

# 層状体に対する SH 波のグリーン関数を用いた境界要素法

## A Boundary Element Method Using a SH-wave Green's Function for a Layered Medium

木本 和志<sup>1)</sup>, 廣瀬 壮一<sup>2)</sup>

Kazushi KIMOTO, Sohichi HIROSE

1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: kimoto@cv.titech.ac.jp)

2) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: shirose@cv.titech.ac.jp)

A boundary element method (BEM) for 2D SH-wave scattering in an elastic layer sandwiched by low velocity half spaces is developed. The BEM is based on the integral equation having a Green's function for a layer as its integral kernel. The Green's function BEM has an advantage over the conventional one in terms of computational memory, because no integration is necessary on the layer interfaces. However, numerical evaluation of the Green's function is critical and burdensome. In this paper, a hybrid ray-mode representation of the Green's function given by Kamel [2] is employed, and its numerical aspects are discussed in some detail. As a numerical example, SH-wave scattering by a cavity in a layer is considered. Some numerical results obtained by the present BEM are compared with those calculated by the conventional BEM.

**Key Words:** SH-wave, Green's function, layered medium, scattering

### 1. はじめに

本研究は層状体に対する SH 波のグリーン関数を利用した境界要素法の開発を行ったものである。板や層状体中の空洞や介在物による弾性波の散乱問題は、超音波非破壊評価のシミュレーションにおいて基本的かつ重要なモデルの一つである。このような問題は境界要素法や有限要素法、差分法などによって解くことができるが、簡単な超音波実験をモデル化したシミュレーションを行う場合でさえ大規模な問題となることが多く、計算効率の面で不十分であることが少なくない。これは境界要素法についても例外ではない。そのため、層状体における散乱問題を境界要素法によって効率良く解くことができるようにすることには意義があると言える。本研究はこのような背景を踏まえ、層状体に対するグリーン関数を利用した境界要素法の開発について研究を行ったものである。通常、動弾性問題の境界要素解析では、全無限の基本解を積分核とした積分方程式が用いられる。これは、層状体や板のグリーン関数がほとんどの場合閉じた形で求められないことによるが、その結果無限遠まで続く板表面や層間界面にも要素を配置しなければならず、これが境界要素法による解析を困難にしている。数値解析上、無限境界はある位置で打ち切らざるを得ない。しかし、周波数域において解析を行う場合には、有限領域としたことで生じる固有振動や、板の場合には Lamb 波の影響が広範囲に及ぶことなどのために、単純に境界を打ち切っただけでは精度のよい答えが得られない。

これに対して Cho らは、無限板の打ち切り位置では変位および表面力が複数のモードからなる Lamb 波のプロファイルをもつものとして無限板中の波動場を表現する境界要素法を開発した [1]。この方法は薄板中を伝播する波動の散乱解析に適しているが、厚板や高周波に対する解析では非常に多くのモードを必要とし、境界要素法を適用する解析領域もあまり小さくすることができない。また、どの程度高次のモードまで考慮するかや打ち切り位置の決定についても依然問題が残る。一方、本研究で対象とするグリーン関数を用いた境界要素法では、グリーン関数が板表面や層間界面での境界条件を満足するために、要素分割は散乱体上のみでよい。従って境界の打ち切りに起因する問題について考える必要が無く、計算に要する記憶容量も大幅に節約することができる。反面、グリーン関数の評価には一般に多く計算時間を要し、それをいかに効率化するかによって境界要素法としての計算効率が大きく左右される。ここでは、最も簡単な場合である 2 次元の SH 波について考えるが、その場合でもグリーン関数の数値計算にはいくつかの工夫が必要である。そこで以下では、問題設定と定式化、グリーン関数の具体的な表現とその導出を順に示した後、グリーン関数の数値計算方法について詳しく述べる。最後に、ここで開発した境界要素法を用いて行った SH 波の散乱解析の結果を示す。グリーン関数の計算方法について述べた部分では、正確な評価を行うことができていることを示すための数値計算例も併せて示す。

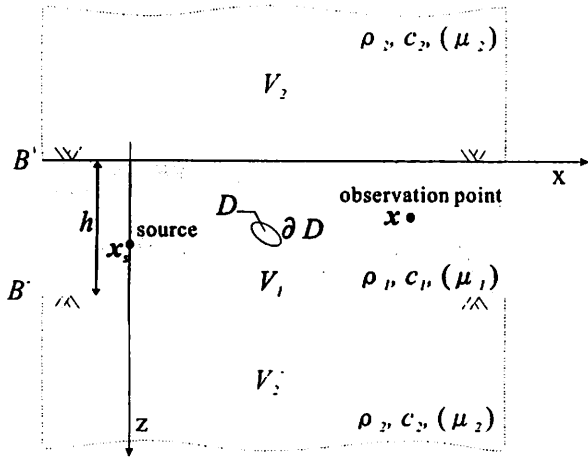


Fig. 1 An elastic layer  $V_1$  sandwiched by two half spaces  $V_2^+$  and  $V_2^-$ .

## 2. 問題設定および定式化

Fig.1 に示すように半無限領域  $V_2^+$  および  $V_2^-$  にはさまれた、厚さ  $h$  の弾性層  $V_1$  を考える。  $V_1$  と上下の半無限領域が接する境界面をそれぞれ  $B^+$ ,  $B^-$  で表し、  $V_1$  は内部に領域  $D$  を占める空洞を有するものとしてその境界を  $\partial D$  で表す。ここでは、  $V_2^+$  と  $V_2^-$  が同じ材料から成る場合を考え、二つの半無限領域をまとめて  $V_2$  と記す。これは、後に示すグリーン関数の表現を簡潔にするためであり、以下に続く議論は、わずかな修正を加えれば二つの半無限領域が異なる材料から成る場合にもあてはまる。ただし、  $V_2$  の横波波速  $c_2$  は  $V_1$  の横波波速  $c_1$  よりも小さいものとしておく。この点はグリーン関数を計算するための積分路の選択に関係するため重要な部分であると言えるが、ここでは扱いがより簡単な  $c_1 > c_2$  のケースを取り上げる。しかし、  $c_2 > c_1$  の場合を考える際にも、以下で行う検討は必要であり、観測点と波源の位置関係によっては全く同じ手法が適用できる場合もある。さらに、  $c_1 > c_2$  のケースには超音波非破壊検査等において基本的なモデルである無限板も含まれており、それ自体としても重要である。以上のような媒質に対して、入射波を Fig.1 に示すように領域  $V_1$  内の点  $\mathbf{x}_s = (0, z_s)$ ,  $(0 < z_s < h)$  にある時間調和な面外方向集中線荷重  $\delta(\mathbf{x})\delta(z - z_s)\hat{e}_y$  によって与える。ただし、  $\hat{e}_y$  は  $y$  軸方向の単位ベクトルを意味する。このとき  $D$  からの散乱波動場を求める問題は二次元問題となり、面外方向変位を  $u$  として支配方程式は次のヘルムホルツ方程式で与えられる。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, \omega) + k_1^2 u(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{\mu_1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), (\mathbf{x} \in V_1) \quad (1)$$

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, \omega) + k_2^2 u(\mathbf{x}, \omega) = 0, (\mathbf{x} \in V_2) \quad (2)$$

ここに、下付き添え字の 1 や 2 は対応する媒質  $V_1$  および  $V_2$  を表す。また、  $k_i$  と  $\mu_i$  はそれぞれ横波の波数およびせん断剛性を意味し、横波波速を  $c_i$ 、角周波数を  $\omega$ 、密度を  $\rho_i$  で表せば、それらの間には次の関係がある： $k_i = \omega/c_i$ 、 $\mu_i = \rho_i c_i^2$ 。空洞境界  $\partial D$  は自由表面であり、半無限領域  $V_2$  と弾性層  $V_1$  は完全に接合されているものとする。空洞表面では表面力

$t(\mathbf{x}) \equiv \mu_i \frac{\partial u}{\partial n}$  について

$$t(\mathbf{x}) = 0, (\mathbf{x} \in \partial D) \quad (3)$$

が、界面  $B^+$ ,  $B^-$  では応力と変位の連続条件

$$\{u(\mathbf{x})\}_1 = \{u(\mathbf{x})\}_2 \quad (4)$$

$$\{t(\mathbf{x})\}_1 = \{t(\mathbf{x})\}_2 (\mathbf{x} \in B^+ \cup B^-) \quad (5)$$

が満足されなければならない。ただし、式 (4), (5) 中の添え字は、例えば  $\{u(\mathbf{x})\}_1$  などと書いた場合は媒質 1 の側からとった極限值として理解する。

ここでは、式 (2)-(5) で与えられる境界値問題をグリーン関数を用いた境界積分方程式を用いて解く。ただし、ここでいうグリーン関数  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  とは非斉次なヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + k_i^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mu_i^{-1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), (\mathbf{x} \in V_i, \mathbf{y} \in V_i) \quad (6)$$

に加えて、界面  $B^+$ ,  $B^-$  で  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  とその表面力成分  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu_i \frac{\partial G}{\partial n_x}$  が連続条件

$$\{G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}_1 = \{G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}_2, \quad (7)$$

$$\{H(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}_1 = \{H(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}_2 (\mathbf{x} \in B^+ \cup B^-) \quad (8)$$

を満たす特異解である。式 (3) の元に、  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を用いれば、次のような境界積分方程式を導くことができる。

$$\frac{1}{2} u(\mathbf{y}) + \int_{\partial D} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) dS_x = G(\mathbf{x}_s, \mathbf{y}), (\mathbf{y} \in \partial D) \quad (9)$$

式 (9) は全無限の基本解を用いた場合と異なり、積分範囲が散乱体表面の  $\partial D$  のみとなっている。そのため、境界要素法による解析において、無限境界  $B^+$  および  $B^-$  上に境界要素を配置する必要がなく、計算に必要な記憶容量を大幅に節約することができる。しかしながら、次節において示す通りグリーン関数は積分形で与えられ、その数値計算には全無限の基本解を数値的に評価する場合よりも多くの手間と計算時間が必要である。それゆえ、グリーン関数を用いる境界要素法の計算効率は、グリーン関数の計算効率にかかっており、効果的なグリーン関数の数値評価方法について検討を行っておくことが重要であると言える。そこで次節ではグリーン関数の具体的な表現を示した後、その数値計算方法について詳しく述べる。

## 3. グリーン関数の ray-mode ハイブリッド表現

グリーン関数の積分表現を得るためには、次の式で定義される  $x$  座標についてのフーリエ変換を用いる。

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-ikx) dx. \quad (10)$$

ここでは、波数空間でのグリーン関数  $\tilde{G}(z, \mathbf{y}; k)$  を求め、それを逆変換することでグリーン関数の積分表現を得る。よく知られているように、式 (6) を満足する外向波の一つは全無限の基本解  $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  に他ならず、その波数域での表現は次のように与えられる。

$$\tilde{U}(z, \mathbf{y}; k) = A \alpha^{-1} \exp(i\alpha|z - z_s|) \quad (11)$$

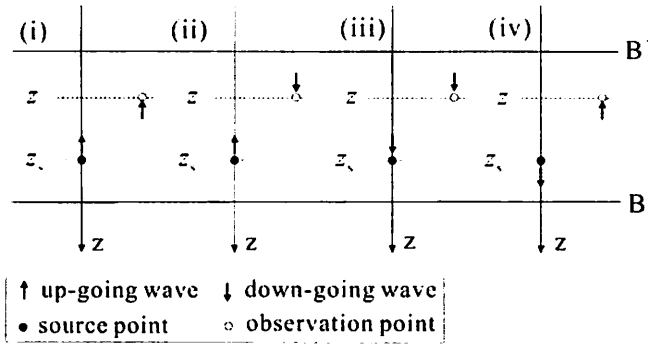


Fig. 2 Four categories of reflection waves.

ここに、 $\alpha = \sqrt{k_1^2 - k^2}$ 、 $A = i/4\pi\mu_1$  である。式 (11) は上下方向に伝播する 1 次元の平面波の表現と同一であることに注意すれば、界面  $B^+$ 、 $B^-$  からの反射波を加えることで連続条件 (7)、(8) を満足させることができ、その結果求めるべきグリーン関数を構成することができる。 $\tilde{U}$  に対して発生する界面からの反射波は入射波に平面波の反射係数をかけ、鉛直方向の伝播距離に応じて位相を調整することで簡単に求めることができる。ただし、上下の界面からの反射波は無限個存在するためそれらを全て加え合わせるには、反射波を波源と観測点位置それぞれでの伝播方向に従って Fig.2 のような 4 つのカテゴリーに分類しておく必要がある [4]。今、ある状態の平面波  $u(z) = u_0 \exp(i\alpha|z| + i\phi)$  が伝播して、上下の界面で一回ずつの反射を経て元の位置まで伝播したとする。このとき平面波は反射係数を  $R(k)$  として  $u(z) = u_0 R^2(k) \exp(i\alpha(|z| + 2h) + i\phi)$  で表され、元の状態との違いは

$$F = R^2(k) \exp(2i\alpha h) \quad (12)$$

である。伝播前の状態を表すために用いた振幅項  $u_0$  と位相  $\phi$  は Fig.2 に示したカテゴリーごとに異なるが、 $F$  はカテゴリーによらず共通である。そこで、

$$T^{(l)} = \begin{cases} R^2(k) \exp\{i\alpha(2h - z + z_s)\}, & (l = 1) \\ R(k) \exp\{i\alpha(z + z_s)\}, & (l = 2) \\ R^2(k) \exp\{i\alpha(2h + z - z_s)\}, & (l = 3) \\ R(k) \exp\{i\alpha(2h - z - z_s)\}, & (l = 4) \end{cases} \quad (13)$$

と定義しておけば、 $l$  番目のカテゴリーに属する反射波の和  $\tilde{U}^{(l)}(z, y; k)$  を次のように書くことができる。

$$\tilde{U}^{(l)}(z, y; k) = \sum_{n=0}^{\infty} ST^{(l)} F^n. \quad (14)$$

ただし、 $S = A\alpha^{-1}$  と置いた。ここで式 (14) の無限和を次のように二つの有限な部分和と剰余項の和として次のように

表す。

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{(l)}(z, y; k) &= \sum_{n=0}^{N_1-1} ST^{(l)} F^n \\ &\quad + \sum_{n=N_1}^{N_2-1} ST^{(l)} F^n + \sum_{n=N_2}^{\infty} ST^{(l)} F^n \quad (15) \\ &= \sum_{n=0}^{N_1-1} ST^{(l)} F^n \\ &\quad + ST^{(l)} \frac{F^{N_1} - F^{N_2}}{1 - F} + ST^{(l)} \frac{F^{N_2}}{1 - F} \quad (16) \end{aligned}$$

波数域でのグリーン関数は  $\tilde{G} = \tilde{U} + \sum_{l=1}^4 \tilde{U}^{(l)}$  であるから、この逆フーリエ変換をとれば  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  が得られる。

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{l=1}^4 \left[ I^{(l)}(N_1) + J^{(l)}(N_1 : N_2) + K^{(l)}(N_2) \right] \quad (17)$$

ここに、

$$I^{(l)}(N_1) = \sum_{n=0}^{N_1-1} \int_{-\infty}^{+\infty} ST^{(l)} F^n e^{ikz} dk \quad (18)$$

$$J^{(l)}(N_1 : N_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} ST^{(l)} \frac{F^{N_1} - F^{N_2}}{1 - F} e^{ikz} dk \quad (19)$$

$$K^{(l)}(N_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} ST^{(l)} \frac{F^{N_2}}{1 - F} e^{ikz} dk. \quad (20)$$

であり、 $N_1, N_2$  は  $N_2 \geq N_1 \geq 0$  なる整数を表す。ただし  $N_1 = 0$  のときは  $I^{(l)} = 0$  であると解釈する。式 (17) は Kamel によって与えられたグリーン関数の ray-mode ハイブリッド表現 [2] に第二項  $J^{(l)}$  の分だけ異なり、両者は  $N_1 = N_2$  すなわち  $J^{(l)} = 0$  の場合にだけ一致する。しかしながら、 $J^{(l)}$  に相当する項を考えて数値的に評価するというアイデアは、明確な形で示されている訳ではないが Kamel らの方法を面内波動場に拡張した文献 [4] にも見られる。そこで "ray-mode ハイブリッド表現" という名前が用いられているため、本論文でも式 (17) に同じ名称を用いることにした。ところで、"ray-mode ハイブリッド表現" という名前は  $I^{(l)}$  と  $K^{(l)}$  の和でグリーン関数が与えられ、それぞれが波線およびモードとしての意味をもつことに由来する。 $I^{(l)}$  の各積分は一般化波線積分 (generalized ray integral) と呼ばれており、その高周波域での漸近展開は波線理論によって与えられる結果と一致する [3]。一方  $K^{(l)}$  の積分は、 $(1 - F)^{-1}$  の項に起因する極からの影響と、分岐線周りの積分からの影響として評価されるが、留数定理を用いて評価される各々の極からの影響は層内を伝播するモード波としての意味をもつ。ここでは、これらの項に  $J^{(l)}$  を加えた式 (17) を利用するが、境界要素法で解くべき影響マトリクスの評価を行う際にはグリーン関数の計算を繰り返し行わなければならない。ところが、 $K^{(l)}$  の計算には、複素平面上で極の位置を探索することに加えて、分岐線周りの積分も数値的に実行する必要がある。そのため  $K^{(l)}$  の計算には  $I^{(l)}, J^{(l)}$  の計算よりも時間がかかるこ

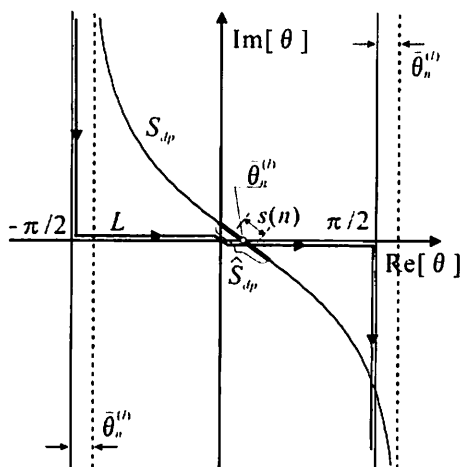


Fig. 3 Integration contours in complex  $\theta$ -plane.

とが予想され、これは境界要素法の計算効率も悪化させることにつながる。そこで、今回は  $K^{(l)}$  を無視した

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; N_2) = U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{l=1}^4 \left[ I^{(l)}(N_1) + J^{(l)}(N_1 : N_2) \right] \quad (21)$$

をグリーン関数の評価に用いることとした。当然、 $K^{(l)}$  は必ずしも無視できる適度に小さいわけではなく、この表現は厳密なものではない。しかし、 $N_2$  が十分大きく  $\hat{G}$  が数値的に収束したと見なせる場合や、時間的に遅れて観測点に到達する  $K^{(l)}$  の項の影響が及ばない比較的初期の応答が興味の対象である場合には、式 (21) を用いることができる。

### 3.1. 数値計算方法

$I^{(l)}$  は次のような波線積分  $I_n^{(l)}$  の和として表されている。

$$I_n^{(l)} = \int_{-\infty}^{+\infty} ST^{(l)} F^m \exp(ikx) dk. \quad (22)$$

ここでは  $I_n^{(l)}$  を個々に評価し、それらを加え合わせることで  $I^{(l)}$  を求める。その際、式 (22) の積分変数を  $k = k_1 \sin \theta$  によって  $\theta$  とすることでより扱い易い次の形に書くことができる [3]。

$$I_n^{(l)} = \int_L AR^m \exp \left\{ ik_1 r_n^{(l)} \cos(\theta - \bar{\theta}_n^{(l)}) \right\} d\theta \quad (23)$$

ここに、 $L$  は Fig.3 に示す複素  $\theta$  平面上の積分路を、 $m$  は反射回数を表しており、 $l = 1, 2$  の場合は  $m = 2n + 2$ 、 $l = 2, 4$  の場合は  $m = 2n + 1$  である。また、 $(r_n^{(l)}, \bar{\theta}_n^{(l)})$  は観測点の  $x$  座標と、鉛直方向の伝播距離  $z_n^{(l)}$  に対して次のような関係にある極座標成分である。

$$x = r_n^{(l)} \sin \bar{\theta}_n^{(l)}, \quad z_n^{(l)} = r_n^{(l)} \cos \bar{\theta}_n^{(l)} \quad (24)$$

$L$  に沿っての積分は  $k_1 r_n^{(l)}$  が大きい場合、被積分関数が激しく振動して数値積分が難しい。しかし、式 (23) の指数関数部に対しては最急勾配経路  $S_{dp}$  を簡単に見つけることができ、積分路を  $S_{dp}$  に変形すれば被積分関数の振動が抑えられ、収束性も非常によくなる。さらに最急勾配法 [5] を式 (23) に用

いて漸近展開すれば

$$I_n^{(l)} \sim R^m (\bar{\theta}_n^{(l)}) \frac{\exp(ik_1 r_n^{(l)} + i\pi/4)}{\sqrt{8\pi\mu_1 k_1 r_n^{(l)}}}, \quad (k_1 \rightarrow \infty). \quad (25)$$

となり、無次元化波数が  $k_1 r_n^{(l)} > 3\pi$  程度ならかなりよい近似となることが知られている。そこで、 $k_1 r_n^{(l)} > 3\pi$  においては式 (25) を用い、それ以外の場合には経路を  $S_{dp}$  にとって直接数値積分を行うことで  $I_n^{(l)}$  を求める。ただし、数値積分にあたって積分路  $S_{dp}$  の打ち切り位置は  $k_1 r_n^{(l)}$  に応じて変化させる必要がある。これは、被積分関数は積分路  $S_{dp}$  上を点  $\bar{\theta}_n^{(l)}$  から離れるにつれて減少するが、どの程度速く減少するかは  $k_1 r_n^{(l)}$  の値に依存するためである。補遺に示すように被積分関数の値が  $10^{-p}$  程度のオーダーとなる  $S_{dp}$  上の点は次の式で与えられる。

$$|\text{Im}\{\theta\}| = \cosh^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{p}{k_1 r_n^{(l)}} \log 10 + \sqrt{\left( \frac{p}{k_1 r_n^{(l)}} \log 10 \right)^2 + 4} \right) \right\} \quad (26)$$

ここでは  $p = 5$  として式 (26) により打ち切り位置を定め、その範囲でガウスの積分公式を用いて数値積分を行う。このように、積分範囲を波数によって変化させるようにしておけば、積分点の数は変化させる必要がなく、ある波数において積分点数を最適化しておけば、それ以外の波数においても同じ効果が期待できるという利点がある。

第二項の積分  $J^{(l)}(N_1 : N_2)$  に対しても、積分変数を  $\theta$  に変え、複素平面上で積分路の変更を行う。そこで  $k = k_1 \sin \theta$  と式 (24) を用いて  $J^{(l)}$  を書くと、

$$J^{(l)}(N_1 : N_2) = \int_L A \frac{j_{N_1}^{(l)}(\theta) - j_{N_2}^{(l)}(\theta)}{1 - F(k_1 \sin \theta)} d\theta. \quad (27)$$

となる。ただし、

$$j_n^{(l)}(\theta) = R^m \exp \left\{ ik_1 r_n^{(l)} \cos(\theta - \bar{\theta}_n^{(l)}) \right\} \quad (28)$$

とした。式 (19) から明らかなように、 $1 - F = 0$  のとき式 (27) の被積分関数は分母、分子ともにゼロとなるため特異性を持たない。したがって  $J^{(l)}$  についても被積分関数の鞍点 (saddle point) を見つけ、その点を通る適当な経路に積分路を変更すれば、鞍点近傍からの寄与として積分を評価できる可能性がある。被積分関数の形から、厳密な意味で鞍点や最急勾配経路を見つけることは難しいが、次のように考えることによって十分早く被積分関数が減少する経路を見つけることはできる。まず  $j_n^{(l)}(\theta)$  に着目すると、これは波線積分 (23) と同じ形をしており、実軸上の鞍点  $\theta = \bar{\theta}_n^{(l)}$  を通る最急勾配経路  $S_{dp}$  が見つけられることに気付く。その経路は  $n$  に依存するため、 $S_{dp}(n)$  と書くことにしておく。ところで  $\bar{\theta}_n^{(l)}$  は、式 (24) によって定義されているから、 $\{\bar{\theta}_n^{(l)}\}$  は  $x \neq 0$  ならば  $n$  について正の単調減少数列であることが分かる。

$$\bar{\theta}_1^{(l)} > \bar{\theta}_2^{(l)} > \dots > 0 \quad (29)$$

従って  $N_1$  が大きくなるにつれて  $\bar{\theta}_{N_1} - \bar{\theta}_{N_2} > 0$  は減少し、 $j_{N_1}^{(l)}(\theta)$ 、 $j_{N_2}^{(l)}(\theta)$  の最急勾配経路  $S_{dp}(N_1)$  と  $S_{dp}(N_2)$  は互いに接近してくる。 $J^{(l)}$  の被積分関数で変化の激しい項は  $j_{N_1}^{(l)}(\theta)$  と  $j_{N_2}^{(l)}(\theta)$  だから、これらの最急勾配経路がほぼ一致する場合には  $S_{dp}(N_1)$  と  $S_{dp}(N_2)$  のいずれかを  $J^{(l)}$  を計算するための積分路として用いることができると予想される。実際、 $N_1$  がある程度大きければ後の数値計算例でも示す通り  $S_{dp}(N_2)$  を積分路として精度のよい積分を行うことができる。ただし、 $N_1$  がどの程度大きければこのような方法が適用できるかについては試行錯誤を経て  $N_1$  の最小値を決定しなければならない。また、経路の打ち切り位置についても波線積分 (23) と同様の注意が必要である。ここでも、 $j_{N_1}^{(l)}(\theta)$  および  $j_{N_2}^{(l)}$  の値が  $10^{-5}$  程度になる  $S_{dp}(N_2)$  上の位置を式 (26) によって決定し、それぞれ  $\theta_1, \theta_2$  で表すと、 $N_2 > N_1$  だから常に

$$|\text{Im}\{\theta_1\}| > |\text{Im}\{\theta_2\}| \quad (30)$$

となる。従って  $S_{dp}(N_2)$  の打ち切り位置としては  $\theta_1$  を選ぶようにする必要がある。その位置で打ち切った積分路を  $\hat{S}_{dp}(N_2)$  と書くことにすれば、数値積分を行う範囲は  $\hat{S}_{dp}(N_2)$  で十分である。しかし、 $j_{N_2}^{(l)}$  は  $S_{dp}(N_2)$  上の  $|\text{Im}\{\theta\}| < |\text{Im}\{\theta_2\}|$  の部分でのみ大きな値をもち、 $\theta = \theta_2$  に近づくにつれて急激に減少する。この範囲を  $s(N_2)$  で表すと、 $j_{N_2}^{(l)}$  の影響を正確に評価するには  $s(N_2)$  にも密に積分点を配置しておかなければならないことがわかる。そこで、式 (27) を数値積分するときには  $\hat{S}_{dp}(N_2)$  を  $s(N_2)$  と  $\hat{S}_{dp}(N_2) \setminus s(N_2)$  の二つの部分にわけ、それぞれの区間で適当な次数のガウス積分を用いる。このようにすることで、区間  $s(N_2)$  には  $\hat{S}_{dp}(N_2) \setminus s(N_2)$  よりも密に積分点が配置されることになる。

### 3.2. 計算例

これまでに示した方法を用いてグリーン関数  $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; N_2)$  を計算した結果を示す。この計算例では、 $V_2$  の厚さ  $h = 20a$  に対して  $\mathbf{y}$  の位置を  $\mathbf{y} = (0, 10a)$  ととり、周波数は無次元化波数で  $k_1 a = 4.1$  としている。材料定数は  $Z_i = \rho_i c_i$  で定義されるインピーダンスおよび波速の比で  $Z_2/Z_1 = 0.005$ 、 $c_2/c_1 = 1.0/3.0$  と与えた。Fig.4 はその結果を示したものであり、横軸  $x$  に対して  $\sum_{l=1}^4 I^{(l)}(N_2)$  と  $\sum_{l=1}^4 I^{(l)}(N_1) + J^{(l)}(N_1 : N_2)$  を  $N_2 = 100$  として計算した結果である。これらはいずれも式 (21) より  $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; N_2) - U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  に等しくなるはずだが、前者は全てを波線積分 (23) によって計算した結果であり、後者は  $N_1$  個の波線積分と  $J^{(l)}(N_1 : N_2)$  を計算したものである。 $S_{dp}(N_2)$  を積分路として  $J^{(l)}(N_1 : N_2)$  の積分を行うためには  $N_1$  が適度に大きい、すなわち  $\bar{\theta}_{N_1}^{(l)}$  が小さくなければならないことはこれまでに述べた。ここではそのための条件として  $\bar{\theta}_{N_1}^{(l)} < \Delta\theta = \pi/20$  を用い、 $N_1$  を観測点位置  $\mathbf{x}$  毎に与えた。Fig.4 には、 $\sum_{l=1}^4 J^{(l)}(N_1 : N_2)$  の寄与がどの程度なのか明らかなように、その実部および虚部も示してある。これらの結果もあわせて Fig.4 を見れば、二種類の方法で計算した  $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; N_2) - U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  は互いによく一致していると言える。 $I^{(l)}(N_2)$  の計算において必要な波線積分 (23) は、被積分関数が積分路  $S_{dp}(n)$  上で指数関数的に減衰することが保

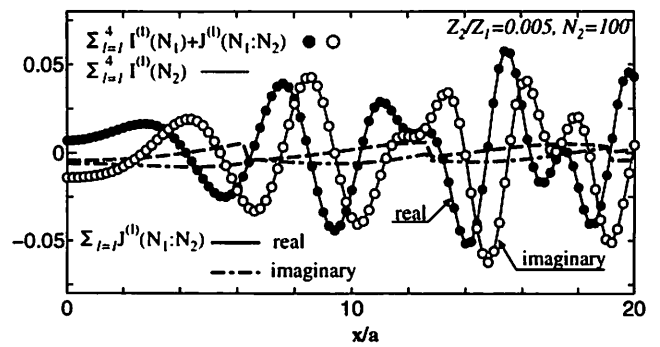


Fig. 4 Multiple reflection wave component of the Green's function  $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; N_2)$ .

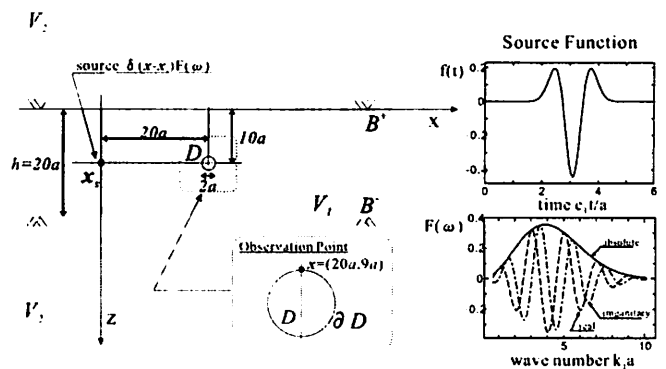


Fig. 5 Model for numerical analysis.

証されており、数値積分が容易で十分な精度が得られているものと考えられる。従って Fig.4 のように  $\sum_{l=1}^4 I^{(l)}(N_2)$  と  $\sum_{l=1}^4 I^{(l)}(N_1) + J^{(l)}(N_1 : N_2)$  がよく一致しているということは、 $J^{(l)}(N_1 : N_2)$  についてもうまく計算できているということを示している。ここでは  $N_2 = 100$  としたが同様な結果は  $N_2 = 1000$  などと  $N_2$  をかなり大きくした場合にも確認され、さらに  $N_2$  が大きい程  $\sum_{l=1}^4 I^{(l)}(N_1) + J^{(l)}(N_1 : N_2)$  を計算する方が短時間の計算で  $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; N_2) - U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を得ることができる。

### 4. 境界要素法

グリーン関数は式 (17) から明らかな通り、全無限の基本解  $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  と、多重反射成分  $\sum_{l=1}^4 U^{(l)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  の和として表される。そこで、 $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  と  $\sum_{l=1}^4 U^{(l)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を別々に計算するようにしておけば、通常の境界要素法のルーチンに加えて新たに必要なのは  $\sum_{l=1}^4 U^{(l)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を要素上で積分する部分である。しかし、 $\sum_{l=1}^4 U^{(l)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  は正則であるから積分はすべて数値的に行うことができ、プログラム開発上特に困難な点はない。そこで以下では式 (9) に基づく境界要素法によって行った数値解析例を示すことにする。

解析モデルを Fig.5 に示す。弾性層  $V_1$  は内部に円筒空洞を含むものとし、その大きさ、位置、波源  $\mathbf{x}_s$  との位置関係は Fig.5 に示す通りである。材料定数はグリーン関数の計算例の場合と同様に  $Z_2/Z_1 = 0.005$ 、 $c_2/c_1 = 1.0/3.0$  とした。これは  $V_1$  と  $V_2$  のインピーダンスに大きなコントラストが

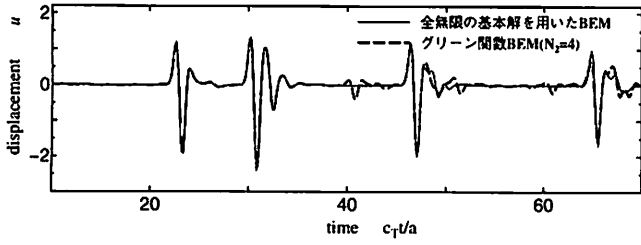


Fig. 6 Time-displacement waves forms observed at  $x = (20a, 9a)$ .

あり、入射波がもつエネルギーの大部分が  $V_1$  内にとどまるような場合である。ここでは  $B^\pm$  と  $\partial D$  の間での多重散乱効果を見るために、観測点の位置を Fig.5 に示すように、空洞境界  $\partial D$  上の  $x = (20a, 9a)$  に取る。積分方程式の離散化には一定要素を用い、円筒空洞の境界上には一波長につき八要素程度の要素を配置した。解析を行った結果は解釈が容易なように、境界要素法で計算した周波数応答を時間域へ変換し変位の時刻歴波形として示す。時間域へのフーリエ変換を行う際には、Fig.5 の右上に示したリックカー波を、波源の時間変化  $f(t)$  として用いた。なお、同図右下に示したのはそのスペクトル  $F(\omega)$  である。Fig.6 はこのようにして得られた解析結果であり、波源からの直達波が空洞に達した直後の応答を示したものである。これよりも時間的に遅れて到達する波の影響は受けなため、式 (9) に現れるグリーン関数を実際には  $N_2 = 4$  として  $\hat{G}(x, y; N_2)$  で代用している。Fig.6 には、比較のために全無限の基本解  $U(x, y)$  を積分核とした境界積分方程式を解くことによって得た結果も示してある。この場合、要素は空洞境界  $\partial D$  上にのみ配置しているが、入射波の評価には層構造の影響が反映されるように  $\hat{G}(x, x_s; N_2)$  を用いている。従って、両者の差は明らかに  $\partial D$  と  $B^\pm$  の間で起こる多重散乱の有無である。例えば、一番早い時間に現れる二つの波形の差は  $c_1 t/a = 40$  付近に見られ、これは初めに発生した散乱波が  $B^\pm$  で反射され、再び空洞におつかることによって生じた多重散乱波であることが伝播時間から確認される。

##### 5. まとめと今後の課題

本研究では、半無限領域にはさまれた弾性層を対象とし、グリーン関数を用いる定常 SH 波の境界要素法を開発した。グリーン関数の計算には以前から知られている ray-mode ハイブリッド表現を利用しているが、その具体的な方法については既往の研究であまり述べられていないため、ここではグリーン関数の数値計算方法について詳述し、その計算例を示した。ただし、モード波の影響をもっとも直接的に表現していると考えられる  $K^{(1)}$  として示した積分は利用していない。層厚が小さい場合や、遠方あるいは長時間にわたる応答を計算する時にはこの項を利用することが有利であると考えられ、この点について検討を行うことが今後の課題である。

##### 参考文献

- (1) Cho Y. and Rose L. : A bounray element solution for a mode conversion study, *J. Acoust. Soc. Am.*, **99**(1996) pp. 2097-2109.
- (2) Kamel A. H. and Felsen L. B. : Hybrid Green's function for SH motion in a low velocity layer, *Wave Motion*, **5**(1983) pp. 83-97.
- (3) Achenbach J. D., Gausten A. K. and McMaken H. : Ray Methods for Waves in Elastic Solids, (1982) Pitman, Boston.
- (4) Lu I. T. and Felsen L. B. : Ray, mode and hybrid options for time-dependent source-excited propagation in an elastic layer, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **86**(1986) pp. 177-201.
- (5) Bleistein N.: Mathematical Methods for Wave Phenomena, (1984), Academic Press.

##### A. 補遺

ここでは、

$$\exp \{f(\theta)\} = \exp \{ikr \cos(\theta - \bar{\theta})\} \quad (A1)$$

の絶対値が、複素  $\theta$  平面内の最急勾配経路  $S_{dp}$  上において、 $10^{-p}$  となる  $\theta$  を求める。最急勾配経路は

$$\text{Im} \{f(\theta) - f(\bar{\theta})\} = 0 \quad (A2)$$

すなわち

$$\cos(\text{Re}\{\theta - \bar{\theta}\}) \cosh(\text{Im}\{\theta\}) = 1 \quad (A3)$$

によって与えられる。ただし、ここでは  $\bar{\theta}$  は実軸上にあるものとしている。一方、求める  $\theta$  では

$$\exp(\text{Re}\{f(\theta)\}) = 10^{-p} \quad (A4)$$

となっているから、これに式 (A3) を用いると

$$\tanh(\text{Im}\{\theta\}) \sinh(\text{Im}\{\theta\}) = \frac{p}{kr} \log 10 \quad (A5)$$

を得る。これを  $\cosh(\text{Im}\{\theta\})$  を用いて書くと次のようになる。

$$\cosh^2(\text{Im}\{\theta\}) - \left(\frac{p}{kr} \log 10\right) \cosh(\text{Im}\{\theta\}) - 1 = 0 \quad (A6)$$

これを  $\text{Im}\{\theta\}$  について解くことにより式 (26) の結果が得られる。

$$|\text{Im}\{\theta\}| = \cosh^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{p}{kr} \log 10 + \sqrt{\left(\frac{p}{kr} \log 10\right)^2 + 4} \right) \right\} \quad (A7)$$