

2.5-D BEM・3-D Diagonal form 多重極境界要素法を用いた列車走行に伴う環境振動解析

APPLICATION OF A 2.5-D BEM AND 3-D DIAGONAL FORM FAST MULTIPOLE BEM TO ENVIRONMENTAL VIBRATION ANALYSIS WITH A MOVING LOAD

斎藤 隆泰¹⁾, 永井 浩二²⁾, 廣瀬 壮一³⁾

Takahiro SAITOH, Koji NAGAI and Sohichi HIROSE

- 1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail:saito@qnde.mei.titech.ac.jp)
 2) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail:van-knagai@qnde.mei.titech.ac.jp)
 3) 東京工業大学大学院情報理工学研究科教授 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail:shirose@cv.titech.ac.jp)

It is important to estimate environmental vibration induced by high speed train using a numerical analysis. A 3-D analysis is required to obtain vibration behavior excited by moving load around a barrier of finite length. However, 3-D analysis by the conventional boundary element method requires too much computational cost. Therefore, it is necessary to develop a more effective numerical method for a 3-D environmental vibration analysis. In this paper, we propose the coupling method of a 2.5-D boundary element method and a 3-D Diagonal Form Fast Multipole Boundary Element Method to improve the computational efficiency for the dynamic problem with large domain size due to a static and harmonic moving load.

Key Words: Fast Multipole Boundary Element Method, 2.5-D BEM, Diagonal form, Moving load.

1. はじめに

近年の鉄道技術の飛躍的発達により、鉄道の高速度が進んでいる。従って、鉄道沿線の地盤振動（環境振動）レベルの予測を行うことは非常に重要である。鉄道施設の建設は、大規模かつ多くのコストを必要とすることから、施設の建設前に予めなんらかの手法により環境振動レベルを予測し、その対策を講じることが重要である。しかし、鉄道施設の規模、公共性等を考慮すれば、数値解析手法により、施設の設置前に環境振動レベルを予測しておくことが望ましい。列車走行に伴う環境振動問題の、最も単純な解析モデルとして、半無限地盤の地表面を走行する点荷重問題を考えることが出来る。しかしながら、このような単純なモデルに対しても、解析的に閉じた解を得ることは難しい⁽¹⁾。従って、より複雑な環境振動問題を解くためには、有限要素法や境界要素法といった数値解析手法を用いる必要がある。有限要素法は、一般的に、有限領域のみを扱うので、移動荷重による入射場の無限遠での挙動を、何らかの手法を用いて考慮しなければならないが⁽²⁾、境界要素法は、無限遠における放射条件を基本解⁽³⁾が自動的に満たすため、直接的に波動場を求められると

いう利点を持つ。従って、環境振動問題に対して、境界要素法は非常に有効な数値解析手法であると考えられる。一般的に、ある方向に対して垂直な二次元断面内で、材料定数や解析モデルの幾何形状が一定であり、波動場及び、境界条件がその方向に対してフーリエ変換出来る問題の三次元解析は2.5次元解析(擬似三次元解析)⁽⁴⁾と呼ばれているが、列車進行方向に沿って平行に設置された、無限長さを持つ防振壁、防振溝の問題も、典型的な2.5次元問題の一つである。2.5次元問題は、解析モデルが断面方向に一様である性質を利用することから、通常の三次元解析に比べて、非常に効率的に三次元解析を実行出来る。しかし、有限長さの防振壁、防振溝周りの波動場を求めるといった場合には、断面方向に解析モデルが一様でなければならないという2.5次元解析の性質上、2.5次元解析を実行出来ない。従って、このような場合、三次元境界要素法解析が必要である。しかし、三次元動弾性境界要素法は、膨大な計算時間・記憶容量を必要とすることから、なんらかの手法を用いて、計算コストを軽減させる必要がある。このような背景から、著者らのグループでは、環境振動解析に対して、高速多重極法を用いた2.5-D・3-D結

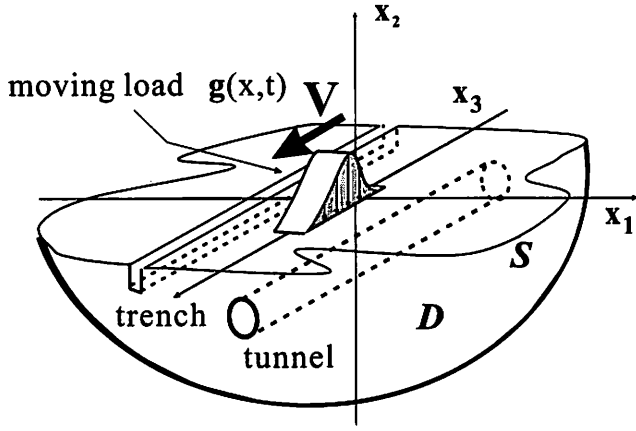


Fig. 1 A 3-D model of a half space subjected to a moving load.

合解法⁽⁵⁾を提案してきた。しかし、これまでの解析手法では、荷重自身の振動を考慮していないこと、解析領域が波長に対して、十分大きいような問題に対しては多重極法における級数展開の項数を多くとらなければならず、計算量の増加の原因となる。そこで本研究では、これらの問題点を解決するための、有限長さの防振溝周りの波動場を解析する環境振動解析手法を開発することを目的とする。

2. 2.5-D 移動荷重解析

2.1. 2.5次元問題

Fig.1 に示されるような、均質等方な地盤 D 上を、荷重が等速度 V で運動する問題を考える。移動荷重 g は荷重の分布を変えずに x_3 方向に運動するものとする。また、解析モデルの幾何形状や材料定数等は、荷重進行方向断面 x_3 内で常に一定であると仮定する。この時、地盤 D 内の任意の点 \mathbf{x} における時刻 t での、変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ は次の Navier-Cauchy の方程式を満たす。

$$L_{ik}(\partial_x)u_k(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in D \quad (1)$$

ただし、 ρ は密度であり、 $L_{ik}(\partial_x)$ は次式で定義された微分演算子である。

$$L_{ik}(\partial_x) = C_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \quad (2)$$

ここで C_{ijkl} は弾性定数であり、ラメ定数 λ, μ を用いて、 $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ で表される。一般的に、式 (1) における境界条件は次のように表される。

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= h_i(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_u \\ t_i(\mathbf{x}, t) &\equiv T_{ik}^n(\partial_x)u_k(\mathbf{x}, t) = g_i(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_t = S \setminus S_u \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 h_i, g_i は与えられた境界値である。また $T_{ik}^n(\partial_x)$ は

表面力作用素であり、 $T_{ik}^n(\partial_x) = C_{ijkl}n_j(\mathbf{x})\partial/\partial x_l$ で表される。ここに、 $n(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} における外向き法線を表す。今、 x_3, t に関するフーリエ変換を次のように定義する。

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \xi_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3, t) e^{-i\xi_3 x_3} dx_3 \quad (4)$$

$$\hat{f}(x_1, x_2, x_3, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3, t) e^{i\omega t} dt \quad (5)$$

ここで、式 (4), (5) を式 (1), (3) に適用すれば、次のような二次元空間 $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$ における支配方程式

$$\begin{aligned} L_{ik}(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, i\xi_3)\hat{u}_k(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) \\ = -\rho\omega^2 \hat{u}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega), \mathbf{X} \in \bar{D} \end{aligned} \quad (6)$$

と、対応する境界条件

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) &= \hat{h}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega), \mathbf{X} \in \partial S_u \\ \hat{t}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) &= \hat{g}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega), \mathbf{X} \in \partial S_t = \partial S \setminus S_u \end{aligned} \quad (7)$$

を得ることが出来る。ここで、 \bar{D} は x_1-x_2 面内における境界 $\partial S_u, \partial S_t$ で囲まれた二次元領域を表す。

2.2. 動的移動荷重解析

もし、式 (6), (7) で定義された二次元境界値問題の解 \hat{u}_i が求まれば、三次元空間の位置 \mathbf{x} , 時刻 t における解 $u_i(\mathbf{x}, t)$ は、形式的に、次の逆フーリエ変換により求まる。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) e^{i(\xi_3 x_3 - \omega t)} d\omega d\xi_3 \quad (8)$$

しかしながら、式 (8) における計算では、全ての ω, ξ_3 に関する二次元の解 \hat{u}_i を必要とすることから計算効率上好ましくない。今、移動荷重は x_3 軸に沿って一定の速度・荷重分布を持ち、角振動数 Ω で振動しながら移動する問題を考えると、解析モデルが x_3 軸に垂直な断面にて一様であることから、時刻 t における変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ 、及び $g_i(\mathbf{x}, t)$ は、次のように表せる。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = u_i(\mathbf{X}, x_3 - Vt, t) e^{-i\Omega t} \quad (9)$$

$$g_i(\mathbf{x}, t) = g_i(\mathbf{X}, x_3 - Vt, t) e^{-i\Omega t} \quad (10)$$

ここで、式 (9) を、式 (4), (5) を用いてフーリエ変換すれば、

$$\hat{u}_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) = 2\pi \hat{u}'_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) \delta(\omega - \Omega - \xi_3 V) \quad (11)$$

を得ることが出来る。ただし、 $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関

数であり、 $\hat{u}'(\mathbf{X}, \xi_3, \omega)$ は $\omega = \xi_3 V + \Omega$ の条件下における式 (6) の解である。式 (11) を式 (8) に代入すれば、変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ は、

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}'_i(\mathbf{X}, \xi_3, V\xi_3 + \Omega) e^{i(x_3 - Vt)\xi_3 - i\Omega t} d\xi_3 \quad (12)$$

と求まる。従って、移動荷重により支配される三次元空間における変位場 $u_i(\mathbf{x}, t)$ は、 $\omega = \xi_3 V + \Omega$ なる条件下で二次元境界値問題を解くことに帰着され、式 (12) のように ξ_3 に関する $\hat{u}'_i(\mathbf{X}, \xi_3, V\xi_3 + \Omega)$ の一度の逆フーリエ変換を実行することにより得られることがわかる。数値計算上では、その逆フーリエ変換は高速フーリエ変換 (FFT) により実行される。また、もし、荷重が静的な移動荷重ならば、三次元空間における変位場 $u_i(\mathbf{x}, t)$ は、 $\Omega = 0$ と置くことにより、

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}'_i(\mathbf{X}, \xi_3, V\xi_3) e^{i(x_3 - Vt)\xi_3} d\xi_3 \quad (13)$$

と求めることが出来る。

2.3. 2.5-D 動弾性境界要素法の定式化

前節で述べたように、三次元空間における変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ を求めるために、本研究では、まず式 (6)、(7) で定義された二次元境界値問題を境界要素法を用いて解く。境界要素法における、いわゆる基本解 $U_{jk}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ は、次の運動方程式を満たす。

$$L_{ij}(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, -i\xi_3) U_{jk}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \delta_{ik} \delta(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = -\rho\omega^2 U_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (14)$$

この時、基本解 U_{jk} は Li ら (6) により次の形式で与えられる。

$$U_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{i}{4\mu} \left[H_0^{(1)}(\tilde{k}_T R) \delta_{ik} + M_{ik} \left\{ H_0^{(1)}(\tilde{k}_T R) - H_0^{(1)}(\tilde{k}_L R) \right\} \right] \quad (15)$$

ここで、 $H_0^{(1)}$ は 0 次の第一種ハンケル関数を表し、 M_{ik} は微分演算子、

$$M_{ik} = \frac{1}{k_T^2} \left\{ \delta_{\alpha k} \delta_{\beta i} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - i\xi_3 (\delta_{3k} \delta_{\alpha i} + \delta_{3i} \delta_{\alpha k}) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - \xi_3^2 \delta_{3k} \delta_{3i} \right\} \quad (16)$$

で表される。ただし、 $R = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ 、 $\tilde{k}_T = \sqrt{k_T^2 - \xi_3^2}$ 、 $\tilde{k}_L = \sqrt{k_L^2 - \xi_3^2}$ である。また、 k_L 、 k_T はそれぞれ

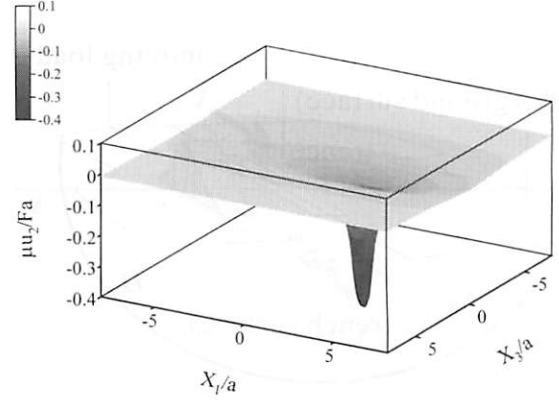


Fig. 2 Vertical displacement at $c_T t/a = 0.0, \Omega = 0 \text{ Hz}$

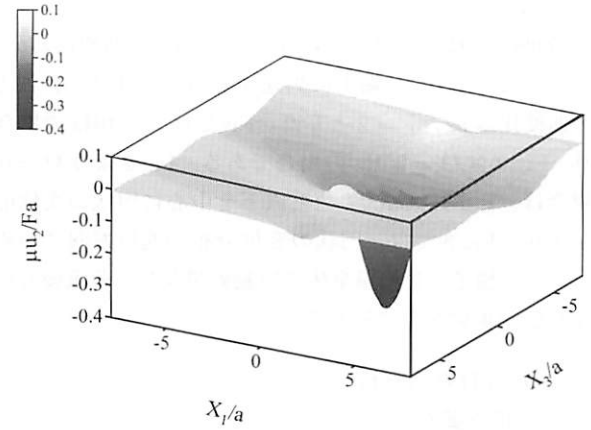


Fig. 3 Vertical displacement at $c_T t/a = 0.0, \Omega = 20 \text{ Hz}$

れ P 波、S 波の波速 c_L 、 c_T を用いて $k_L = \omega/c_L$ 、 $k_T = \omega/c_T$ で定義される波数である。式 (6) に $U_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ を、式 (14) に $\hat{u}'_i(\mathbf{Y}, \xi_3, \omega)$ をかけて、前式から後式の差を取り、領域 \bar{D} について積分し、整理すれば、次の積分方程式を得る。

$$\frac{1}{2} \hat{u}'_i(\mathbf{X}, \xi_3, \omega) = \int_{\partial S} \left\{ U_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \hat{t}'_k(\mathbf{Y}, \xi_3, \omega) - T_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \hat{u}'_k(\mathbf{Y}, \xi_3, \omega) \right\} dS_Y, \mathbf{X} \in \partial S \quad (17)$$

ただし、 $T_{ik}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \tilde{T}_{ij}(\partial_{y_1}, \partial_{y_2}, -i\xi_3) U_{jk}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ である。境界積分方程式 (17) は離散化され、代数方程式に帰着することにより、境界条件 (7) の下で解かれる。こうして、式 (12) から三次元問題の解は、 $\omega = \xi_3 V + \Omega$ の条件下で解かれた二次元問題の解 $\hat{u}'_i(\mathbf{Y}, \xi_3, \omega)$ を用いて得ることが出来る。

2.4. 2.5-D 移動荷重解析・解析結果

以下、等方均質な三次元地盤上を移動荷重が一定の速度 $V/c_T = 5/9$ で移動する場合の地盤表面における鉛直方向変位場を示す。なお、移動荷重は x_3 方向に対して $F \sin^2(x_3 - Vt)$ の分布を持ち、 x_1 方向には $x_1 = 2a$ を中心とて、 $1.5 < x_1/a <$

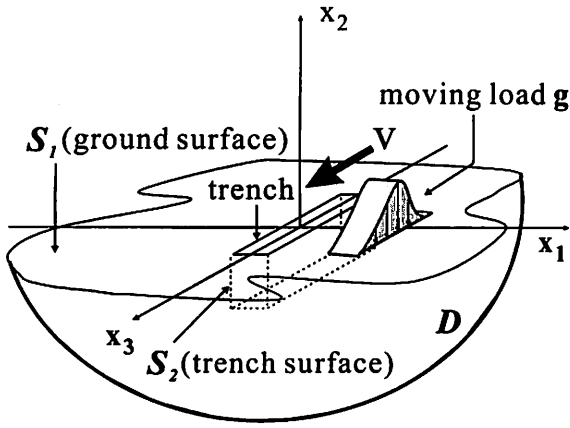


Fig. 4 3-D model of a half space subjected to a moving load with a finite trench.

2.5の範囲に一樣に作用するものとする。また、時刻 $c_T t/a = 0$ においてピークが x_1 軸上に到達するものとする。P波とS波の速度比は $c_L/c_T = 2$ とした。Fig.2は $\Omega = 0\text{Hz}$ の場合であり、Fig.3は $\Omega = 20\text{Hz}$ の場合である。Fig.2より $\Omega = 0\text{Hz}$ の場合は、Fig.3に比べて荷重直下を中心に円状の変位応答を示すが、Fig.3では、円状の変位分布が進行方向にやや偏心している様子、変位場全体の振動効果及び、荷重後方においても振動現象を見て取れる。

3. 2.5-D・3-D 結合解析

3.1. 3-D 境界要素法

2.5-D解析は、Fig.1のような荷重進行方向に対して解析モデルが一樣な場合に有効であり、Fig.4のような有限長の防振溝、及び防振壁を擁する問題に対しては、三次元解析を実行しなければならない。今、Fig.4で表されるような、移動荷重に支配される有限長さの防振溝を擁する三次元半無限解析モデルを考える。この時、もし、有限長さの防振溝が存在しなければ、半無限体での移動荷重による波動放射問題となり、問題は前節で与えられた2.5-D問題と完全に等価である。従って、Fig.4で表される三次元問題は、この放射問題と、有限長さの防振溝による散乱問題として考えることが出来る。以下、後者の散乱問題に対して、2.5-Dの解と関連し、定式化を行う。移動荷重 g による入射波は、有限長さを持った防振溝、及び地表面により反射、散乱される。その時、散乱波成分 u^{sc} と対応する表面力 t^{sc} は、地表面 S_1 及び、防振溝表面 S_2 において次の積分方程式を満たす。

$$\int_S \left\{ U_{ik}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k^{sc}(\mathbf{y}, \omega) - T_{ik}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k^{sc}(\mathbf{y}, \omega) \right\} dS_y = \frac{1}{2} u_i^{sc}(\mathbf{x}, \omega), \mathbf{x} \in S = S_1 + S_2 \quad (18)$$

ここに、 $U_{ik}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、三次元動弾性問題の基本解であり、次式で表される。

$$U_{ik}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{e^{ik_T r}}{r} \delta_{ik} + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} \left\{ \frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_L r}}{r} \right\} \right] \quad (19)$$

ただし、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ である。また二重層核 $T_{ik}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、

$$T_{ik}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = n_j(\mathbf{y}) C_{kjpa} \frac{\partial}{\partial y_q} U_{ip}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (20)$$

で定義される。また、全変位 u^{3D} は次のように入射場 u^{in} と散乱場 u^{sc} の和で表される。

$$u^{3D} = u^{in} + u^{sc} \quad (21)$$

式(21)を式(18)に代入し、境界条件 $t^{3D}(\mathbf{x}, \omega) = 0$ for $\mathbf{x} \in S_2$, $t^{3D}(\mathbf{x}, \omega) = t_{in}(\mathbf{x}, \omega)$ for $\mathbf{x} \in S_1$ を考慮すれば、次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} u_i^{3D}(\mathbf{x}, \omega) + \int_{S_1 + S_2} T_{ik}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k^{3D}(\mathbf{y}, \omega) dS_y \\ &= \frac{1}{2} u_i^{in}(\mathbf{x}, \omega) + \int_{S_1} T_{ik}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k^{in}(\mathbf{y}, \omega) dS_y \\ &+ \int_{S_2} \left\{ -U_{ik}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_k^{in}(\mathbf{y}, \omega) + T_{ik}^{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_k^{in}(\mathbf{y}, \omega) \right\} dS_y \end{aligned} \quad (22)$$

これまで述べたように、式(22)における入射波成分 u^{in} は、三次元半無限弾性地盤の表面を一定の速度 V で移動する移動荷重による2.5-D問題の周波数域の解である。周波数域における2.5-D問題の解は、式(12)において、積分変数 ξ_3 と ω に関して変数変換すると、次の式を得る。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{V} \hat{u}'_i(\mathbf{X}, \frac{\omega - \Omega}{V}, \omega) e^{i\frac{\omega - \Omega}{V} x_3} e^{-i\omega t} d\omega \quad (23)$$

式(23)は逆Fourier変換の形をしているから、周波数域における入射波 $u_i^{in}(\mathbf{x}, \omega)$ は、形式的に、

$$u_i^{in}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{V} \hat{u}'_i(\mathbf{X}, \frac{\omega - \Omega}{V}, \omega) e^{i\frac{\omega - \Omega}{V} x_3} \quad (24)$$

と得ることが出来る。静的移動荷重の場合に対しては、式(24)で $\Omega = 0$ とすれば求まる。

3.2. diagonal form 三次元動弾性高速多重極境界要素法

2.5-D解析に加えて、式(22)を効率よく解くために高速多重極境界要素法を用いる。一般に、高速多重極法では、級数展開を用いて定式化する従来法と、diagonal formを用いた手法が存在する。それぞれの手法には、低周波、及び、高周波問題に対して有効であるという特徴があるが、本研究では、高周波問題にも対応可能とするため、diagonal formを用いた

高速多重極境界要素法の定式化を示す。特に、2節における荷重の振動効果を考慮した場合は、時間域の解を導出するために、より高い周波数応答の解も必要となる。diagonal formを用いた多重極法は Helmholtz 方程式に対して Gyure⁽⁷⁾ や Rokhlin⁽⁸⁾ らにより行われている。一方、周波数域の三次元動弾性問題に対する diagonal form を用いた高速多重極境界要素法に関しては、吉田・西村ら⁽⁹⁾ によるクラック問題に対してのみ定式化が示されている。高速多重極境界要素法の詳細は他の文献⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ により詳しく参照できることから、ここでは、diagonal form を用いた変位に関する積分方程式についての定式化で重要となる部分について述べる。高速多重極境界要素法では、まず、基本解を変数 \mathbf{x}, \mathbf{y} に関する分離系で表すことを考える。そこで、まず Epton, Dembart⁽¹²⁾ に倣い、基本解に含まれる $e^{ik_\beta r}/r$ の項を、 \mathbf{x}, \mathbf{y} それぞれの近傍点 $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ を用いて次のように表す。

$$\frac{e^{ik_\beta r}}{r} = \frac{ik_\beta}{4\pi} \int_{S_0} e^{ik_\beta \hat{\mathbf{k}} \cdot \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} \Gamma(k_\beta, \hat{\mathbf{k}}, \overline{\mathbf{y}_0\mathbf{x}_0}) e^{ik_\beta \hat{\mathbf{k}} \cdot \overline{\mathbf{y}_0\mathbf{y}}} dS_{\hat{\mathbf{k}}} \quad (25)$$

ただし、 k_β は、 k_L 、または k_T であり、 S_0 は単位球面上の積分を表す。さらに、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ であり、 $\hat{\mathbf{k}}$ は単位方向ベクトルを表す。また、 Γ は、球 Hankel 関数 $h_n^{(1)}$ 、及びルジャンドル陪関数 P_n を用いて、

$$\Gamma(k_\beta, \hat{\mathbf{k}}, \overline{\mathbf{y}_0\mathbf{x}_0}) = \sum_{n=0}^p \frac{(2n+1)}{i^n} h_n^{(1)}(k_\beta |\overline{\mathbf{y}_0\mathbf{x}_0}|) P_n(\widehat{\overline{\mathbf{y}_0\mathbf{x}_0}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (26)$$

と表せる。今、基本解 (19) を交代記号 ϵ_{ijk} を用いて次のように変形する。

$$U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\mu k_T^2} \left(\epsilon_{rqi} \epsilon_{rsk} \frac{\partial^2}{\partial x_q \partial y_s} \frac{e^{ik_T r}}{r} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_k} \frac{e^{ik_L r}}{r} \right) \quad (27)$$

この時、式 (27) に式 (25) を用いて影響関数の積分を実行すると、

$$\begin{aligned} & \int_{S_y} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) dS_y \\ &= \frac{i}{16\pi^2 \mu k_T^2} \left\{ k_L^3 \int_{S_0} \hat{\mathbf{k}}_i e^{ik_L \hat{\mathbf{k}} \cdot \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} \Gamma(k_L, \hat{\mathbf{k}}, \overline{\mathbf{y}_0\mathbf{x}_0}) M^{U,L}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_0) \right. \\ & \left. + k_T^3 \int_{S_0} \epsilon_{rqi} \hat{\mathbf{k}}_q e^{ik_T \hat{\mathbf{k}} \cdot \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} \Gamma(k_T, \hat{\mathbf{k}}, \overline{\mathbf{y}_0\mathbf{x}_0}) M_r^{U,T}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_0) \right\} dS_{\hat{\mathbf{k}}} \quad (28) \end{aligned}$$

を得る。ただし、 $M^{U,L}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_0)$ 、 $M_r^{U,T}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_0)$ は、それぞれ、縦波、横波に関する、点 \mathbf{y}_0 での多重極モーメントであり、

$$M^{U,L}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_0) = \int_{S_y} \hat{\mathbf{k}}_j e^{ik_L \hat{\mathbf{k}} \cdot \overline{\mathbf{y}_0\mathbf{y}}} t_j(\mathbf{y}) dS_y \quad (29)$$

$$M_r^{U,T}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_0) = \int_{S_y} \epsilon_{rsj} \hat{\mathbf{k}}_s \cdot e^{ik_T \hat{\mathbf{k}} \cdot \overline{\mathbf{y}_0\mathbf{y}}} t_j(\mathbf{y}) dS_y \quad (30)$$

である。一方、対応する二重層核に関しても同様に、

$$\begin{aligned} & \int_{S_y} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) dS_y \\ &= \frac{i}{16\pi^2 \mu k_T^2} \left\{ k_L^3 \int_{S_0} \hat{\mathbf{k}}_i e^{ik_L \hat{\mathbf{k}} \cdot \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} \Gamma(k_L, \hat{\mathbf{k}}, \overline{\mathbf{y}_0\mathbf{x}_0}) M^{T,L}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_0) \right. \\ & \left. + k_T^3 \int_{S_0} \epsilon_{rqi} \hat{\mathbf{k}}_q e^{ik_T \hat{\mathbf{k}} \cdot \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} \Gamma(k_T, \hat{\mathbf{k}}, \overline{\mathbf{y}_0\mathbf{x}_0}) M_r^{T,T}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_0) \right\} dS_{\hat{\mathbf{k}}} \quad (31) \end{aligned}$$

と展開できることから、二重層核における多重極モーメント、 $M^{T,L}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_0)$ 、 $M_r^{T,T}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_0)$ は、

$$M^{T,L}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_0) = \int_{S_y} ik_L \hat{\mathbf{k}}_n \hat{\mathbf{k}}_p C_{jknp} n_k(\mathbf{y}) e^{ik_L \hat{\mathbf{k}} \cdot \overline{\mathbf{y}_0\mathbf{y}}} u_j(\mathbf{y}) dS_y \quad (32)$$

$$M_r^{T,T}(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{y}_0) = \int_{S_y} ik_T \hat{\mathbf{k}}_s \hat{\mathbf{k}}_n \epsilon_{rsp} C_{jknp} n_k(\mathbf{y}) e^{ik_T \hat{\mathbf{k}} \cdot \overline{\mathbf{y}_0\mathbf{y}}} u_j(\mathbf{y}) dS_y \quad (33)$$

となる。以上、ここでは、一重層及び、二重層核における多重極モーメントを導いた。また、これらの係数は ML-FMA (Multilevel Fast Multipole Algorithm)⁽⁷⁾ により効率よく処理した。なお、各階層間における多重極点、局所展開点の移動公式は、式 (25) により導かれる。これらの移動公式は、当然ながら三次元 Helmholtz 方程式の場合と同じ関係になる。

4. 三次元環境振動解析

各階層 l における M2L で使用する展開項数 p_l には、Gyure ら⁽⁷⁾ による次の式

$$p_l = k_\beta D_l + \frac{d}{1.6} * \log(k_\beta D_l + \pi) \quad (34)$$

を用いた。ここで、 D_l は各レベルにおける近傍セルを取り巻くセルの直径を表し、 d は計算精度を表すパラメータで桁数を表している。また、各階層間での多重極係数、及び局所展開係数の補間には、Far Field Transform⁽⁷⁾ を用いた。

4.1. 周波数域における三次元環境振動解析例

diagonal form による解析結果を示す。Fig.5 のような寸法の防振溝を擁する三次元解析モデルを考える。地盤及び、荷重の条件は2節と同様とする。Fig.6 は、荷重の振動を考慮した $\Omega = 20\text{Hz}$ の場合の周波数域における $k_T a = 4.0$ の解析結果であり、全変位を表している。また、図中の白抜き部分は防振溝を表している。荷重直下の $X_1/a = 2$ 付近で大きな変位応答を見ることが出来る。一方、防振溝に対して荷重と反対側は散乱波の影響を見てとることが確認できる。また、防振溝の切れ目付近では、回折の効果、及び反射の影響を見ることが出来る。この影響は、本解析例と同一の地盤・荷重条件下で防振溝が X_3 方向に無限であると想定した場合

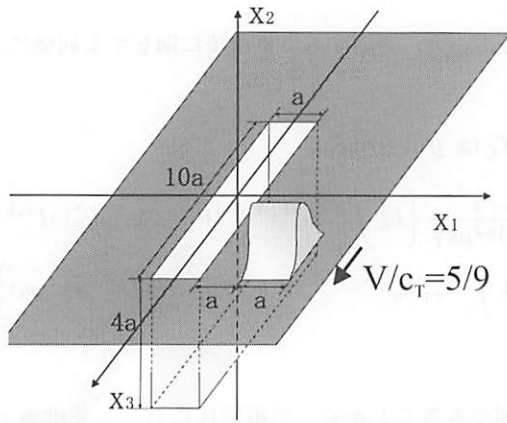


Fig. 5 A Model for numerical analysis.

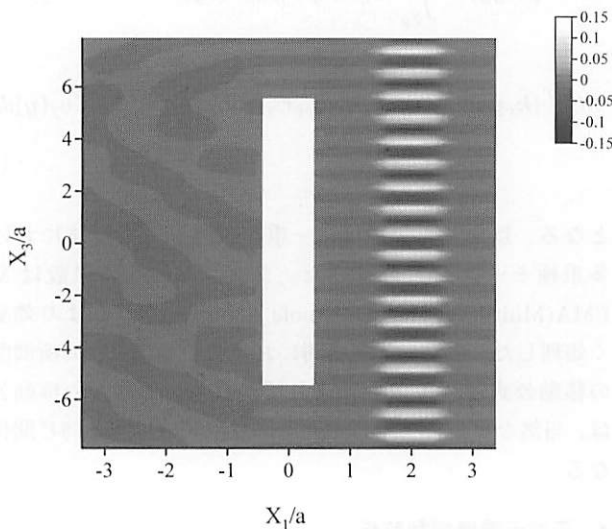


Fig. 6 Vertical displacement at $k_T = 4.0$.

の2.5次元解析の使用のみでは確認することが出来ない影響である。実際、防振壁、防振溝を擁する地盤の環境振動現象において、このような三次元的な影響は未知な部分が多い⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。従って、今後は、防振壁のみならず、防振溝を擁する問題等、多くの問題に適用する必要があると考えられる。

5. 結言

本研究では、荷重自身の振動を考慮した場合の2.5-D・3-D境界要素結合解法の定式化、及び、解析例を示した。また三次元解析には、今後より大規模な解析領域・及び、高周波な問題に対応出来るよう diagonal form を用いた。今後は、本手法を用いた大深度地下利用に伴う環境振動解析や、異方性地盤に対する三次元高速解法の開発、及び環境振動解析を行う予定である。

参考文献

- (1) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S.: *Elastodynamics Volume II Linear Theory*, New York, Academic Press(1975).
- (2) Hanazato, T. et al. : Three-dimensional analysis of traffic-induced ground vibrations, *J. Geotech. Eng. ASCE* **117** (1991), pp. 1133-1151.
- (3) 小林昭一編著：波動解析と境界要素法、京都大学学術出版会、(2000).
- (4) Hirose, S. and Kitahara, M. : Scattering from an interface defect between fiber and matrix, In D. O. Thompson and D. E. Chimenti (eds), *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* **14**, New York, Plenum Press (1995), pp. 99-106.
- (5) 斎藤隆泰、土戸研一、廣瀬壮一：列車走行に伴う環境振動解析のための2.5-D・3-D高速多重極境界要素・結合解法の開発、応用力学論文集、**7** (2004), pp. 255-262.
- (6) Li, Z. L. : Refraction and transmission of obliquely incident surface waves by an edge of a quarter space : Theory and experiment, *J. Appl. Mech.* **59** (1992), pp. 349-355.
- (7) Gyure, M. F. and Stalzer, M. A. : A Prescription for the Multilevel Helmholtz FMM, *IEEE Comp. Sci. Eng.*, **5(3)**, (1998) pp. 39-47.
- (8) Rokhlin, V. : Diagonal forms of translation operators for Helmholtz equation in three-dimensions, *Appl. and comp. harmonic analysis* **1**, (1993) pp. 82-93.
- (9) Yoshida, K., Nishimura, N. and Kobayashi, S. : Application of a diagonal form fast multipole BIEM to the analysis of three dimensional scattering of elastic waves by cracks, 境界要素法論文集、**18** (2001), pp. 77-80.
- (10) 福井卓雄、勝本順三：2次元 Helmholtz 方程式のための高速多重極アルゴリズムと境界要素法への応用、境界要素法論文集、**14** (1997), pp. 81-86.
- (11) Nishimura, N. : Fast multipole accelerated boundary integral equation methods, *Applied Mechanics Rev*, **55**, (2002), pp. 299-324.
- (12) Epton, M. A. and Dembart, B. : Multipole translation theory for the three-dimensional Laplace and Helmholtz equations, *SIAM J. Sci. COMPUT*, **16** (1995), pp. 865-897.
- (13) 田口典生、花里利一、長瀧慶明、高木政美：防振地中壁の振動手期限効果に関する解析的検討その1、解析概要第39回地盤工学研究発表会、(1992).
- (14) 花里利一、田口典生、長瀧慶明、高木政美：防振地中壁の振動手期限効果に関する解析的検討その2、解析結果第39回地盤工学研究発表会、(1992).