

ハイブリッド・トレフツ有限要素法に基づく 回折格子の散乱特性解析法

SCATTERING CHARACTERISTICS ANALYSIS OF DIFFRACTION GRATING USING HYBRID TREFFTZ FINITE ELEMENT METHOD

佐藤 慎悟¹⁾, 長谷川 弘治²⁾

Shingo SATO and Koji HASEGAWA

- 1) 室蘭工業大学大学院工学研究科 (〒050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: s1024183@mmm.muroran-it.ac.jp)
2) 室蘭工業大学電気電子工学科 (〒050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: khasegaw@mmm.muroran-it.ac.jp)

A formulation based on hybrid variational principle for plane wave scattering problems of infinite periodic gratings is presented. Employing Trefftz finite elements to estimate functionals of infinite half spaces above and below gratings, and applying conventional finite elements to the grating regions, we can estimate the functionals of the whole analyzing region. Therefore computed results converge monotonically with increasing number of conventional finite elements and number of space harmonics for Trefftz elements. Scattering characteristics of lossless dielectric gratings, lossless and lossy metallic gratings are computed and the validity and usefulness of this method are confirmed.

Key Words: Hybrid Trefftz Finite Element Method, Hybrid Variational Principle, Trefftz Element, Periodic Structure, Scattering Characteristics

1. はじめに

回折格子やフォトニック結晶など周期構造による電磁波の散乱特性を有限要素法などの領域型解法で数値解析する場合、格子領域の上方、下方にある半無限領域の取扱いに工夫が必要である。従来の有限要素法を用いた解析では、(1)他の解析法との結合解法⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾、(2)吸収境界条件の適用⁽⁵⁾⁻⁽⁸⁾などが行われてきた。結合解法においては各解析法を接続する境界上でのエネルギー保存の保証がない場合がある。一方、吸収境界条件は近似であるため、外部領域を正確に表現できない。また、計算精度や計算時間が吸収境界を設定する位置に依存する欠点がある。

本論文では、ハイブリッド・トレフツ有限要素法 (Hybrid Trefftz Finite Element Method: HTFEM)⁽⁹⁾ による TE 波および TM 波入射に対する散乱問題の定式化を著者らが知る限り初めて行っている。一様均質な半無限領域に空間高調波を補間関数とするトレフツ要素を用いて、格子領域に通常の有限要素を用いる。トレフツ要素と通常要素を併用するために、要素境界上の電磁界の連続条件を緩和した汎関数 (ハイブリッド汎関数)⁽⁹⁾ を評価する。このため、要素毎に最適な補間関数を選択することが可能であり、無限領域を含む解析領域全体に変分原理を適用して解析できる。ここでは、無限

領域を含む一様均質領域を1つのトレフツ要素で分割し、支配方程式を満足する補間関数を用いるため、要素境界上の線積分のみで汎関数の評価が可能である。このため、従来の有限要素法解析⁽¹⁾⁻⁽⁸⁾よりも大幅に未知数を減らすことが可能になる。

具体的に、無損失誘電体、完全導体、損失を有する金属からなる回折格子の散乱特性解析を行い、解析解と有限要素法の結合解法⁽¹⁾、厳密結合波解析⁽¹⁰⁾による結果と比較し、本解析法の妥当性、有用性を示している。

2. ハイブリッド・トレフツ有限要素法による定式化

2.1. 基本方程式

図1に示すような、比誘電率 ϵ_3 の媒質からなる回折格子 (構造周期 p , 格子幅 w , 格子の厚み h) による平面波散乱問題を考える。ここでは、図1に示すように、解析領域を一様均質領域 Ω_1 , Ω_3 と不均質領域 Ω_2 に分割する。 z 軸方向の界の変化を一様 ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$) とし、電磁界の周期性から、格子1周期のみを解析する。入射波は誘導定理⁽¹¹⁾を用いて境界 Γ_1 上の等価電磁流源

$$\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}^i \quad (1)$$

$$\vec{J}_{sm} = -\hat{n} \times \vec{E}^i \quad (2)$$

に置き換える。ここに、 \vec{J}_s は電流密度、 \vec{J}_{sm} は磁流密度、 \vec{H}^i は入射磁界、 \vec{E}^i は入射電界である。系の支配方程式は、

$$\frac{1}{u} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + k_0^2 v \phi = \frac{2}{u} \frac{\partial \phi^i}{\partial y} \delta(y) \quad (3)$$

となる。右辺の係数2は等価電流分と等価磁流分の和によるもので、 $\delta(y)$ はデルタ関数である。ここに、

$$\phi = \begin{cases} E_z \\ H_z \end{cases}, \quad u = \begin{cases} \mu \\ \varepsilon \end{cases}, \quad v = \begin{cases} \varepsilon \\ \mu \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{: TE 波入射} \\ \text{: TM 波入射} \end{array}$$

であり、 k_0 は真空中の波数、 ε 、 μ はそれぞれ比誘電率、比透磁率である。上添字 i は入射界を表す。

電磁界 ϕ としてフロケモードを用いると、

$$\phi^\pm(x, y) = \phi_p(x, y) e^{\mp \gamma x} \quad (4)$$

と表される。ここで、 $\phi_p(x)$ は x 軸方向のみの周期関数であり、上添字 \pm はそれぞれ $+x$ 方向へ進む波、 $-x$ 方向へ進む波を表す。 γ は x 軸方向の伝搬定数であり、入射波の波長 λ 、真空中の波数 k_0 、入射角 θ を使って、

$$\gamma = j\beta_0 = j \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta = jk_0 \sin \theta \quad (5)$$

で与えられ、入射波 $\vec{\phi}^i$ は、

$$\vec{\phi}^i = \hat{z} \phi^i = \hat{z} \phi_0 e^{-\gamma x} e^{jk_0 \cos \theta y} \quad (6)$$

となる。

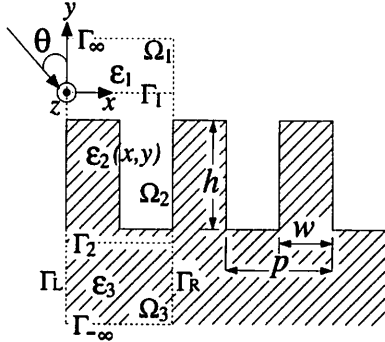


図1 回折格子断面図

2.2. 汎関数

格子1周期分のハイブリッド汎関数 I は、電磁界がフロケモードであること、ならびに領域 Ω_1 、 Ω_3 での放射条件を満足することに注意すると、各領域 Ω_i の汎関数 I_i ($i=1, 2, 3$) の総和で計算でき、

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 \\ &= - \int_A \frac{1}{u} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^t}{\partial x} + \frac{1}{u} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi^t}{\partial y} - k_0^2 v \phi \phi^t dx dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\partial A} \frac{1}{u} \frac{\partial \phi}{\partial y} \phi^t + \frac{1}{u} \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \phi dx \\ &\quad - \int_{\partial A} \frac{1}{u} \frac{\partial \phi}{\partial y} \bar{\phi}^t + \frac{1}{u} \frac{\partial \bar{\phi}^t}{\partial y} \phi dx \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} \frac{1}{u} \frac{\partial \phi^i}{\partial y} \phi^t + \frac{1}{u} \frac{\partial \phi^{it}}{\partial y} \phi dx \\ &\quad - \int_{\partial A, b} \frac{1}{u} \frac{\partial \phi}{\partial y} \phi^t + \frac{1}{u} \frac{\partial \phi^t}{\partial y} \phi dx \end{aligned} \quad (7)$$

である。ここに $\int_A dx dy$ は領域 Ω_2 での面積分を、 $\int_{\partial A} dx$ は境界 Γ_1 と Γ_2 での線積分を、 $\int_{\partial A, b} dx$ は領域間の境界での線積分を表す。また、上添字 t はトランスポーズ界(12)を表す。(7)式の第1項目は不均質領域に関する項、第2項目は一様均質領域に関する項、第3項目はハイブリッド変分原理の特徴である緩和項で、一様均質領域と不均質領域を接続する際の電磁界の連続条件を緩和する。 $\bar{\phi}$ 、 $\bar{\phi}^t$ は境界 Γ_1 、 Γ_2 上の電磁界を表し、各領域の電磁界を接続する。第4項目は波源項、第5項目は領域間の境界上で課される境界条件項である。

2.3. 不均質領域 Ω_2 における汎関数の離散化

不均質領域 Ω_2 は8節点矩形要素を用いて分割し、各要素内の電磁界を2次多項式で補間すると、

$$\phi_p = \{N_8\}^T \{\phi_p\} \quad (8)$$

となる。ここに、 $\{N_8\}$ は補間関数ベクトルで、 $\{\phi_p\}$ は各要素内の節点における節点値ベクトルである。上添字 T は転置ベクトルであることを示す。(7)式内の不均質領域に関する第1項と波源の第4項に(6)、(8)式を適用すると、

$$I_2 = \{\phi_p\}^T [C] \{\phi_p\} - \{\phi_p\}^T \{S\}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} [C] &= \sum_e \int_{A_e} -\frac{1}{u} \left[\frac{\partial \{N_8\}}{\partial x} \frac{\partial \{N_8\}^T}{\partial x} + \frac{\partial \{N_8\}}{\partial y} \frac{\partial \{N_8\}^T}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \gamma \frac{\partial \{N_8\}}{\partial x} \{N_8\}^T - \gamma \{N_8\} \frac{\partial \{N_8\}^T}{\partial x} \right] \\ &\quad + \left(\frac{1}{u} \gamma^2 + k_0^2 v \right) \{N_8\} \{N_8\}^T dx dy \end{aligned} \quad (10)$$

$$\{S\} = \sum_{se} \int_{\Gamma_1} \frac{2}{u} \{N_8\} j \phi_0 k_0 \cos \theta dx \quad (11)$$

を得る。ここに、 \sum_e は全通常要素についての和、 \sum_{se} は境界 Γ_1 に関する要素についての和を表す。

2.4. 一様均質領域 Ω_1 、 Ω_3 における汎関数の離散化

一様均質領域内の電磁界 ϕ を放射条件に注意して空間高調波展開すると、

$$\phi_l^\pm(x, y) = \sum_{n=-M}^M A_{n,l} e^{\kappa_{n,l} y} e^{\mp \gamma_n x} \quad (12)$$

$$\kappa_{n,l} = j \sqrt{(\gamma_n)^2 + k_0^2 \varepsilon_l \mu_l} \quad (13)$$

$$\gamma_n = j \left(\beta_0 + \frac{2n\pi}{p} \right) \quad (14)$$

となる。ここに、 M はモード数、下添字 l ($l=1, 3$) は領域 Ω_l に関する量であることを表す。また、要素境界上の電磁界 $\bar{\phi}_p$ を3節点線要素に適合するように補間すると、

$$\bar{\phi}_p = \{N_3\}^T \{\bar{\phi}_p\} \quad (15)$$

となる。一様均質領域 Ω_l ($l=1, 3$) では系の支配方程式を満足する補間関数を用いることを考慮し、(7)式内の一様均質領域に関する項と緩和項に(12)、(15)式を適用すると、

$$I_l = \{A_{m,l}^-\}^T [G_l] \{A_{n,l}^+\} + \{\bar{\phi}_p\}^T [L_{n,l}^+] \{A_{n,l}^+\} + \{A_{m,l}^-\}^T [L_{m,l}^-] \{\bar{\phi}_p\} \quad (16)$$

を得る。ここに、 $\{A_{n,l}^+\}$ 、 $\{A_{m,l}^-\}$ は未知展開係数ベクトルであり、 $[G_l]$ 、 $[L_n^+]$ 、 $[L_m^-]$ はそれぞれ、

$$[G_l] = \frac{1}{2u_l} \int_{\partial A,l} \sum_{n=-M}^M \sum_{m=-M}^M (\kappa_{n,l} + \kappa_{m,l}) e^{-j\frac{2(n-m)\pi x}{p}} dx \quad (17)$$

$$[L_n^+] = \sum_{le} -\frac{1}{u_l} \int_{\partial A,l} \{N_3\} \sum_{n=-M}^M \kappa_{n,l} e^{-j\frac{2n\pi x}{p}} dx \quad (18)$$

$$[L_m^-] = \sum_{le} -\frac{1}{u_l} \int_{\partial A,l} \{N_3\}^T \sum_{m=-M}^M \kappa_{m,l} e^{j\frac{2m\pi x}{p}} dx \quad (19)$$

である。ここに、 \sum_{le} は境界 Γ_1 、 Γ_2 に関する要素についての和を表す。(16) 式において、変分量は $\{A_{n,l}^+\}$ 、 $\{A_{m,l}^-\}$ と $\{\tilde{\phi}_p\}$ であるので、まず、 $\{A_{n,l}^+\}$ 、 $\{A_{m,l}^-\}$ に関して変分をとると、

$$\{A_{n,l}^+\} = -[G_l]^{-1} \{[L_m^-] \{\tilde{\phi}_p\}\} \quad (20)$$

$$\{A_{m,l}^-\} = -\{\{\tilde{\phi}_p\} [L_n^+]\} [G_l]^{-1} \quad (21)$$

が得られ、(20)、(21) 式を用いて、(16) 式の未知展開係数ベクトル $\{A_{n,l}^+\}$ 、 $\{A_{m,l}^-\}$ を消去すると、

$$\begin{aligned} I_l &= -\{\tilde{\phi}_p\}^T [L_n^+] [G_l]^{-1} [L_m^-] \{\tilde{\phi}_p\} \\ &= -\{\tilde{\phi}_p\}^T [X_l] \{\tilde{\phi}_p\} \end{aligned} \quad (22)$$

を得る。

2.5. 連立1次方程式の導出

各領域から得られた汎関数において、 $\{\phi_p\}$ 、 $\{\tilde{\phi}_p\}$ に関して停留をとり、得られた方程式を連立させると、最終的に解くべき連立1次方程式

$$\begin{bmatrix} [X_1] + [C]_{11} & [C]_{12} & [C]_{13} \\ [C]_{21} & [C]_{22} & [C]_{23} \\ [C]_{31} & [C]_{32} & [X_3] + [C]_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{\phi}_p\}_1 \\ \{\phi_p\}_0 \\ \{\tilde{\phi}_p\}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{S\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (23)$$

を得る。ここに、 $[C]_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) は $[C]$ の小行列、 $\{\phi_p\}_0$ は不均質領域内の節点値ベクトル、 $\{\tilde{\phi}_p\}_1$ 、 $\{\tilde{\phi}_p\}_2$ はそれぞれ境界 Γ_1 、 Γ_2 上の節点値ベクトルである。(23) 式を解くことにより、電磁界分布 ϕ_p が求まる。

2.6. 回折波電力の算出

入射電力を1に規格化すると、反射電力 P_r 、透過電力 P_t ならびに媒質等での吸収電力 P_a には、エネルギー保存則 $P_r + P_t + P_a = 1$ が成立する。ここで、無損失の場合では、 $P_a = 0$ である。 P_r 、 P_t は、

$$P_r = \sum_{n=-M}^M \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{\kappa_{n,1}}{\omega u_1} A_{n,1} A_{n,1}^* \right] \quad (24)$$

$$P_t = \sum_{n=-M}^M \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{\kappa_{n,3}}{\omega u_3} A_{n,3} A_{n,3}^* \right] \quad (25)$$

と求まる。

3. 数値解析例

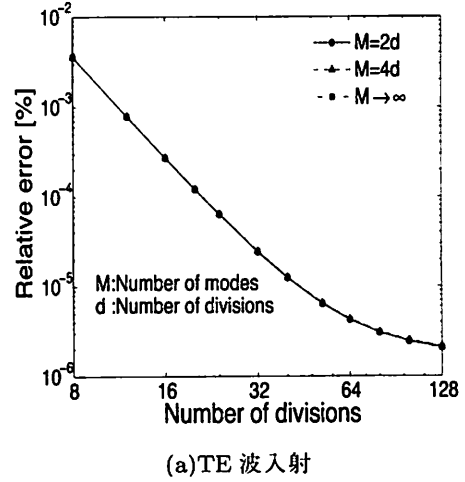
図1に示す回折格子を考える。境界 Γ_1 、 Γ_2 はそれぞれ、格子の上端、下端に接するように設定する。不均質領域は8節点矩形要素を用いて x 軸、 y 軸方向を共に等 d 分割する。

一様均質領域はそれぞれ $-M$ 次から M 次までの空間高調波を補間関数とするトレフツ要素1個で分割する。

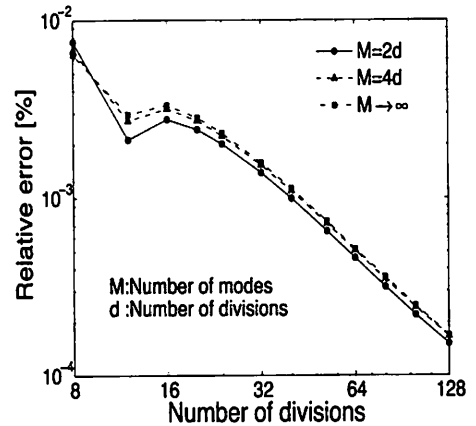
3.1. 誘電体格子

$w = 0.5p$ 、 $h = p$ 、 $\varepsilon_1 = 1.0$ 、 $\varepsilon_3 = 4.0$ の誘電体回折格子を考える。図2(a)、(b) はそれぞれ $p/\lambda = 0.6$ 、 $\theta = 0^\circ$ とした場合の TE 波、TM 波入射における透過電力の収束性を調べたものである。ここでは、モード数 M を分割数 d の (1)2 倍、(2)4 倍としたとき、(3)モード数 M を無限大に補外したときの相対誤差 $|\frac{P_t(M,d)}{P_t(M \rightarrow \infty, d \rightarrow \infty)} - 1|$ を示している。ここに $P_t(M,d)$ は、モード数 M 、分割数 d のときの透過電力の値である。TE 波入射では、3つの場合でほとんど差が見られない。TM 波入射では、モード数 M が分割数 d の2倍のときが一番誤差が小さい。また、TM 波入射の場合には分割数 d が少ないところで若干の振動が見られるが、TE 波、TM 波入射ともにほぼ単調に誤差が減少していることがわかる。

以下の数値計算例では、 $d = 32$ 、 $M = 32$ として計算している。

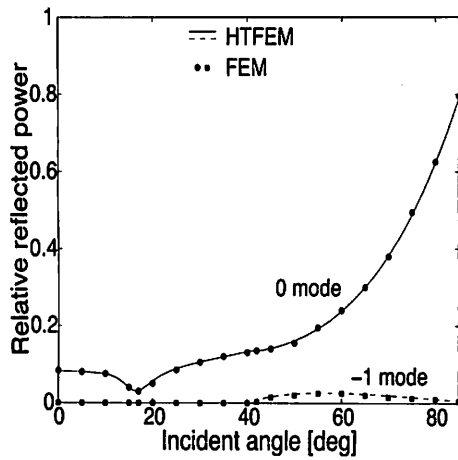


(a) TE 波入射

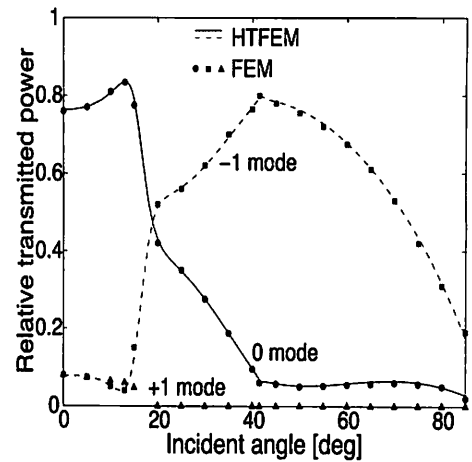


(b) TM 波入射

図2 解の収束性

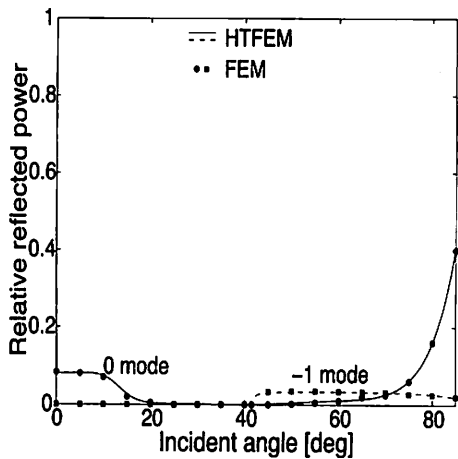


(a) 反射電力特性

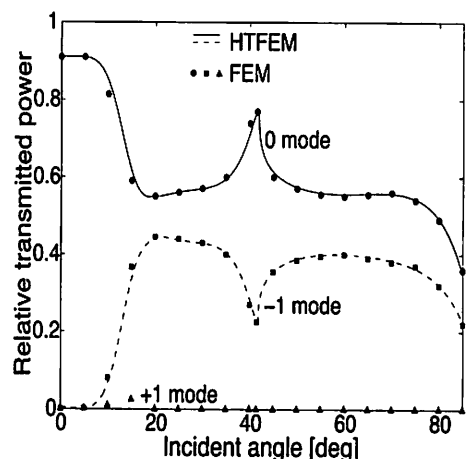


(b) 透過電力特性

図3 誘電体格子のTE波散乱特性



(a) 反射電力特性



(b) 透過電力特性

図4 誘電体格子のTM波散乱特性

図3, 図4は, $p/\lambda = 0.6$ とした場合の各電力の入射角依存性を示している. 本解析法(実線, 破線, 点線)と解析解と有限要素法の結合解法⁽¹⁾(●, ■, ▲)の結果は良く一致している. また, 透過電力特性において, 入射角 42° 付近で-1次の反射波が伝搬モードになるために生じるアノマリが確認できる. なお, 本解析法ではエネルギー保存則の誤差が $10^{-11} \sim 10^{-13}\%$ の範囲で満足されていた.

3.2. 金属格子

図5(a), (b)はそれぞれ完全導体格子 ($p = 2\lambda$, $w = 0.5p$, $h = 0.3\lambda$) にTE波あるいはTM波が入射した場合の反射電力を調べたものである. 本解析法(実線, 破線)の計算結果と厳密結合波解析⁽¹⁰⁾(●, ■)の結果は良く一致している.

次に, $p = 2\lambda$, $w = 0.5p$, $h = 0.3\lambda$ であるAu金属格子を考える. ここでAuの複素誘電率は, (1) $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ のとき $\epsilon_3 = -2.660315 - j2.919708$, (2) $\lambda = 1.0\mu\text{m}$ のとき $\epsilon_3 = -44.9757 - j2.9524$ とする.

図6はTE波入射の場合の反射電力を調べたものである. 入射波の波長が $\lambda = 0.5\mu\text{m}$, $\lambda = 1.0\mu\text{m}$ の場合をそれぞれ, (a), (b)に示す. ここでtotal modeは, 各モードの反射電力の総和である. 本解析法(実線, 破線)と厳密結合波解析⁽¹⁰⁾(●, ■)の結果は良く一致している. また, 1次の反射波がエバネセントモード, -3次の反射波が伝搬モードとなる入射角 $\theta = 30^\circ$ において, 0次と-2次の反射波にアノマリが確認できる.

図7はTM波入射の場合の反射電力を調べたものである. 図6と同様に図7(a), (b)はそれぞれ, 入射波の波長が $\lambda = 0.5\mu\text{m}$, $\lambda = 1.0\mu\text{m}$ での値を示している. 本解析結果(実線, 破線)は, 厳密結合波解析⁽¹⁰⁾(●, ■)の結果と良く一致しており, 入射角 $\theta = 30^\circ$ において, 0次と-2次の反射波にアノマリが確認できる.

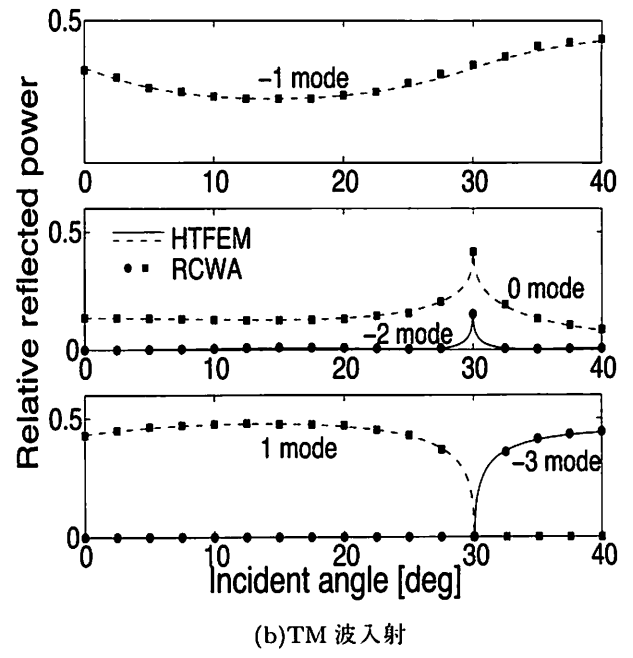
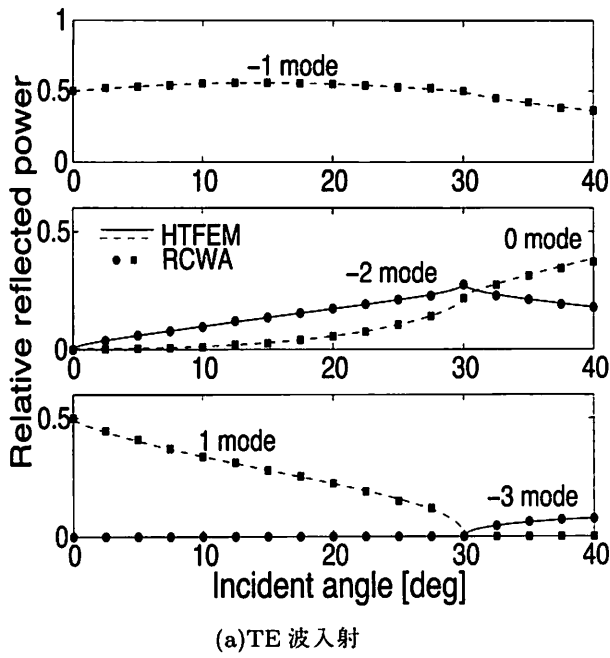


図5 完全導体格子の平面波反射電力特性

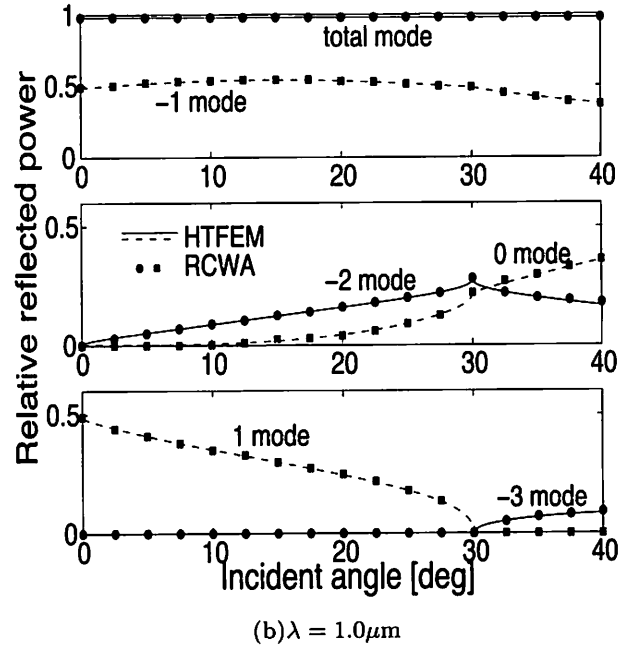
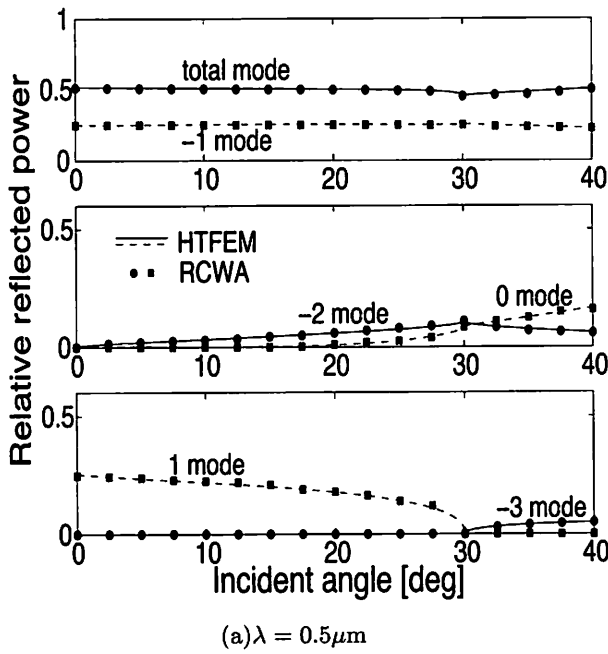
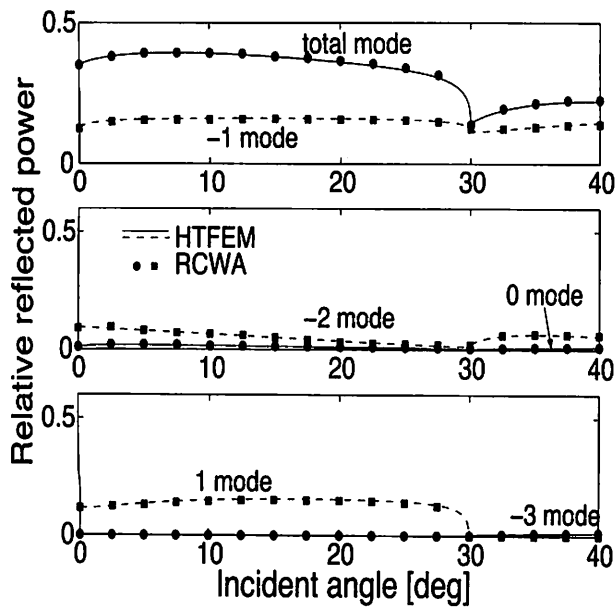
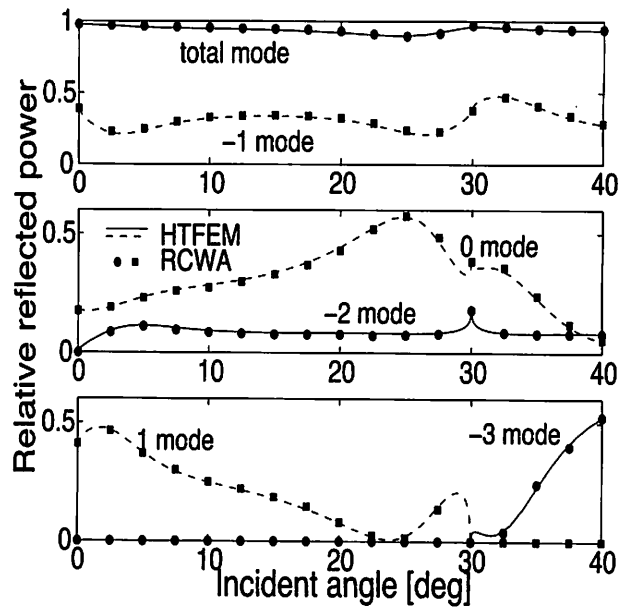


図6 金属格子のTE波反射電力特性



(a) $\lambda = 0.5\mu\text{m}$



(b) $\lambda = 1.0\mu\text{m}$

図7 金属格子のTM波反射電力特性

4. むすび

回折格子による平面波散乱問題の数値解析法として、ハイブリッド・トレフツ有限要素法に基づく解析法を提案し、TE波およびTM波入射に対する定式化を行った。具体的には、誘電体格子、完全導体格子、損失を有する金属格子に対する散乱特性解析を行い、解析解と有限要素法の結合解法⁽¹⁾と厳密結合波解析⁽¹⁰⁾による結果との比較から本解析法の妥当性、有用性を示した。

参考文献

- (1) 中田康則, 小柴正則, 鈴木道雄: 誘電体格子による平面波回折の有限要素法解析, 電子通信学会論文誌, **J69-C**(1986), pp. 1503-1511.
- (2) 大川論一, 辻寧英, 小柴正則: 異方性誘電体格子による平面波回折の有限要素法解析, 電子情報通信学会論文誌, **J78-C-I**(1995), pp. 391-399.
- (3) J. Jin, J. L. Volaski, and J. D. Collins: A Finite-Element-Boundary-Integral Method for Scattering and Radiation by Two- and Three-Dimensional Structures, *IEEE Antennas Propagat. Mag.* **33**(1991), pp. 22-32.
- (4) D. Gedney and R. Mittra: Analysis of the Electromagnetic Scattering by Thick Gratings Using a Combined FEM/MM Solution, *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **39**(1991), pp. 1605-1614.
- (5) Jianming Jin: *The Finite Element Method in Electromagnetics*, (2002), Wiley-Interscience.
- (6) J. A. Vasconcelos, A. G. Lomônaco, R. R. Saldanha, and J. A. Ramírez: FEM-ABC and MFCM techniques applied to the solution of 2D scattering problems, *IEEE Trans. Magn.* **36**(2000), pp. 931-937.
- (7) O. M. Ramahi and R. Mittra: Finite-element analysis of dielectric scatterers using the absorbing boundary condition, *IEEE Trans. Magn.* **25**(1989), pp. 3043-3045.
- (8) R. K. Gordon: A finite element method that employs an absorbing boundary condition for determining the electromagnetic scattering by inhomogeneous cylindrical structures that are illuminated by an obliquely incident field, *IEEE Trans. Magn.* **29**(1993), pp. 1820-1825.
- (9) Qing-Hua Qin: *The Trefftz Finite and Boundary Element Method*, (2000), WIT Press.
- (10) M. G. Moharam and T. K. Gaylord: Rigorous coupled-wave analysis of metallic surface-relief gratings, *J. Opt. Soc. Am. A.* **3**(1986), pp. 1780-1787.
- (11) 徳丸仁: 基礎電磁波, (1992), 森北出版.
- (12) L. Cairo, and T. Kahan: *Variational Techniques in Electromagnetism*, (1965), Gordon and Breach.