

# 三次元異方性熱弾性問題の境界要素法による解析法の考察

## A STUDY ON BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR THERMOELASTIC PROBLEMS IN THREE-DIMENSIONAL ANISOTROPIC MATERIALS

松本 敏郎<sup>1)</sup>, Artur GUZIK<sup>2)</sup>, 田中 正隆<sup>3)</sup>

Toshiro MATSUMOTO, Artur GUZIK and Masataka TANAKA

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)  
 2) Cracow University of Technology (Warszawska 24, Cracow 31-155, Poland E-mail: guzik@wis.pk.edu.pl)  
 3) 信州大学工学部 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)

The boundary integral representation for thermoelastic problems involves a domain integral term originated from the thermal strain. Although for two-dimensional isotropic and anisotropic media and for three-dimensional isotropic media, this domain integral can be converted to a boundary one, the boundary-only integral formulation for three-dimensional anisotropic thermoelastic problems has not been shown yet. In this paper, we start with a set of the equilibrium equations for thermoelasticity and steady-state heat conduction to derive the integral formulation. The fundamental solutions of the set of adjoint differential equations are obtained by applying the Radon transform. The final integral representation comprises of purely boundary-only integrals and can be splitted into two integral representations, namely, for thermal conductivity and thermoelasticity in general anisotropic material.

**Key Words:** Boundary Element Method, Anisotrop Thermoelasticity, Radon Transform, Structural Analysis

### 1. はじめに

境界要素法解析における利点のひとつに境界積分のみで解析を行えるということが挙げられる。しかしながら初期ひずみや物体力が存在する弾性体の解析などにおいて、通常は領域積分を計算する必要がある。そこで領域積分を境界積分へ変換する方法として、弾性体の解析では重力荷重や遠心力荷重などを Galerkin テンソルなどを用いて解析的に境界積分へ変換する方法<sup>(1)</sup>が提案されている。熱弾性問題においても、等方弾性体の場合は Galerkin テンソルを用いて、熱ひずみに由来する領域積分項を境界積分に変換することができる<sup>(1)</sup>。また、2次元の異方性弾性体の場合も、このことは可能である<sup>(3)</sup>。しかしながら、一般の三次元異方性弾性体の場合、Galerkin テンソルに相当するポテンシャル関数を従来の方法で求めることは困難である。その理由は、この種のポテンシャル関数を求めることは、支配微分方程式の微分作用素行列の行列式に対する基本解を求めることに対応しており、完全な三次元の異方性弾性定数を想定した場合はこの行列式はきわめて複雑な形となるためである。そのため従来の研究では熱ひずみに由来する領域積分に二重相反法 (Dual Reciprocity Method<sup>(2)</sup>) を適用することにより、境界積分に変

換する方法が提案されている<sup>(5)</sup>。しかしながら、この方法は応力集中が生じる問題などにおいては、十分な精度の解が得られないと考えられ、Galerkin テンソルの場合と同様な定式化が望まれている。

本研究では、連立偏微分方程式の基本解の導出法に着目し、熱弾性問題の支配微分方程式と定常熱伝導問題の支配微分方程式を連立させて基本解を求める。これにより、熱ひずみに関する領域積分は自動的に境界積分として表され、核関数は連立偏微分方程式の基本解の一部として得られ、これまで求めることが困難であった三次元の異方性弾性体に対する熱弾性問題の境界積分方程式を導出することが可能となる。

### 2. 積分方程式の定式化と基本解

本研究では異方性弾性体の釣合方程式と定常熱伝導問題の支配微分方程式を以下のように連立させて、連立偏微分方程式の基本解を用いて境界積分方程式を導出する。

$$\sigma_{ij,i} = 0 \quad (1)$$

$$k_{ij} T_{,ij} = 0 \quad (2)$$

ただし、 $\sigma_{ij}$  は応力テンソル、 $k_{ij}$  は熱伝導率テンソルである。

境界積分方程式を導出するために、以下の積分恒等式を考える。

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,i} u_{jM}^* + k_{ij} T_{,ij} u_{4M}^*) d\Omega = 0 \quad (3)$$

ただし、 $u_{jM}^*$ 、 $u_{4M}^*$  は連立の支配微分方程式 (2) の随伴形に対する基本解であり、小文字の添え字は 1 から 3 まで変化し、大文字の添え字は 1 から 4 まで変化するものとする。

式 (3) の左辺の部分積分を 2 回繰り返すと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u_{jM}^* t_j d\Gamma - \int_{\Gamma} C_{ijkl} u_{kM,i}^* n_i u_j d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} u_{4M}^* q d\Gamma - \int_{\Gamma} k_{ij} u_{4M,i}^* n_j T d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} [C_{ijkl} u_{kM,i}^* u_j + (C_{ijkl} \beta_{kl} u_{jM,i}^* + k_{ij} u_{4M,i}^*) T] d\Omega \\ & = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $C_{ijkl}$  は弾性定数テンソル、 $u_i$  は変位ベクトル、 $t_i$  は表面力ベクトル、 $T$  は温度、 $q$  は熱流束である。また  $\beta_{ij}$  は次式により弾性定数テンソルと線膨張係数  $\alpha_{kl}$  に関係づけられる。

$$\beta_{ij} = C_{ijkl} \alpha_{kl} \quad (5)$$

ここで、 $u_{KM}^*$  ( $K = 1, 2, 3, 4, M = 1, 2, 3, 4$ ) をつぎの微分方程式の特解とする。

$$C_{ijkl} u_{kM,i}^* + \delta_{jM} \delta(x-y) = 0 \quad (6)$$

$$C_{ijkl} \beta_{kl} u_{jM,i}^* + k_{ij} u_{4M,i}^* + \delta_{4M} \delta(x-y) = 0 \quad (7)$$

ただし、 $\delta_{jM}$ 、 $\delta_{4M}$  は Kronecker のデルタ、 $\delta(x-y)$  は Dirac のデルタ関数、 $x, y$  は場の異なる 2 点である。

式 (6) と (7) を式 (4) に用いると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \delta_{jM} u_j(y) + \delta_{4M} T(y) \\ & = \int_{\Gamma} u_{jM}^* t_j d\Gamma - \int_{\Gamma} C_{ijkl} u_{kM,i}^* n_i u_j d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} u_{4M}^* q d\Gamma - \int_{\Gamma} k_{ij} u_{4M,i}^* n_j T d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

式 (8) は静弾性問題における Somigliana の公式に対応する積分恒等式であり、物体の領域内部の 1 点の変位と温度を境界上の変位、表面力、温度、熱流束と関係づける式となっている。また、式 (8) に温度に関する領域積分がもはや存在しないことが分かる。

式 (6) と (7) を満足する基本解  $u_{KM}^*$  は、Radon 変換<sup>(4)</sup> を用いて求めることができ、次のようになる。

$$u_{im}^* = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} \Gamma_{im}^{-1}(\mathbf{a}) \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{p} \cos \phi + \mathbf{w} \sin \phi} d\phi \quad (9)$$

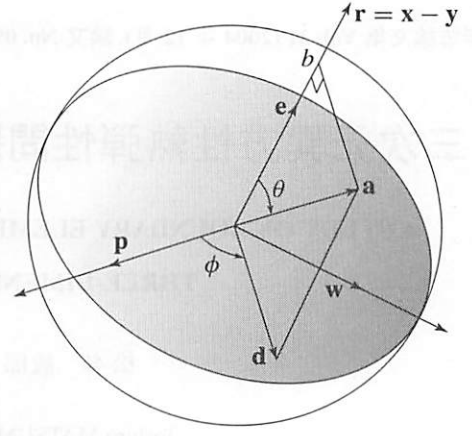


Fig.1 Geometrical relation between vectors  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{d}$  and  $\mathbf{a}$

$$u_{k4}^* = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_{44}^* &= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{k_{ij}(p_i \cos \phi + w_i \sin \phi)(p_j \cos \phi + w_j \sin \phi)} \\ &= \frac{\sqrt{|k_{ij}^{-1}|}}{4\pi R} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 $k_{ij}^{-1}$  は  $k_{ij}$  の逆行列であり、 $R$  は次式で定義される。

$$R = \sum_{i,j=1}^3 k_{ij}^{-1} (x_i - y_i)(x_j - y_j) \quad (12)$$

$$u_{4m}^* = \frac{-1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{k_{pq} a_p a_q} C_{ijkl} \beta_{kl} a_i \Gamma_{jm}^{-1}(\mathbf{a}) db d\phi \quad (13)$$

ただし、ベクトル  $\mathbf{a}$  は、次式で定義される。

$$\mathbf{a} = (\cos \phi) \mathbf{p} + (\sin \phi) \mathbf{w} + b \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (14)$$

ここで、Fig.1 に示すように、 $\mathbf{p} = p_i$  は、 $r_i$  に垂直な平面内のある単位ベクトル、 $\mathbf{w} = w_i$  は  $r_i$  と  $p_i$  に垂直な単位ベクトル、すなわち

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{p}|} \quad (15)$$

である。式 (9)~(13) において、 $\Gamma_{ij} = C_{ijkl} a_k a_l$ 、 $r$  は 2 点  $x, y$  間の距離である。

式 (13) は、等方線形弾性体のときは式 (13) の積分を解析的に評価することができ、Galerkin テンソルから導かれるもの<sup>(1)</sup> と一致する次の形に帰着する。

$$u_{4m}^* = -\frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} r_{,m} \quad (16)$$

ただし、 $\alpha$  は線膨張係数、 $\nu$  は Poisson 比である。

ここでは、熱伝導問題と熱弾性問題は連成していない場合を扱っているが、式 (8) は実際に以下のように分割して書くことができる。

$$\begin{aligned} u_m(y) &= \int_{\Gamma} u_{jm}^* t_j d\Gamma - \int_{\Gamma} C_{ijkl} u_{kM,i}^* n_i u_j d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} u_{4M}^* q d\Gamma - \int_{\Gamma} k_{ij} u_{4M,i}^* n_j T d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

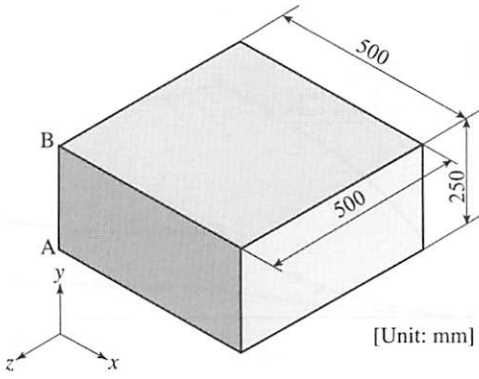


Fig.2 Example 1: geometry and dimensions of a rectangular solid example.

$$T(y) = - \int_{\Gamma} u_{44}^* q d\Gamma - \int_{\Gamma} k_{ij} u_{44,i}^* n_j T d\Gamma \quad (18)$$

すなわち、式(18)は異方性媒体の定常熱伝導問題に対するGreenの公式、式(17)は、一般の三次元異方性弾性体の熱弾性問題に対するSomiglianaの公式となっていることが分かり、 $u_{4m}^*$ と $k_{ij} u_{4m,i}^* n_j$ が等方弾性体の場合にGalerkinテンソルから求められる積分核に対応していることが分かる。

式(17)と(18)は次の形に変形することができる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} C_{ijkl} u_{km,i}^* n_i (u_j - u_j(y)) d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} u_{jm}^* t_j d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} u_{4m}^* q d\Gamma - \int_{\Gamma} k_{ij} u_{4m,i}^* n_j T d\Gamma \end{aligned} \quad (19)$$

$$\int_{\Gamma} k_{ij} u_{44,i}^* n_j (T - T(y)) d\Gamma = - \int_{\Gamma} u_{44}^* q d\Gamma \quad (20)$$

式(19)と(20)の中の点 $y$ は、境界上まで連続的に適用でき、式(19)と(20)が、この問題の境界積分方程式である。

式(19)と(20)を離散化して解けば、一般の三次元異方性体の定常熱弾性問題の境界要素法解析を行うことができる。すなわち、まず式(20)により、境界上のすべての点の温度と熱流束を計算する。次に式(19)にそれらを既知量として与え、変位と表面力の境界条件を与えて解けば、境界上のすべての点の変位と表面力が求まる。次に、境界上のすべての点の変位、表面力、温度、熱流束を式(17)に用いれば、物体内の任意の点の変位を計算することができる。

### 3. 数値計算例

ここでは、導出した基本解と境界積分方程式に対して、等方弾性体と直交異方性弾性体の材料定数を用いた数値解析例を示す。

#### 3.1. Example 1 — 等方弾性体に対する解析例

まず、Fig.2に示すような、直方体の底面の $y$ 方向のみ変位を固定、底面他の方向および他の面ではすべて自由表面とし、底面の温度を $20^\circ\text{C}$ 、上面を $200^\circ\text{C}$ としたときの変位を計算した。材料定数は、熱伝導率、Young率、Poisson比、線膨張係数をそれぞれ $k = 5.2 [\text{W/mK}]$ 、 $E = 200 [\text{GPa}]$ 、 $\nu = 0.25$ 、

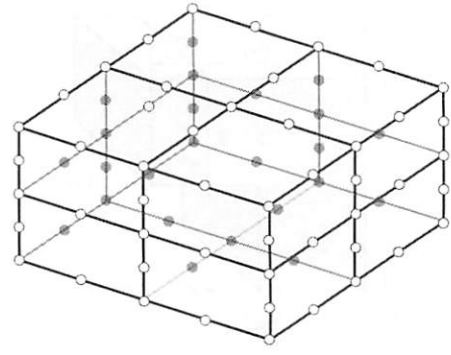


Fig.3 Example 1: boundary elements.

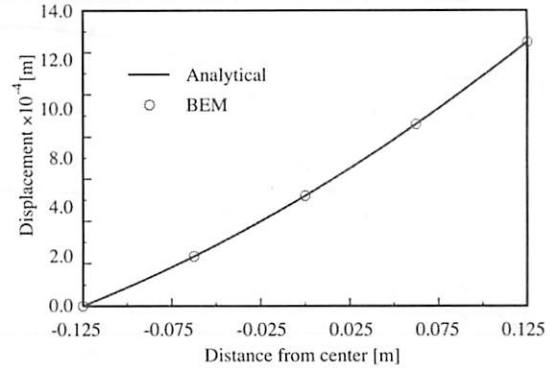


Fig.4 Example 1: results for the displacement in  $y$ -direction for rectangular solid example.

$\alpha = 1.0 \times 10^{-5} [\text{K}^{-1}]$ とし、Fig.3に示すように24個の8節点アイソパラメトリック要素に分割して解析した。このとき得られた直方体の底面から上面に至るFig.2のA-Bの部分の変位の $y$ 軸方向成分をFig.4に示す。厳密解と一致する解が得られていることが分かる。

#### 3.2. Example 2 — 直交異方性弾性体に対する解析例

次に、Fig.5に示すようなKöglの論文<sup>(5)</sup>で用いられているものと同じ立体を考えた。境界条件は立体の面face 1と底面face 2をとともに固定して他の面はすべて自由表面とし、立体の全境界の温度を無応力状態から一様に $100^\circ\text{C}$ にした場合(case A)と、face 1を $100^\circ\text{C}$ 、face 2を $0^\circ\text{C}$ 、その他の面は断熱とした場合(case B)について解析した。この立体を56個の1様な8節点アイソパラメトリック要素で分割した。直交異方性材料の熱伝導率、線膨張係数、弾性定数はそれぞれ次の値を用いた。

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} 5.2 & 0 & 0 \\ & 38.3 & 0 \\ & & 7.6 \end{bmatrix} \quad [\text{W/mK}] \quad (21)$$

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ & 4.0 & 0 \\ & & 6.0 \end{bmatrix} \quad [\text{K}^{-1}] \quad (22)$$

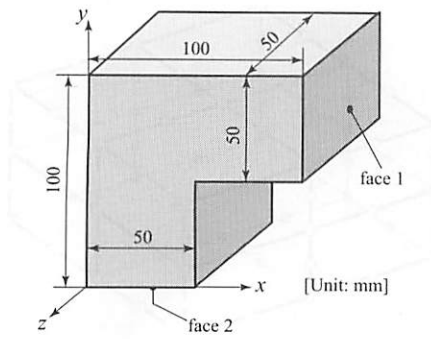


Fig.5 Example 2: geometry and dimensions.

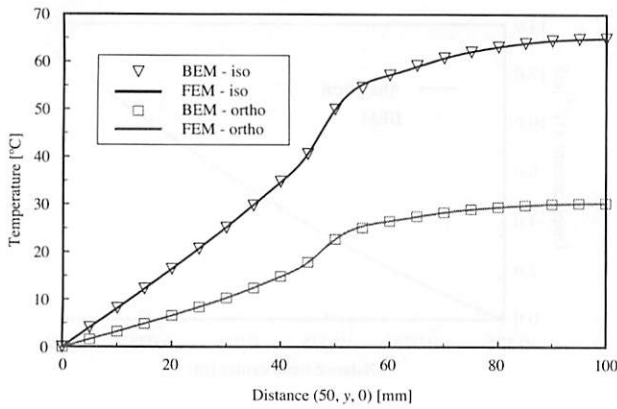


Fig.6 Example 2: results for the temperature.

$$[c_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 18.7 & 8.9 & 26.0 & 0 & 0 & 0 \\ & 26.0 & 21.1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 79.7 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 20.0 & 0 & 0 \\ & & & & 20.0 & 0 \\ & & & & & 20.0 \end{bmatrix} \quad [\text{GPa}] \quad (23)$$

ただし、弾性定数  $c_{\alpha\beta}$  の添え字  $\alpha$  と  $\beta$  は弾性定数テンソル  $C_{ijkl}$  と次の関係により関係づけられる。

$$\alpha = \begin{cases} i & \text{for } i = j \\ 9 - i - j & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad (24)$$

$$\beta = \begin{cases} k & \text{for } k = l \\ 9 - k - l & \text{for } k \neq l \end{cases} \quad (25)$$

このとき境界要素法により解析した結果を、3000個の6面体2次要素で分割してFEMプログラム(ANSYS)により解析した結果と比較した。Fig.6には点(50, y, 0)の温度、Fig.7には点(50, y, 0)の変位の大きさを示す。図には、参考のためExample 1の等方弾性体の材料定数を用いた場合の結果も併せて示している。いずれも有限要素法の解とよく一致した解が得られている。

以上の計算では、計算で用いた材料定数の値は直交異方性のものであるものの、完全な異方性に対する式(9), (11), (13)を用いて基本解を計算しており、定式化の妥当性が推測

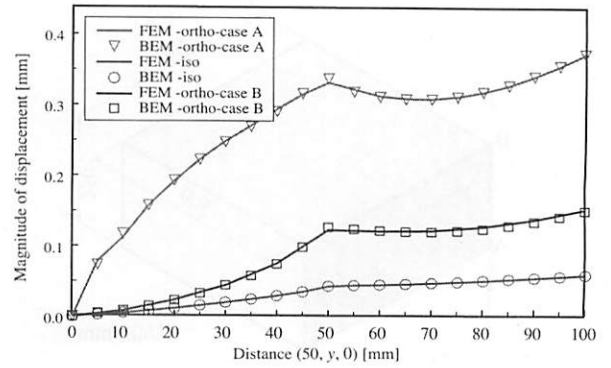


Fig.7 Example 2: results for the displacement.

されるが、さらに完全な異方性材料に対する数値計算結果の検証が必要である。

#### 4. 結言

本研究では、3次元異方性熱弾性問題の境界積分方程式と関連する基本解を熱弾性問題と熱伝導問題の連立偏微分方程式の基本解から出発することにより導出した。すなわち、連立偏微分方程式の基本解の導出法に着目し、熱弾性問題の支配微分方程式と定常熱伝導問題の支配微分方程式を連立させて基本解を求める方法を用いた。これにより、熱ひずみに関する領域積分は自動的に境界積分として表され、核関数は連立偏微分方程式の基本解の一部として得られ、これまで求めることが困難であった三次元の異方性弾性体に対する熱弾性問題の境界積分方程式を導出することが可能となった。数値解析例より、直交異方性弾性体の材料定数を計算に用いた場合について、本論文で導出した定式化の有効性を確認した。

謝辞 本研究の一部は学術振興会および文部科学省科学研究費基盤研究(C)(2) 15560068の援助を受けた。記して謝意を表する。

#### 参考文献

- (1) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, (1994) 培風館.
- (2) P.W. Partridge, C.A. Brebbia, L.C. Wrobel: *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, (1992), Computational Mechanics Publications.
- (3) Y.C. Shiah and C.L. Tan: Exact boundary integral transformation of the thermoelastic domain integral in BEM for general 2D anisotropic elasticity, *Computational Mechanics*, **23**(1999), pp. 87–96.
- (4) C.Y. Wang and J.D. Achenbach: Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A449**(1995), pp. 441–458.
- (5) M. Kögl and L. Gaul: A boundary element method for anisotropic coupled thermoelasticity, *Archive of Applied Mechanics* **73**(2003), pp. 377–398.