)} < s, \end{cases} \quad \chi_1^{(1)}(s) := \begin{cases} 0 & s < s_2^{(1)}, \\ 1 & s_1^{(1)} < s, \end{cases}$$
$$(0 < s_1^{(0)} < s_2^{(0)} < s_2^{(1)} < s_1^{(1)} < l)$$

で定義する.

境界積分方程式 (2) の解は, 次のような特異性を有している.

定理 2 $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ を $f \in H^{1/2}(\Sigma)$ に対する境界積分方程式 (2) の解とする. このとき, 定数 $c^{(0)}, c^{(1)}$ が存在して,

$$\varphi - (c^{(0)}\mathcal{S}^{(0)} + c^{(1)}\mathcal{S}^{(1)}) \in H_{00}^{3/2}(\Sigma)$$

が成り立つ. ただし, $\mathcal{S}^{(0)} = s^{1/2}\chi_1^{(0)}(s), \mathcal{S}^{(1)} = (l-s)^{1/2}\chi_1^{(1)}(s)$ であり,

$$H_{00}^{3/2}(\Sigma) := \{\psi \in H^{3/2}(\Sigma); \psi' \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)\}$$

である.

以上の準備の下で, Laplace 方程式の境界値問題 (1) に対する境界要素解析を述べる. ここでは亀裂 Σ の近似は行わず, パラメタ区間上に特異要素を含む有限要素空間を構成する.

区間 $[0, l]$ 上に $n+1$ 個の点 $\{s_i\}_{i=0}^n$,

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1} < s_n = l$$

を定め, $h := \max_{0 \le i \le n-1} |s_{i+1} - s_i|$ とし, $\varphi_i(s_j) = \delta_{ij}$ を満たす $n-1$ 個の区分線型関数 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n-1}$ で張られる空間を V_h^R を書く. 次に, 以下に示す 2 組の特異要素を導入する.

特異要素 1

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(1)}(s) &:= s^{1/2}\chi_1^{(0)}(s), \quad (0 \le s \le l) \\ \varphi_n^{(1)}(s) &:= (l-s)^{1/2}\chi_1^{(1)}(s), \quad (0 \le s \le l) \end{aligned}$$

特異要素 2

$$\varphi_0^{(2)}(s) := \begin{cases} s^{1/2} & , 0 \le s \le l/8, \\ -\sqrt{8/l}s + \sqrt{l/2} & , l/8 \le s \le l/4, \\ 0 & , \text{otherwise}. \end{cases}$$
$$\varphi_n^{(2)}(s) := \begin{cases} (l-s)^{1/2} & , 7l/8 \le s \le l, \\ \sqrt{8/l}s - 3\sqrt{l/2} & , 3l/4 \le s \le 7l/8, \\ 0 & , \text{otherwise}. \end{cases}$$

$\{\varphi_0^{(1)}, \varphi_n^{(1)}\}$ で張られる空間を $V^{S(1)}$, $\{\varphi_0^{(2)}, \varphi_n^{(2)}\}$ で張られる空間を $V^{S(2)}$ と書く. それぞれの特異要素を含む有限要素空間を $V_h^{(i)} := V^{S(i)} \oplus V_h^R, (i = 1, 2)$ と書く. ここで, S, R はそれぞれ singular, regular を意味する. 特に区別の必要のないときは, 特異要素を示す添字を省略し, V_h 及び V^S のように表す. $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ 上の双一次形式 $b(\cdot,\cdot)$ を

$$b(\varphi, \psi) := \langle r_\Sigma \partial_\nu DL(\varphi), \psi \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Sigma)}$$

と定めて, 亀裂 Σ と $f \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ は近似せず, 離散化方程式として,

$$b(\varphi_h, \psi_h) = \langle f, \psi_h \rangle_{H_{00}^{1/2}(\Sigma)}, \quad \forall \psi_h \in V_h \quad (3)$$

を考えると, V_h は $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ の閉部分空間であるので, 方程式 (3) を満たす一意的な解 $\varphi_h \in V_h$ が存在する. V_h の定め方から, 近似解 $\varphi_h \in V_h$ は次のように一意的に V^S と V_h^R の要素に分解される:

$$\varphi_h = \varphi_h^S + \varphi_h^R, \quad \varphi_h^S \in V^S \quad \varphi_h^R \in V_h^R$$

また, 定理 2 で与えられる定数 $c^{(0)}, c^{(1)}$ と境界積分方程式 (2) の解 $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ に対して

$$\varphi^R := \varphi - (c^{(0)}\varphi_0 + c^{(1)}\varphi_n)$$

とおく.

このとき, 特異要素を用いた境界要素解析に対し, 近似解の誤差評価として次の定理が成立する.

定理 3 $f \in H^{1/2}(\Sigma)$ とする. $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ を境界積分方程式 (2) の厳密解, $\varphi_h^{(i)} \in V_h^{(i)}, (i=1,2)$ を離散化方程式 (3) の近似解とする. このとき, $\varphi^{R(i)}, (i=1,2), h$ に依らない定数 C が存在して, 次の評価が成立する:

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_h^{(1)}\|_{H_{00}^{1/2}(\Sigma)} &\leq C\|\varphi^{R(1)}\|_{H_{00}^{3/2}(\Sigma)} h, \\ \|\varphi - \varphi_h^{(2)}\|_{H_{00}^{1/2}(\Sigma)} &\leq C\|\varphi^{R(2)}\|_{H_0^{3/2-\epsilon}(\Sigma)} h^{1-\epsilon}, \forall \epsilon > 0 \end{aligned}$$

ここで, $H_0^s(\Sigma)(s \neq 1/2, 3/2, \cdots)$ は, $C_0^\infty(\Sigma)$ の $H^s(\Sigma)$ における完備化である.

3. 亀裂端点における解の特異性

次に, 大久保 [4] に従い, 前節の理論を変数係数方程式に拡張することを考える.

Ω を滑らかな境界 Γ を持つ $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし, Σ を Ω に含まれる亀裂とする. 亀裂 Σ は C^∞ 級の Jordan 開曲線であり, ある C^∞ 級 Jordan 閉曲線 S に含まれ, $\overline{\Sigma} \neq S$ であることを仮定する. 以後, 亀裂先端をそれぞれ $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}$ と表す. また, 考える領域は Ω から亀裂 Σ を除いた領域 $\Omega_\Sigma := \Omega \backslash \overline{\Sigma}$ とする. Γ_D, Γ_N を Γ の空でない開部分集合とし, $\overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N} = \Gamma$ を満たすものとする (Fig.2).

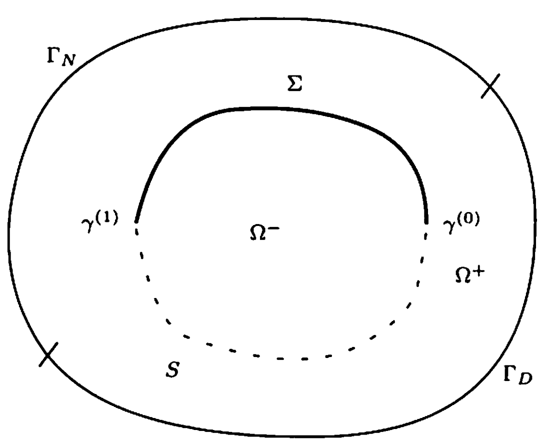

Fig. 2　領域と亀裂

$f \in L^2(\Omega) = L^2(\Omega_\Sigma), g = H^{1/2}(\Gamma_N)$ とする. 変数係数楕円型作用素 $L := -\nabla \cdot a(x)\nabla$ に対して, 境界値問題

$$\begin{cases} L(u) &= f \text{ in } \Omega_\Sigma, \\ u &= 0 \text{ on } \Gamma_D, \\ \mathcal{B}_\nu u &= g \text{ on } \Gamma_N, \\ \mathcal{B}_\nu^\pm u &= 0 \text{ on } \Sigma \end{cases} \tag{4}$$

を考える. ここで, 関数 a は $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ であり, ある正の定数 c が存在して, $c^{-1} \leq a(x) \leq c, \forall x \in \mathbb{R}^2$ を満たすものとする. また, $\mathcal{B}_\nu u = a(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma$ とし, S の外側での u の余法線導関数を $\mathcal{B}_\nu^+ u = a(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{S^+}$, 内側での u の余法線導関数を $\mathcal{B}_\nu^- u = a(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{S^-}$ とする. ただし, ν は, Γ 及び S の外向き単位法線である.

解の特異性を決定するために, 非斉次境界値問題 (4) の解に対して, 亀裂端点の近傍で正則性定理が成り立つ部分とそうでない部分に分離する.

次の境界値問題

$$\begin{cases} L(u_0) &= f \text{ in } \Omega, \\ u_0 &= 0 \text{ on } \Gamma_D, \\ \mathcal{B}_\nu u_0 &= g \text{ on } \Gamma_N \end{cases} \tag{5}$$

は一意の解 $u_0 \in H^1(\Omega)$ を持つ. さらに, Ω の任意のコンパクト部分集合 Ω_c に対して, $u_0|_{\Omega_c} \in H^2(\Omega_c)$ である. $u_0 \in H^2(\Omega_c)$ より, $h := -\mathcal{B}_\nu u_0$ とおくと, $h \in H^{1/2}(\Sigma)$ である. そこで, 次の問題を考える.

$$\begin{cases} L(u_c) &= 0 \text{ in } \Omega_\Sigma, \\ u_c &= 0 \text{ on } \Gamma_D, \\ \mathcal{B}_\nu u_c &= 0 \text{ on } \Gamma_N, \\ \mathcal{B}_\nu^\pm u_c &= h \text{ on } \Sigma. \end{cases} \tag{6}$$

境界値問題 (4) と (6) は一意可解であるから, $u = u_0 + u_c$ は境界値問題 (4) の解であり, u の亀裂端点における特異性は u_c のみに含まれる.

以下, 一方の端点 $\gamma^{(0)}$ のみに注目するが, $\gamma^{(1)}$ の近傍での解の構造も全く同様に導くことができる.

変数係数作用素に対しては, 一般に大域的な基本解の存在は保証されず, 境界値問題 (6) の解 u は, 局所的な基本解 $E(x,y)$ を用いて亀裂端点 $\gamma^{(0)}$ の近傍 B_δ で

$$\begin{aligned} u(x) = &- \int_{\Sigma_{2\delta}} \mathcal{B}_{\nu,y} E(x,y)[u]_{\Sigma_{2\delta}}(y) ds_y \\ &+ \int_{\partial B_{2\delta}} \mathcal{B}_{\nu,y} E(x,y) u(y) ds_y \\ &- \int_{\partial B_{2\delta}} \mathcal{B}_{\nu,y} E(x,y) \mathcal{B}_{\nu,y} u(y) ds_y, \end{aligned} \tag{7}$$

とポテンシャル表示されるにとどまる (Fig.3).

ここで, 幾つかの記号を導入しておく. $\Sigma_\delta := \{x \in \Sigma; |x - \gamma^{(0)}| < \delta\}, [u] := u^+ - u^-, [u]_{\Sigma_\delta} := r_{\Sigma_\delta}[u]$. ただし, r_{Σ_δ} は Σ から Σ_δ への制限である.

$u \in H^1(\Omega_\Sigma)$ を境界値問題 (6) の解とし,

$$\varphi := [u]_{\Sigma_{2\delta}}$$

とおく. このとき, 次を仮定する:

定数 $c^{(0)}$ が存在して,

$$\varphi - c^{(0)} \mathcal{S}^{(0)} \in H^{3/2}(\Sigma\delta) \tag{8}$$

を満たす. ここで, $\mathcal{S}^{(0)} = s^{1/2}\chi(s)$ であり, χ は $\gamma^{(0)}$ の近傍で 1 の値を取り, $\gamma^{(1)}$ の近傍で 0 の値を取る cut-off 関数である.

注意　この仮定は Poisson 方程式の解に対しては成り立つが, 現状では未解決である (cf. [2], [3]).

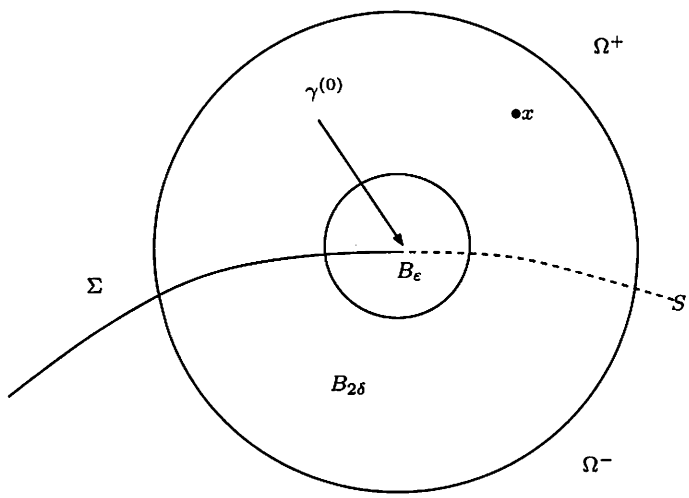

Fig. 3　$\gamma^{(0)}$ の近傍

亀裂先端 $\gamma^{(0)}$ を原点とする座標系 (x_1, x_2) を次のように定める.

$$\begin{cases} \gamma^{(0)}\text{において } x_1\text{-軸と}\Sigma\text{が接する,} \\ \gamma^{(0)}\text{の近傍 } B^{(0)}\text{が存在して}\Sigma \cap B^{(0)} \subset \{(x_1, x_2) \mid x_2 < 0\}. \end{cases}$$

また, $\gamma^{(0)}$ を中心とする極座標系を (r, θ) で表す. ここで, 角 θ については x_1-軸の正の部分が $\theta = 0$ となるように定める. (Fig.4)

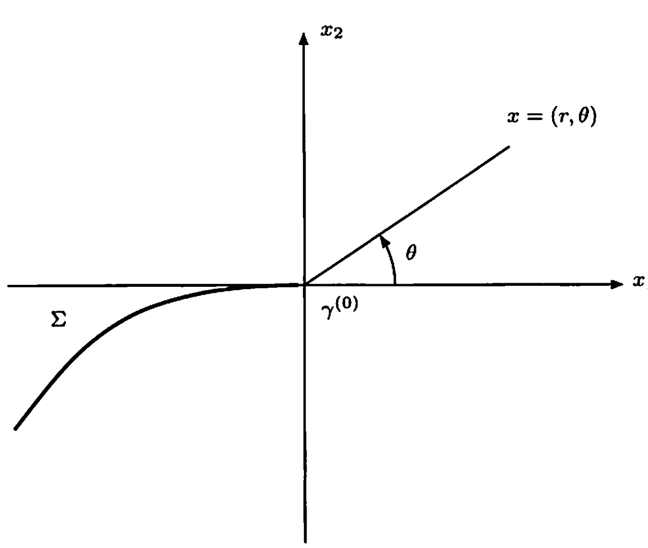

Fig. 4　$\gamma^{(0)}$ の近傍の局所座標系

この座標系において, u の特異性に関して次の定理が成り立ち, 本論文の主定理である.

定理 4 $u \in H^1(\Omega_\Sigma)$ を境界値問題 (4) の解とし, $\varphi = [u]_{\Sigma_{2\delta}}$ に対して, (8) を仮定する. このとき, 十分小さな $\delta > 0$ に対して, 定数 C と $u^{(0)} \in H^2(B_{\Sigma,\delta})$ が存在して, u は亀裂先端 $\gamma^{(0)}$ の近傍 $B_{\Sigma,\delta}$ において

$$Cr^{1/2}\sin(\theta/2) + u^{(0)}$$

と表わせる.

4. まとめ

変数係数方程式 $Lu = f$ に対する境界積分方程式の特異性が定まれば, Laplace 方程式と同様に特異要素を用いた境界要素解析を実行でき, より高精度の数値解を求めることができる. そこで解決すべき問題としては, 大きく次の二点に分けられる. 第一に, 大域的な基本解が存在し, 亀裂 Σ 上の積分方程式が得られる場合は, (2) の形の方程式の解の特異性を特定するということである.

第二に, 局所的な基本解の存在までしか保証されず, (7) の形での解の表現式しか得られない場合は, この式が積分方程式として意味を持つかどうかを考察し, (7) が方程式として意味を持ったとして, その解の特異性を特定するという問題である.

参考文献

(1) G.R.Irwin, *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*, J. Appl. Mech.,24(1957), 361–364.

(2) W.L.Wendland and E.P.Stephan, *A hypersingular boundary Integral method for two-dimensional screen and crack problems*, Arch. Rational Mech. Anal.,112(1990), 363–390.

(3) 若野 功, 二次元曲線亀裂の数学解析と数値解析, 日本応用数理学会論文誌 Vol.13, No.1, 2003, 59–80.

(4) 大久保 篤志, ある変数係数楕円型方程式に関する亀裂問題の解の特異性, 京都大学修士学位論文, 2004.