

Taylor 展開近似における次数の影響を考慮した Spectral Stochastic BEM の性能の評価

PERFORMANCE EVALUATION OF SPECTRAL STOCHASTIC BEM CONSIDERING THE EFFECT OF THE TAYLOR EXPANSION ORDER IN APPROXIMATION

本田 利器

Riki HONDA

京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄, E-mail:honda@catfish.dpri.kyoto-u.ac.jp)

This paper presents a stochastic BEM for quantitative evaluation of the effect of the boundary condition uncertainties. The presented SBEM is based on the spectral stochastic approach. It represents uncertain boundary conditions by truncated Karhunen-Loève expansion and approximate the governing equation in the finitely truncated homogeneous chaos. The presented SBEM is applied to an elasto-static problem with uncertain boundary geometry. The results show good agreement with those obtained by Monte Carlo simulation. The effect of the Taylor expansion order is also discussed.

Key Words: Spectral Stochastic Boundary Element Method, Karhunen Loeve Expansion, Polynomial Chaos Expansion, Taylor Expansion

1. はじめに

本稿では、境界条件が不確定性を有する問題を扱う境界要素法として、Spectral Stochastic Approach (SSA) に基づく手法、スペクトル確率境界要素法 (Spectral Stochastic Boundary Element Method, SSBEM)⁽¹⁾ を紹介し、その定式化で用いられる Taylor 展開の次数の影響等について検討する。

Nakagiri *et al.*⁽²⁾ や Kaminski⁽³⁾ は、摂動法に基づく方法により、確率問題を扱う境界要素法を提案し、静的問題に適用している。Manolis ら⁽⁴⁾ は、不確実な媒体内の SH 波動場の BEM 解析のための Green 関数の Polynomial Chaos 展開による導出を示している。SSBEM はこれらの手法とは異なり、SSA による定式化を用いる。

SSA は、スペクトル確率有限要素法 (Spectral Stochastic Finite Element Method, SSFEM) のために開発された手法であり、確率密度関数の評価が可能であること、比較的大きな不確定性を有する問題も安定的に解析が可能である等の長所を有する。SSBEM は、これらの長所を有する点で従来の確率境界要素法に対する優位性を有する手法であると言える。

以下では、SSBEM の基本的な定式化を示し、境界の幾何条件が不確定性を有している 2 次元平面ひずみ弾性問題に適用し、モンテカルロシミュレーションによる結果と比較する。また、境界の幾何形状の変化にともなうマトリクスの変

化分を評価するための Taylor 展開の次数が解析結果に与える影響についても検討する。

2. Spectral Stochastic Approach

提案するスペクトル確率境界要素法は、Ghanem & Spanos⁽⁵⁾ により提案されたスペクトル確率有限要素法^{(5),(6)} の基本的な考え方である Spectral Stochastic Approach (SSA) に基づき、境界の幾何的な不確定性を考慮した解析を行うものである。

SSA では、対象とする問題の不確定性を有するパラメタの場合を Karhunen-Loève 展開した定式化を与える。また、解を Polynomial Chaos 展開された形で定式化する。Karhunen-Loève 展開及び Polynomial Chaos 展開された方程式を、Homogeneous Chaos 空間での近似として求めるため、同空間の基底である Polynomial Chaos 汎関数へ射影する。そして、射影されることで得られた連立方程式を解くことで解を得るというものである。

2.1. Karhunen-Loève 展開

SSA では、不確実な場を Karhunen-Loève 展開 (KL 展開) する。KL 展開とは、与えられた相関関数を有する確率場を、有限の項数の線形和で効率よく再現できるように展開する手法である。

SSBEM では、KL 展開を用い、対象とする確率過程 $s(x, \omega)$

を,

$$s(x, \varpi) = \bar{s}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\varpi) \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \quad (1)$$

という線形和で表現する。ここで、 x は空間座標位置; ϖ は確率空間における事象; \bar{s} は s の期待値; $f_i(x)$ は展開の基底関数; λ_i は定数, $\xi_i(\varpi)$ は正規直交性を有する独立 Gauss 確率変数をそれぞれ表わす。

なお、関数 $f_i(x)$ 及び定数 λ_i は、対象とする領域を S , 領域内の 2 点 x_1, x_2 の相関関数を $C(x_1, x_2)$ とすると、積分方程式

$$\int_S C(x_1, x_2) f(x_2) dx_2 = \lambda_i f(x_1) \quad (2)$$

の固有関数及び対応する固有値としてそれぞれ与えられる。

数値解析では、式 (1) の無限大までの和をとることはできないため、式 (1) の i についての和は有限の展開次数で打ちきる。(この展開次数を以下では KL 展開次数といい、 N_{KL} と書く。) したがって、対象となる問題を完全に表現するものではない。しかし、KL 展開は、与えられた確率場を 2 次確率モーメントの意味で最良近似するものであるため、有限次数で打ち切っても与えられた確率場の比較的よい再現を与える。KL 展開による確率場の再現精度については、例えば Ghanem & Spanos,⁽⁵⁾ Spanos & Ghanem⁽⁷⁾等に検討例がある。

2.2. Polynomial Chaos 展開

SSA では、解を、Homogeneous Chaos 空間 (HC 空間) に属する確率過程であると想定して算出する。HC 空間は、独立な Gauss 確率変数 $\xi_i(\varpi)$ ($i = 1, \dots, \infty$, 以下では、引数を省略して ξ_i と書く。) を引数に有する Polynomial Chaos 汎関数 (PC 汎関数) の線形和として表現される確率過程の集合である。 ϖ は確率空間内の事象を表す。したがって、 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)^T$ とおくと、SSA の解 $u(\varpi)$ は、PC 汎関数 $\Phi_n(\xi)$ を用いて、次式のように表わされる。

$$u(\varpi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \sum_{i_1, \dots, i_k} \left\{ a_{i_1, \dots, i_k}^{n_1, \dots, n_k} \Phi_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \right\} \quad (3)$$

ただし、 $a_{i_1, \dots, i_k}^{n_1, \dots, n_k}$ は u の特性を定める係数であり、PC 汎関数 $\Phi_n(\xi)$ は、

$$\Phi_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}) = e^{\frac{1}{2} \xi^T \xi} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_n}} e^{-\frac{1}{2} \xi^T \xi} \quad (4)$$

として得られる。以下では、Ghanem & Spanos⁽⁵⁾にならい、 $\Phi_n(\xi)$ に順に番号を与えた PC 汎関数 $\Psi_i(\xi)$ を用いる。この時、式 (3) は、

$$u(\varpi) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i(\xi) \quad (5)$$

となる。PC 汎関数 $\Psi_i(\xi)$ は

$$(\Psi_i(\xi) \Psi_j(\xi)) = 0 \quad (i \neq j) \quad (6)$$

という直交性を有し、HC 空間の直交基底を構成する。なお、 $\langle \cdot \rangle$ は内積を意味し、積の期待値をとることと定義される。確率過程の式 (5) の形での展開を Polynomial Chaos 展開 (PC 展開) という。

PC 汎関数の引数として、KL 展開で用いた Gauss 確率変数 ξ_i を用いることで、KL 展開した確率過程に対応する解を算出することができる。確率変数 ξ_i の数や、考慮する HC 空間の次数 (以下、HC 次数という。) が上がると、それに伴い、基底として用いる PC 汎関数の項数も増加する。以下、この項数を N_{PC} と書く。

HC 空間を無限大次数まで考えることは不可能であるので、有限の HC 次数を考慮する。PC 展開の項数は、用いる確率変数の個数 (この場合 KL 展開次数) と HC 次数が与えられれば、一意に定まる。したがって、以下では、Ghanem らの表記に従い、PC 展開の項数は直接言及せず、対応する HC 次数により表わすこととする。

2.3. 期待値、分散、確率密度関数

式 (5) の形で算出された解の確率的特性値は以下のように容易に算出される。期待値は第 1 項 u_0 として与えられる。また、分散 $\langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle$ は、

$$\langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N_{PC}} u_i^2 \langle \Psi_i^2 \rangle \quad (7)$$

として与えられる。確率密度関数は、モンテカルロシミュレーションと同様に正規 Gauss 乱数 ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) を発生させて式 (5) を評価し、その結果を統計的に整理することで得られる。上記の例はスカラー量であるが、ベクトル量についても、その各要素について同様の処理をすることが可能である。

3. スペクトル確率境界要素法

本章では、提案するスペクトル確率境界要素法 (Spectral Stochastic Boundary Element Method, 以下、SSBEM という。) の定式化について述べる。

なお、以下の例では、物体力は考慮せず、また、境界は不確定性を有するがなめらかであると仮定する。

境界要素法では、境界の幾何条件や外力等の条件に基づき、例えば、任意の内点における変位 u^i は、

$$u^i = \int_{\Gamma} \bar{q} u d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{q} u d\Gamma \quad (8)$$

と与えられる。ここで \bar{u}, \bar{q} は、基本解^{(8),(9)}を表し、 Γ は境界を表す。

いま、境界の期待値として得られる形状に沿って曲線座標 s を設ける。不確定性を有する幾何形状の、期待値からの座標軸直交方向のずれを s の関数とすると、この関数は s 軸上の確率過程とみなせる。この確率過程の s 軸上の2点 s_1, s_2 の相関関数が、 $C(s_1, s_2)$ と与えられているとする。この時、境界の幾何形状は式 (2) の解 f_i, λ_i を用いて、式 (1) と同様に

$$\Gamma(s, \omega) = \Gamma_0(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\omega) \Gamma_i(s) \quad (9)$$

と Karhunen-Loève 展開することができる。ここで、 Γ_0 は幾何形状の期待値であり、 $\Gamma_i(s) = \sqrt{\lambda_i} f_i(s)$ である。実際の解析においては、式 (9) の和をとる範囲は有限の KL 展開次数 N_{KL} で打ち切る。

今、 ξ_i を不確定性を有するパラメタ τ_i とおき、パラメタ τ_i の変化による影響を定量的に評価する。パラメタ τ_i が変化することにより、積分領域である境界の幾何形状 Γ が変化し、その変化分は式 (9) から

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma = \Gamma_i \quad (10)$$

となることが分かる。これは、対象とする空間と同じ次元のベクトルとなり、 τ_i が時間ならば速度に相当する。これは形状最適化問題等⁽¹⁰⁾でも用いられているものと同様の手法である。

τ_i が $\bar{\tau}_i$ から $\bar{\tau}_i + \Delta\tau_i$ だけ変化するのに伴う式 (8) の変化について考える。

τ_i の変化に伴う式 (8) 右辺第1項の被積分関数 $q\bar{u}$ の変化は、 $\frac{\partial}{\partial \tau_i}(q\bar{u})$ と与えられ、その勾配は $\nabla(q\bar{u})$ と与えられる。したがって、パラメタ τ_i の関数として与えられる境界 $\Gamma(\tau_i)$ が $\Gamma(\bar{\tau}_i + \Delta\tau_i)$ に変化するとき式 (8) の第1項の積分値は、二次近似まで考えると、

$$\int_{\Gamma(\bar{\tau}_i + \Delta\tau_i)} q\bar{u} d\Gamma = \int_{\Gamma(\bar{\tau}_i)} \left\{ 1 + \Delta\tau_i \frac{D}{D\tau_i} + \frac{1}{2} \left(\Delta\tau_i \frac{D}{D\tau_i} \right)^2 + \dots \right\} q\bar{u} d\Gamma \quad (11)$$

と得られる。ここで、 $\frac{D}{D\tau_i}$ は Lagrange 微分であり、

$$\frac{D}{D\tau_i} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau_i} + \Gamma_i \nabla \right) \quad (12)$$

である。式 (8) の右辺第2項についても同様に考えることができる。同様にして、 N_{KL} 個 (N_{KL} は KL 展開次数) のパラメタ τ_i ($i = 1, 2, \dots, N_{KL}$) が変化するときの式 (8) の値は、

$$\Delta\tau \frac{D}{D\tau} = \sum_{i=1}^{N_{KL}} \Delta\tau_i \frac{D}{D\tau_i} \quad (13)$$

を用いて、

$$u_{\bar{\tau} + \Delta\tau}^i = \int_{\Gamma} \left\{ 1 + \Delta\tau \frac{D}{D\tau} + \frac{1}{2} \left(\Delta\tau \frac{D}{D\tau} \right)^2 + \dots \right\} q\bar{u} d\Gamma - \int_{\Gamma} \left\{ 1 + \Delta\tau \frac{D}{D\tau} + \frac{1}{2} \left(\Delta\tau \frac{D}{D\tau} \right)^2 + \dots \right\} \bar{q}\bar{u} d\Gamma \quad (14)$$

と表すことができる。

ここで、積分と微分の順序を交換すれば、

$$u_{\bar{\tau} + \Delta\tau}^i = \int_{\Gamma(\bar{\tau})} q\bar{u} d\Gamma + \Delta\tau \frac{D}{D\tau} \int_{\Gamma(\bar{\tau})} q\bar{u} d\Gamma + \frac{1}{2} \left(\Delta\tau \frac{D}{D\tau} \right)^2 \int_{\Gamma} q\bar{u} d\Gamma' + \dots - \left\{ \int_{\Gamma(\bar{\tau})} \bar{q}\bar{u} d\Gamma + \Delta\tau \frac{D}{D\tau} \int_{\Gamma(\bar{\tau})} \bar{q}\bar{u} d\Gamma + \frac{1}{2} \left(\Delta\tau \frac{D}{D\tau} \right)^2 \int_{\Gamma} \bar{q}\bar{u} d\Gamma + \dots \right\} \quad (15)$$

と得られる。

式 (8) において、内点を境界に近づける極限をとり、それを離散化された境界要素の節点における変位と表面力について、選点法等を用いて定式化する。これにより、節点上の変位と応力を要素に持つベクトル u, q についての境界要素法の定式化が次式のように得られる。

$$Hu = Gq \quad (16)$$

ここで、 H, G は

$$H_{IJ} = \int_{\Gamma_J} \Phi_J \bar{q}_I d\Gamma + \frac{1}{2} \delta_{IJ} E \quad (17)$$

$$G_{IJ} = \int_{\Gamma_J} \Phi_J \bar{u}_I d\Gamma \quad (18)$$

を (I, J) 成分ブロックに有するマトリクスである。ここで、 Φ_J は、変位や表面力の補間関数を表し、 Γ_J は、節点 J の関係する補間関数のサポート区間の全体を表す。また、 \bar{u}_I, \bar{q}_I はいずれも、節点 I における変位や表面力を与える基本解を表している。 E は単位行列である。ここでは境界は滑らかであるとしているので、式 (17) の右辺第2項の係数は定数 $1/2$ をとる。

式 (15) を同様に離散化することで、パラメタ τ_i ($i = 1, 2, \dots$) が変化する際のマトリクス $H(\bar{\tau}_1 + \Delta\tau_1, \bar{\tau}_2 + \Delta\tau_2, \dots)$ は

$$\begin{aligned} H(\bar{\tau}_1 + \Delta\tau_1, \bar{\tau}_2 + \Delta\tau_2, \dots) &= H + \Delta\tau \frac{D}{D\tau} H + \frac{1}{2} \left(\Delta\tau \frac{D}{D\tau} \right)^2 H + \dots \\ &= H^0 + \sum_{i=1}^{N_{KL}} \Delta\tau_i H^i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \tau_i \tau_j H^{ij} + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

ただし,

$$\mathbf{H}^i = \frac{D}{D\tau_i} \mathbf{H} \quad (20)$$

$$\mathbf{H}^{ij} = \frac{D}{D\tau_i} \frac{D}{D\tau_j} \mathbf{H} \quad (21)$$

と得られる。期待値からの偏差を表すパラメタ $\Delta\tau_i$ を KL 展開における確率変数 ξ_i とすることにより、境界の幾何形状を KL 展開した場合のマトリクス \mathbf{H} の表現が得られる。このとき、各 τ_i について、

$$\tau_i = \bar{\tau}_i + \xi_i \quad (22)$$

と置くことになる。また、全く同様にしてマトリクス \mathbf{G} も展開できる。なお、式 (20) のマトリクス \mathbf{H}, \mathbf{G} の τ による Lagrange 微分については、有限差分で評価するものとした。

次に、スペクトル確率有限要素法と同様の考え方にに基づき、表面力や変位を、PC 展開した形で評価する。離散点における変位から構成されるベクトルを \mathbf{u} とし、これを式 (5) のように展開する。和をとる範囲は考慮する HC 空間の次数に対応する PC 展開の項数 N_{PC} で打ちきり、

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{N_{PC}} \mathbf{u}_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) \quad (23)$$

となる。ここで $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N_{KL}})$ は、KL 展開で用いた N_{KL} 個の確率変数から構成されるベクトルである。表面力も同様に展開でき、離散点での値を格納したベクトル \mathbf{q} は式 (23) と同様に表現できる。

式 (19) 及び式 (23) を式 (16) に代入することで不確定性を考慮した定式化が得られる。そして同式を、 \mathbf{u} 等を展開した HC 空間の直交基底である PC 汎関数 Ψ_k ($k = 0, 1, \dots, N_{PC}$) に射影する。すなわち、これらの汎関数との内積をとる。PC 汎関数へ射影して得られる方程式を満たす解は、この HC 空間における最良近似を与える。したがって、以下に示すように、これらの方程式を解くことにより、SSBEM の解を得ることができる。

式 (19) 及び (23) を式 (16) に代入し、PC 展開及び Taylor 展開を有限次数で打ち切る。これにより等号は成立しなくなる。同式を HC 空間内で近似するために基底である PC 汎関数 $\Psi_k(\boldsymbol{\xi})$ に射影する。Taylor 展開を 2 次で打ち切った場合、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left\langle \Psi_k \left\{ \mathbf{H}^0 + \sum_{i=1}^{N_{KL}} \xi_i \mathbf{H}^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{KL}} \sum_{j=1}^{N_{KL}} \xi_i \xi_j \mathbf{H}^{ij} \right\} \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \sum_{i=0}^{N_{PC}} \mathbf{u}_i \Psi_i \right\} \right\rangle \\ & = \left\langle \Psi_k \left\{ \mathbf{G}^0 + \sum_{i=1}^{N_{KL}} \xi_i \mathbf{G}^i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \xi_i \xi_j \mathbf{G}^{ij} \right\} \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \sum_{i=0}^{N_{PC}} \mathbf{q}_i \Psi_i \right\} \right\rangle \quad (24) \end{aligned}$$

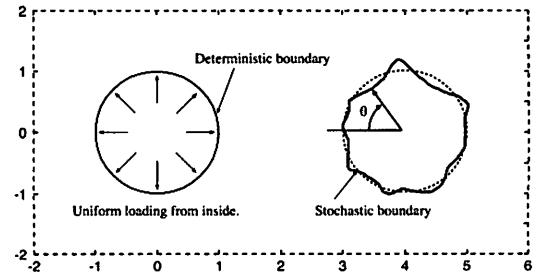


Fig. 1 Considered model.

Table 1 Model Parameters

Parameters	Values
Shear modulus	96,000
Poisson's ratio	0.2
Standard deviation of the radius uncertainty	2 %

式 (24) を、 $\xi_0 = 1$ とおいて整理すると

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=0}^{N_{PC}} \left\{ \sum_{i=0}^{N_{KL}} \langle \xi_i \Psi_k \Psi_\ell \rangle \mathbf{H}^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{KL}} \sum_{j=1}^{N_{KL}} \langle \xi_i \xi_j \Psi_k \Psi_\ell \rangle \mathbf{H}^{ij} \right\} \mathbf{u}_\ell \\ & = \sum_{\ell=0}^{N_{PC}} \left\{ \sum_{i=0}^{N_{KL}} \langle \xi_i \Psi_k \Psi_\ell \rangle \mathbf{G}^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{KL}} \sum_{j=1}^{N_{KL}} \langle \xi_i \xi_j \Psi_k \Psi_\ell \rangle \mathbf{G}^{ij} \right\} \mathbf{q}_\ell \quad (25) \end{aligned}$$

が得られる。なお、表記を簡単にするため Ψ_j の引数は省略した。

式 (25) を $k = 0, 1, \dots, N_{PC}$ について連立させて解けば、解 \mathbf{u}_i , ($i = 0, 1, \dots, N_{PC}$) が得られる。これを式 (23) に代入することで確率過程としての解が得られる。なお、表面力が未知数の場合は \mathbf{q}_i , ($i = 0, 1, \dots, N_{PC}$) を算出し、式 (23) と同様にして解を得ることができる。

4. 数値シミュレーション

提案する SSBEM を 2 次元静弾性問題に適用し、モンテカルロシミュレーション (MCS) との比較により、その有効性を検証する。また、式 (19) における Taylor 展開の次数を 1 次にした場合との比較について検討する。

解析の対象として、2 次元の全無限媒体内に、Fig. 1 に示されているように円孔があるモデルを考える。設定した物性値は Table 1 に示す通りである。左側の円孔の内側に、一定値 1.0×10^4 をとる表面力を、境界に直交する遠心方向に一律に与える。この円孔は半径 $\bar{R} = 1$ であり、その形状には不確定性はないものとする。もう一つの円孔は自由境界となっている。ただし、この円孔の幾何形状には不確定性があるものとする。円孔の形状の期待値は半径 $\bar{R} = 1$ の円とする。ここでは、Fig. 1 に示すように、円孔の形状を、円の中心からの距離 r (以下、単に「半径」という) を仰角 (θ) の関数とすることにより表す。境界上の 2 点 θ_1, θ_2 における半径 r の相関関数は、

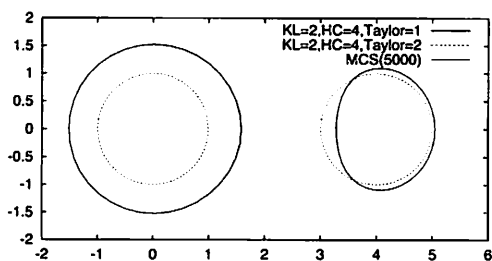


Fig. 2 Displacements obtained by the MCS, SSBEM (KL=2, HC=4, Taylor=1) and SSBEM (KL=2, HC=4, Taylor=2). Displacements are amplified 10 times, and the dotted lines show the initial geometries.

$$C(\theta_1, \theta_2) = (\gamma \bar{R})^2 \exp \left\{ -\frac{d(\theta_1, \theta_2)}{b} \right\} \quad (26)$$

ただし

$$d(\theta_1, \theta_2) = \min\{|\theta_1 - \theta_2|, 2\pi - |\theta_1 - \theta_2|\} \quad (27)$$

である。ここで γ は不確定の程度を表すパラメタであり、本検討ではばらつきの標準偏差が期待値の20%となるよう $\gamma = 0.2$ とした。また、 $b = 1/2\pi$ は相関距離に相当するパラメタである。

数値モデル化においては、それぞれの円孔を均等に36要素に分割し、解析には一定要素を用いる。

4.1. Monte Carlo Simulation

比較のため、同じ問題を要素分割数や用いる要素等の解析条件はSSBEMと同様に設定したモンテカルロシミュレーション(MCS)によっても解析する。MCSでは、乱数を用いて境界を多数作成し、それぞれを対象として通常の境界要素法で解析を行なう。

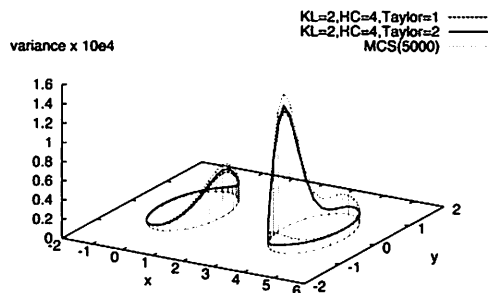
試行回数は5,000回とした。これは、試行回数が2,000回以下では試行回数にともない解が変化し不安定であったため、その2倍程度の試行回数を設けることで十分に解が安定するようにしたものである。

式(26)に示される自己相関関数を有する不確定場の作成方法には、共分散マトリクスのコレスキー分解に基づく方法を用いる。これは、共分散マトリクスをコレスキー分解したものの各列ベクトルに、互いに独立な正規確率変数を乗じて和をとるものである。

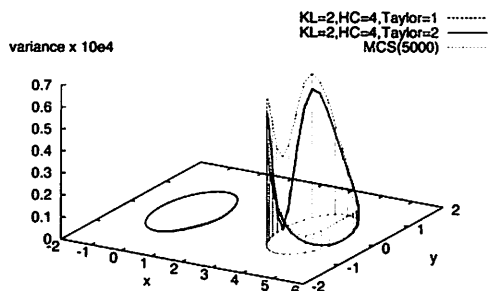
4.2. SSBEM

想定した問題では、外力及び外力が作用する境界の幾何形状は不確定性を有しないので、式(25)の右辺は $i = j = 0$ の項のみが残り、 $\langle \Psi_k \rangle G^0 q_0$ となり、式(25)は次式ようになる。

$$\sum_{i=0}^{N_{KL}} \sum_{l=0}^{N_{PC}} \langle \xi_i \Psi_k \Psi_l \rangle H^i u_l = \delta_{k0} G^0 q_0 \quad (28)$$



(a) x-displacement



(b) y-displacement

Fig. 3 Variances obtained by the MCS, SSBEM (KL=2, HC=4, Taylor=1) and SSBEM (KL=2, HC=4, Taylor=2).

4.3. 解析結果

KL展開の固有値等を参考に、KL展開次数2、HC展開次数4、(以下KL=2、HC=4のように表わす。)とする。また、Taylor展開の次数を1と2のように変化させた場合について検討した。以下に、MCSにより得られた結果とSSBEMにより得られた結果の比較を示す。

2ケースのSSBEMによる変位の期待値と、MCSによる変位の平均値(以下では単にMCSによる期待値という)の分布をFig.2に示す。三者の結果はよく一致しており、図上で差は認められない。なお、境界上のある特定の位置における変位量としては、位置の期待値がその点に一致する節点の変位量を用いており、境界の不確定性による位置のずれは考慮していない。すなわち、期待値が(5,0)に位置する節点の変位量を点(5,0)における変位量としている。

変位量の分散の分布の比較をFig.3に示す。SSBEMにより評価された分散の値は、MCSの値よりも若干低いが良い近似を与えている。Taylor展開の次数をあげることで若干精度が高まっているがその差は非常に小さいものとなっている。これは、ここで扱った比較的単純な問題においては1次までのTaylor展開で十分な解が得られることを示唆するものである。

しかし、これは式(26)で設定した相関距離が比較的長い

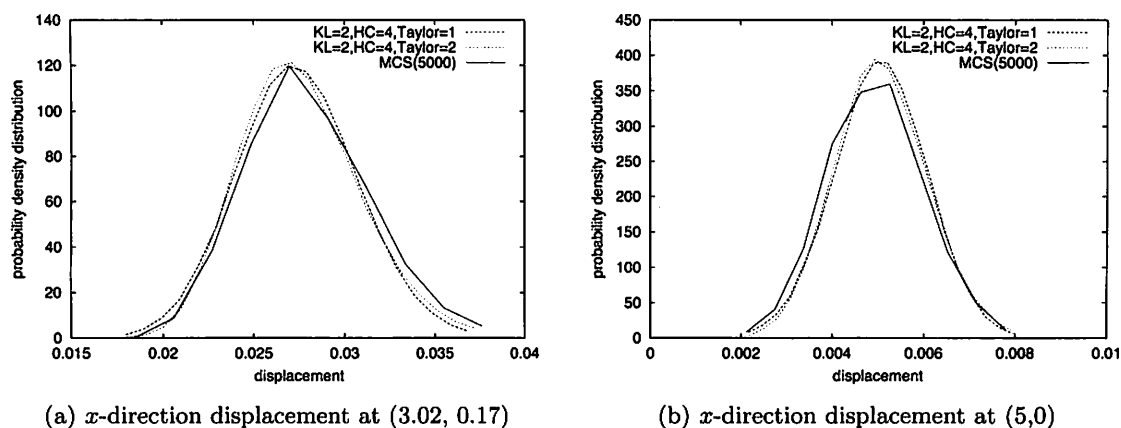


Fig. 4 Probability density functions obtained by the MCS, SSBEM (KL=2, HC=4, Taylor=1) and SSBEM (KL=2, HC=4, Taylor=2). In these analyses, the fluctuation of the radius of the cavity is taken as 20% of the mean value in terms of standard deviation.

等の理由により、境界の不確実性が解に与える影響の非線形性があまり強くないものとなったことなどが理由である可能性もあり、結論づけられるものではないと考えられる。今後、より複雑な問題等を対象として検討をしていく必要がある。

Fig. 4 は、不確実性を有する円孔上の左端に近い点 (-0.98, 0.17) 及び右端 (5.0, 0) における変位の x 成分の確率密度分布を示す。SSBEM はいずれも MCS の結果により得られた確率密度関数を良く近似する結果となっている。ここでも、Taylor 展開の次数の差による結果の違いは小さい。

SSBEM は、通常の境界要素法よりも自由度が高く、長い計算時間を要する。そこで、SSBEM の解析の効率性を検証するため、MCS と計算時間の比較を行う。数値計算は Pentium III (600MHz) 上で行なった。5,000 回の試行を行なった MCS は約 900 秒の CPU 時間を要したが、SSBEM による計算は、いずれも 3 秒程度で終了しており、この比較から SSBEM の効率の高さが確認される。

5. まとめ

本論文では、スペクトル確率有限要素法の Spectral Stochastic Approach に基づき、境界の幾何形状が不確実性を有する問題に対する数値解析手法として、スペクトル確率境界要素法 (SSBEM) を提案した。

数値シミュレーションとして、境界の幾何条件が不確実性を有する 2 次元静弾性問題に適用し、モンテカルロシミュレーション (MCS) による結果との比較も行った。解析結果には、よい一致が見られ、SSBEM の精度の高さが確認された。SSBEM は MCS に比較して非常に少ない計算時間しか要しないことも示された。

一方、境界の幾何形状の変化に伴うマトリクス H, G の変化を評価する際の Taylor 展開の次数の違いが解に与える影響については明確な違いがみられず、ここで示したような問題においては 1 次までの展開で十分であることを示す結果となった。しかし、これは問題の性質に依存する結果である可能性も高く、検討を継続する必要があると考えられる。

参考文献

- (1) 本田利器：スペクトル確率境界要素法の提案と幾何形状に不確実性を有する弾性解析への適用，土木学会論文集，759/I-67 (2004)，pp. 111-120.
- (2) Nakagaki, S., K. Suzuki, and T. Hisada：Stochastic boundary element method applied to stress analysis. In Brebbia, C. A., T. Futagami, and M. Tanaka, editors, *Boundary Elements: Proceedings of the Fifth International Conference*, pp. 439-448, 1983.
- (3) Kaminski, M：Stochastic second-order BEM perturbation formulation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23 (1999), pp. 123-129.
- (4) Manolis, G. D. and C. Z. Karakostas：A Green's function method to SH-wave motion in a random continuum. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27 (2003), pp. 93-100.
- (5) Ghanem, R. G. and P. D. Spanos： *Stochastic Finite Elements - A Spectral Approach*, (1991), Springer-Verlag NY.
- (6) 本田利器：スペクトル確率有限要素法によるランダム場の波動伝播解析。土木学会論文集，689/I-57 (2001)，pp. 321-331.
- (7) Spanos, P. and R. Ghanem：Stochastic finite element expansion for random media. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 115 (1989), pp. 1035-1053.
- (8) Brebbia, C. A： *The Boundary Element Method for Engineers*, (1978), Wiley & Sons, Inc.
- (9) 境界要素法研究会編：境界要素法の理論と応用，(1986)，コロナ社。
- (10) Choi, J. H. and B. M. Kwak：Shape design sensitivity analysis of elliptic problems in boundary integral equation formulation. *Mechanics of Structures and Machines*, 16 (1988), pp. 147-165.