

時間領域境界要素法による粒子加速器におけるピルボックス加速空洞の数値解析

ANALYSIS OF PILL-BOX CAVITY OF PARTICLE ACCELERATORS
BY USING TIME DOMAIN BOUNDARY ELEMENT METHOD

川口 秀樹, 藤田 和広

Hideki KAWAGUCHI and Kazuhiro FUJITA

室蘭工業大学電気電子工学科 (〒050-8585 室蘭市水元町27-1, E-mail: kawa@mmm.muroran-it.ac.jp)

This paper presents a time domain boundary element analysis of the Pill-Box cavity of particle accelerators. Authors have been working in development of a stable scheme of the time domain boundary element methods (TDBEM) for microwave phenomena. In this paper, the TDBEM is applied to analysis of wake fields in the particle accelerators. The TDBEM is quite suitable simulation method for the particle accelerator wake field, because the electric field integral equation (EFIE) and magnetic field integral equation (MFIE), which are master equations of the TDBEM, clearly describe the wake field phenomena as a superposition of charged particle and surface charge fields. The numerical simulation results by the TDBEM are compared with that of the FDTD method which is conventional and popular in the particle accelerator science, and we can find good agreements in the wake potential calculations by the TDBEM and FDTD method.

1. はじめに

工学に現れる偏微分方程式には、楕円型、放物型、双曲型の代表的な3タイプがあり、実際、電磁現象を記述するマクスウェル方程式も時間依存の仕方に応じて、それぞれ、静電場・静磁場、渦電流場、電磁波など、上記3タイプの偏微分方程式で記述される現象に分類される。一方、偏微分方程式を対象とした数値シミュレーション手法には、代表的なものに、差分法、有限要素法、境界要素法の3タイプがあり、上記偏微分方程式の種類ごとそれぞれ定式化が提案されている。しかしながら、電磁波すなわち双曲型偏微分方程式の数値シミュレーション方法において、とりわけ時間領域解析は、きわめて数値ノイズに敏感で計算が不安定になりやすく、これまで長時間にわたって安定に計算が可能な方法は、上記で言うと差分法に分類されるFDTD法のみが実用的

に使われていた。

これに対し、著者らはこれまで、安定な時間領域境界要素法を定式化すべく、とりわけ軸対称系を対象に同手法を検討し、数百タイムステップ程度の安定性をもつコードを開発してきた。^{①-③}

本稿では、これまでに開発した上記時間領域境界要素法の妥当性を検証するため、電磁波・マイクロ波の時間領域解析の対象として数多く取り扱われてきた粒子加速器の加速空洞(図1)における航跡場の解析を例に、同解析に実績のあるFDTD法/FIT法との比較を行ったので報告する。

2. 航跡場とウェークポテンシャル

粒子加速器における航跡場(ウェーク場)とは、図1のような加速空洞を電子バンチが通過する時に発生する過渡電磁場をい

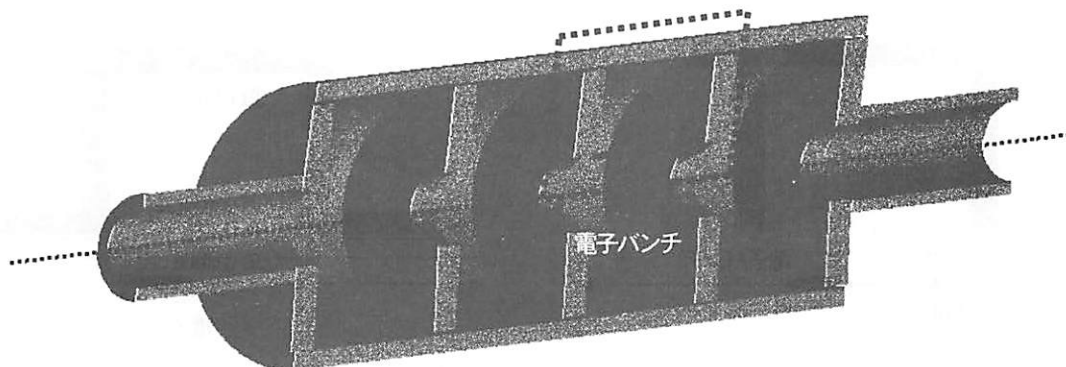


図1 粒子加速器における加速空洞ディスクロード構造

う。すなわち、加速器空洞内に送り込まれる高周波電磁場とは独立に、電子バンチはそれ自身に付随して自己場を有している。この自己場がバンチとともに移動するとき、ビームパイプなどの断面が一樣なところではなにもおこらないが、図1のようなディスクロード構造など断面に変化がある個所にさしかかると、この自己場はディスクなどのような障害物に衝突して、電磁波のように散乱され、この散乱された電磁場は電子バンチからは切り離されて独立な放射電磁場となり、電子バンチが通り過ぎた後も変動しながらのこりつづけることになる。このような電磁場を航跡場といい、その発生により、電子バンチの先頭によってつくりだされた航跡場が電子バンチの尾部に影響をあたえバンチ形状を変化したり、あるいは、後続の電子バンチに作用し軌道をずらしたりすることが知られており、加速空洞設計時にはどのような航跡場が発生するか、あるいは、航跡場が極力加速器の性能に影響しないようにするためにはどのように空洞形状を設計すべきかを検討する必要がある。

航跡場が電子バンチに及ぼす影響を定量的に評価する量としては、次式で定義されるウェークポテンシャル $W(x,y,s)$ が知られている。

$$W(x, y, s) = \frac{e}{Q} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, y, z, \frac{z+s}{|v|}) dz + \frac{e}{Q} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(x, y, z, \frac{z+s}{|v|}) dz \quad (1)$$

ただし、 \mathbf{E}, \mathbf{B} はそれぞれ航跡場の電場、磁場、 e, v は航跡場の影響を受ける仮想的な点電荷の電荷と速度、 Q は航跡場を発生させる電子バンチの総電荷量、また、 s は、電子バンチ中央から進行方向 (z 軸上正方向) 後ろ向きにとった相対的な位置をあらわす。(図2参照; 図1の点線部分の断面図) したがって、(1)の右辺第一項から、ウェークポテンシャルとは、電子バンチに同速度で追従する仮想電荷の位置 (x, y, s) において、仮想電荷が航跡場から得る(あるいは失う)エネルギー量と理解することができる。

ただし、実際のウェークポテンシャルの計算においては、(1)は z 軸に沿った $-\infty$ から $+\infty$ の線積分であり、数値解析では不可

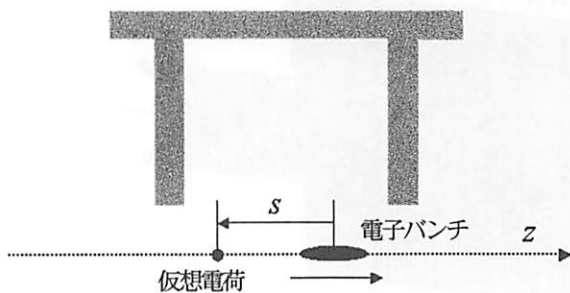


図2 ウェークポテンシャルの定義

能でありあまり向いていない。この無限区間積分を回避する方法としては、軸上の航跡場を無限区間積分するかわりに、航跡場と電子バンチの作る場を重ね合わせたトータル場を図3の①のパスに示すように軸に平行に移動したパスに沿って積分したもので代用できることが、T. Weilandによって提案され^⑤、広く用いられている。またさらに、T. Weilandの方法は、事実上図3のような加速器管のある加速器空洞の形状にしか適用できないのに対し、この公式を一般化し、図3の②のように加速空洞壁に沿って数値積分しても、同様に(1)の無限区間積分に代用できることが、O. Napollyによって示され^⑥、この公式もT. Weilandの公式と併用して用いられている。

3. マイクロ波・電磁波を対象とした時間領域境界要素法

マイクロ波や電磁波は、波動方程式で記述され、これを時間領域の境界要素法で解析する場合の定式化は、主にモーメント法という呼ばれ方でこれまでも数多く提案されている。^⑥ そのベースとなる積分方程式には、大別して、EFIE (電場型積分方程式)、MFIE (磁場型積分方程式) といわれる次の2つがある。

(EFIE)

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}_{ext.}(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\dot{\mathbf{B}}_t(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} dS' - \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} + \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] E_n(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}') dS' \quad (2)$$

(MFIE)

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B}_{ext.}(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} + \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \times \mathbf{B}_t(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}') dS' \quad (3)$$

通常の境界要素法と時間領域の境界要素法との最大の相違点は、まず、時間依存問題であるため、各時刻ごとの境界表面上での場の値はそれぞれ異なる値をとる。すなわち、各時刻での境界表面上の場の値は互いに独立な量(未知数)となることである。そしてもう一つ、電磁場の過渡現象を取り扱うこ

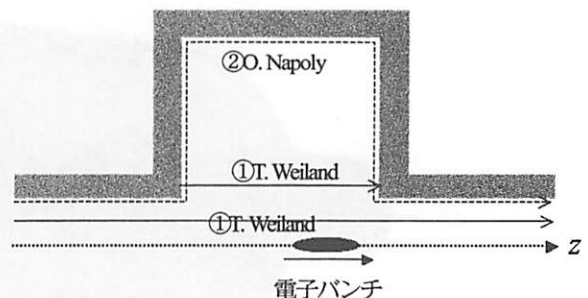


図3 ウェークポテンシャルの計算の積分パスの移動

とに起因して、遅延時間という性質が現れること、すなわち、(2)、(3)の境界積分において、積分される境界上の場の値は、その引数に表されているように、作用する点との距離に応じた分の過去の値となっていることである。

模式的にこのような状況を表したのが、たとえば、図4(上部)に示す(3)を離散化した行列方程式である。したがって、実際の時間領域の場のシミュレーションにおいては、図4の記号を用いると、

$$B_t = M_0^{-1} \left(B_{ext} - \sum_{k=1}^n M_k B_{t-k\Delta t} \right) \quad (4)$$

を逐次計算し、過去の境界値から順次時間の順序にそって次の時刻での境界値の値を求めていくスキームとなる。

また、このような航跡場の現象を対象とした場合、(2)、(3)の積分方程式は明確な物理的意味を有する。すなわち、この場合、電場の法線成分 E_n と磁場の接線成分 B_t は、それぞれ、電子パンチなどの荷電粒子によって誘起される境界上の表面電荷 σ および表面電流 K を表している。したがって、(2)、(3)の積分方程式の左辺、任意の点での電場・磁場は、その右辺、荷電粒子の自己場 (Lienard-Wiechert 場) E_{ext} 、 B_{ext} と、表面電荷・電流によって作られる場の重ねあわせとして分解できることを示している。そして、この後者の表面電荷・電流によって作られる場こそ、本研究で対象としている航跡場そのものであり、よって、時間領域の境界要素法の基礎となる(2)、(3)の積分方程式は、このような加速器の航跡場を取り扱う際、物理的意味が明確で、最も的確に現象を表現しているものであると言える。

4. MPI 並列化

図4および(4)に示すとおり、時間領域の境界要素法では、過去の境界値に行列を乗じ足し合わせた上で、現在の時刻での境

界値を計算していくスキームであるため、これらの行列のメモリへの保持にはきわめて大容量メモリが必要となる。実際、たとえば典型的なパラメータとして、1つの行列のサイズが、 $10,000 \times 10,000$ 、過去の値に乘じる行列の数 (n) を 200 とすると、このように3次元問題では比較的サイズの小さな計算ではあっても、行列の保持に必要なメモリは倍精度変数として、160 GBにも達する。実際には、単純化した軸対称問題を取り扱ったり、あるいは、行列を圧縮するなどしてメモリの削減を行うにしても、大規模な問題を取り扱うにはいずれ計算スキームの並列処理が必要となる。しかしながら、幸い時間領域境界要素法は比較的並列スキームには適していることがわかる。すなわち、解析モデルを単純化し軸対称性を仮定したり、あるいは行列のスパース性を利用して圧縮することで、ほとんどのケースでは個々の行列 M_k は、一つの計算機ノードに格納可能であって、したがって、各時間ステップ計算単位に個々の計算機ノードに行列の保持と行列の乗算の計算を分担させ、乗算の結果のベクトル値をスレーブからマスターに収集する方式とすることにより(図4参照)、計算機ノード間の通信では、一回の通信容量もその回数もきわめて少なく済み、非常に効率のよい並列処理が可能になる。よって、比較的通信速度の遅いとされるLAN結合の並列計算環境においても、相当のスケールビリティが得られることが予想される。実際、適切な処理分担が行われた場合には非常によい並列化による性能向上が得られることが報告されている。^②

5. 数値シミュレーション例

本稿では、時間領域境界要素法の数値シミュレーション応用例として、図5に示す断面を持つ軸対称な粒子加速器の加速管の形状におけるウェークポテンシャルを取り上げる。このとき、加速管のサイズは、図5に示す値とし、また、電子パンチは、半値幅 3mm で z 軸上を1次元的にガウス分布し、光速の一定速度で、図5の左側から右側に通過していくものとする。

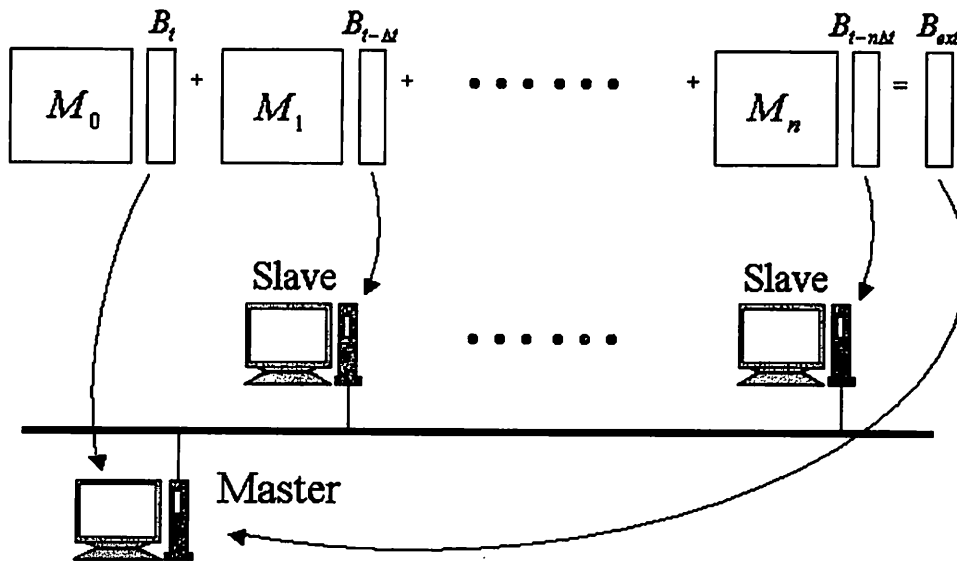


図4 時間領域境界要素方程式の行列構造とそれに適した並列処理

軸対称性からこのときの未知数は、図5断面1次元境界上(赤線部)での境界線に沿った方向の表面電流値のみとなり、比較的行列サイズは小さく、590 x 590、また、全行列数は、120 となる。図6は、一例として、図5のピルボックス型加速空洞の数値シミュレーションにおいて、境界表面に誘起された表面電流の時間発展の様子を示している。境界断面位置のA, B, C, Dの記号は、図5のそれに対応している。キャビティB-C間に取り残された電磁場のふるまいなど、比較的最長い時間ステップにもかかわらず、安定に解が求まっていることがわかる。

また、図7には、図5の形状に対するウェークポテンシャルの計算値が、この分野で実績のあるFDTD法の結果と比較して示されている。幾分の誤差はみられるものの、電子バンチへの影響を見積もるに十分な精度でウェークポテンシャルが得られていることがわかる。

6. まとめ

時間領域の境界要素法の定式化、および、粒子加速器の航跡場解析を例にその数値シミュレーションの有効性を示した。しかしながら、実際の粒子加速器の航跡場解析では、やはり3次元計算ができれば、さらに時間領域境界要素法の利点が発揮でき、このような観点から、今後は行列の効率的な圧縮方法も含め、同コードの3次元化を検討していく予定である。

謝辞

本研究の一部は、日本学術振興会 科学研究費補助金 基盤研究C (13640251) の援助のもとに行われたことを付記し謝意を表す。

参考文献

- (1) 川口秀樹, 磯田 誠, 本間利久, 軸対称系における電磁場時間依存境界要素解析, 境界要素法論文集第14巻 (1997), pp. 25-30.
- (2) H.Kawaguchi, Time Domain Analysis of Electromagnetic Wave Fields by Boundary Integral Equation Method, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.27 [4] (2003), pp.291-304.
- (3) T.Weiland: "Comment on field computation in time domain", DESY M-83-02, (1983-2)
- (4) O.Napoly, Y.H.Chin, B.Zotter: "A Generalized method for calculating wake potentials", DAPNIA/SEA/93-01, (1993-2)
- (5) B.H.Jung, Y.-S.Chung, T.K.Sharkar: "Time domain EFIE, MFIE, and CFIE formulations using Laguerre polynomials as temporal basis functions for the analysis of transient scattering from arbitrary shaped conducting structures", Progress In Electromagnetics Research, PIER 39, 1-45, (2003)

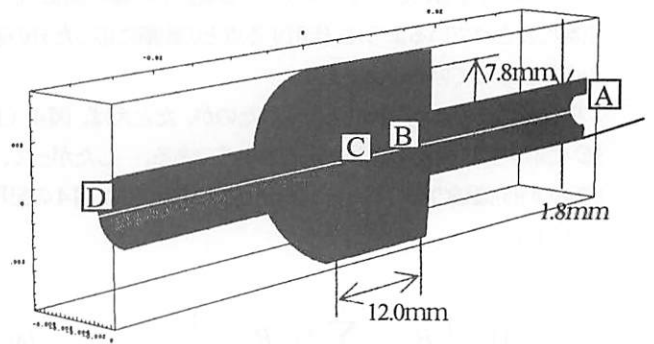


図5 粒子加速器の加速空洞の断面形状

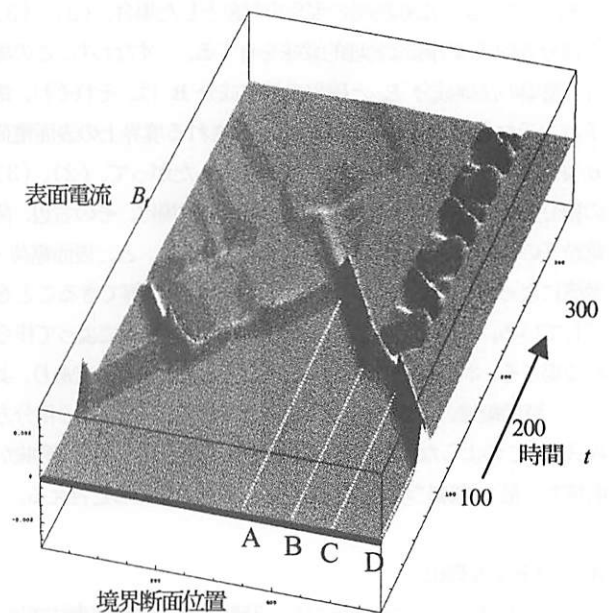


図6 加速空洞での表面電流の挙動

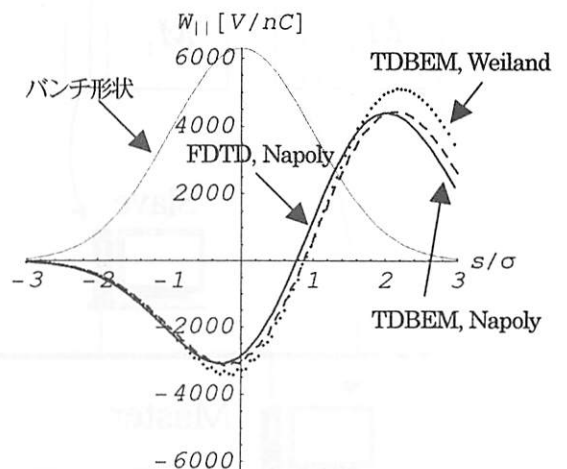


図7 加速空洞でのウェークポテンシャル