

温度依存性材料の非定常熱伝導問題に対する時間ステップ DRBEM (2次元問題の検討)

DUAL RECIPROCITY TIME-STEPPING BEM APPLIED TO THE TRANSIENT HEAT CONDUCTION PROBLEM OF TEMPERATURE-DEPENDENT MATERIALS (STUDY ON TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS)

田中 正隆¹⁾, 松本 敏郎²⁾, 高桑 晋³⁾

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO and Susumu TAKAKUWA

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: toshiro@gipwc.shinshu-u.ac.jp)
 3) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: s-takakuwa@artist.shinshu-u.ac.jp)

This paper presents a dual reciprocity boundary element method (DRBEM) applied to the transient heat conduction problem of temperature-dependent materials. The integral equation formulation employs the fundamental solution of the Laplace equation for homogeneous materials, and hence a domain integral arises in the boundary integral equation. This domain integral is transformed into boundary integrals by using a new set of radial basis functions. Furthermore, time derivative is approximated by the time-stepping method, and the domain integral also appears from this approximation. The domain integral concerning the “pseudo” initial condition at each time step is also transformed into boundary integrals via the same dual reciprocity method. The details of the proposed DRBEM are presented, and a computer code is developed for two-dimensional problems. Through comparison of the results obtained by the computer code with the result of finite difference method, the usefulness of the present DRBEM is demonstrated.

Key Words: Computational Mechanics, Time-stepping Boundary Element Method, Dual Reciprocity Method, Transient Heat Conduction, Temperature-dependent Materials

1. はじめに

熱伝導問題では普通、熱伝導率が一定と仮定し解析するが、高温状態では熱伝導率は温度に依存するので、温度依存性材料としてより正確なモデル化をしなければならない^(1,2)。温度依存性材料の非定常熱伝導問題は非線形問題であり、境界要素法を用いて解析する際は定式化に必要な厳密基本解を求めることが困難となり、均質媒体に対する基本解を用いて定式化を行わなければならない。このとき、温度依存性および初期条件に関する領域積分項が境界積分方程式の中に現れる。この領域積分項は領域内部を要素またはセルに区切ることにより計算することができるが、領域内部の要素分割には手間がかかり、境界要素法の特長が減ってしまう⁽³⁾。

本研究では、温度依存性および初期条件に由来する領域積分項に対して二重相反法 (DRM)^(4,5) を適用し、境界積分に置き換え近似的に評価する。また、ここでは時間微分を時間ステップ近似^(6,7) して積分方程式の定式化を行い、各時

間ステップごとに順次解いてゆく。この定式化において時間ステップごとに現れる見かけの初期条件に対応する領域積分も、同じ DRM により境界積分に変換して評価する。DRM を用いると、境界積分方程式の中に現れる領域積分項を比較的簡単な近似関数と線形微分作用素の特解を用いて境界積分に変換することができる。したがって、DRM を適用することにより最終的に境界のみの離散化と、領域内部に評価点を配置することだけで解析が可能となり、効率的となる。また、熱伝導率の温度依存性による非線形性は繰り返し計算により計算する。

著者らは以前に、温度依存性材料の定常熱伝導問題に対して DRM を適用し、開発した解析プログラムにより本手法の有効性を示している⁽⁸⁾。本報では、定常熱伝導問題から非定常熱伝導問題への拡張を行い、定式化の詳細と開発した解析プログラムによる解析例を示し、本手法の有効性について検討を行う。

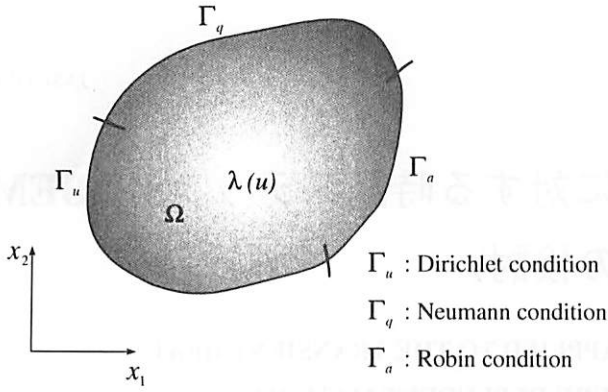


Fig.1 Heat conduction problem

2. 理論

2.1. 支配微分方程式

Fig. 1 に示されるような領域 Ω 内で、熱伝導率が温度に依存して連続的に変化する非定常熱伝導問題に対する支配微分方程式は、内部発熱がない場合、次式で与えられる。

$$\nabla\{\lambda(u)\nabla u(x,t)\} = \rho c \dot{u}(x,t) \quad (1)$$

ただし、 $u(x,t)$ は温度、 $\lambda(u)$ は熱伝導率、 ρ は密度、 c は比熱、 ∇ は微分演算子を表すものとし、上付きのドット (\cdot) は時間による微分を表すものとする。また、上式において境界条件および初期条件は次式で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \bar{u}, & x \in \Gamma_u \\ q(x,t) &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = \bar{q}, & x \in \Gamma_q \\ \lambda(u) \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} + h\{u(x,t) - u_a\} &= 0, & x \in \Gamma_a \\ u(x,0) &= u_0, \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 n は境界 Γ 上の単位外向き法線ベクトルであり、 $\partial u(x,t)/\partial n$ は $u(x,t)$ の法線方向勾配を表すものとする。また、 Γ_u 、 Γ_q 、 Γ_a はそれぞれ温度既知境界、熱流束既知境界、対流熱伝達境界である。さらに、 \bar{u} 、 \bar{q} 、 u_0 は既知の境界値および初期値であり、 h は熱伝達率、 u_a は外部雰囲気温度である。式 (1) は、次式のように均質性を表す項と温度依存性を表す項、および時間項に展開することができる。

$$\nabla^2 u(x,t) = \frac{-1}{\lambda(u)} \left\{ \nabla \lambda(u) \nabla u(x,t) - \rho c \dot{u}(x,t) \right\} \quad (3)$$

2.2. DRM の適用

境界積分方程式の導出において、本研究では近似基本解として Laplace 方程式の基本解を使用する。2次元 Laplace 方程式の基本解は次式で与えられる。

$$u^*(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (4)$$

ただし、 r はソース点 y と観測点 x との距離を表す。式 (3) の両辺に上式の基本解 $u^*(x,y)$ をかけ、考察領域 Ω 全体で積

分し、部分積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} c(y)u(y,t) + \int_{\Gamma} q^*(x,y)u(x,t)d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x,y)q(x,t)d\Gamma \\ = - \int_{\Omega} u^*(x,y) \left\{ \frac{-1}{\lambda(u)} \left(\nabla \lambda(u) \nabla u(x,t) - \rho c \dot{u}(x,t) \right) \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $c(y)$ はソース点の置かれている境界のなす角度により決まる定数である。また、 $q^*(x,y)$ は基本解 $u^*(x,y)$ の法線方向勾配を表す。

式 (5) の左辺は境界積分となっているが、右辺は領域積分のまま残る。この領域積分を評価する際、領域内部を要素またはセルに区切るにより領域積分を評価する手法が提案されているが、この作業にはたいへん手間がかかり、境界要素法の特長が半減してしまう⁽³⁾。そこで、この領域積分項を境界積分に変換するために DRM を適用する。

まず、式 (3) の右辺を次式で近似する。

$$\frac{-1}{\lambda(u)} \left\{ \nabla \lambda(u) \nabla u(x,t) - \rho c \dot{u}(x,t) \right\} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} f(x, z^{\ell}) \quad (6)$$

ただし、 N は境界節点数、 L は内部選点数、 α^{ℓ} は未知係数、 $f(x, z^{\ell})$ は近似関数、 z^{ℓ} は DRM 選点を表すものとする。ここで、次式を満たす特解を $\hat{u}(x, z^{\ell})$ とする。

$$\nabla^2 \hat{u}(x, z^{\ell}) = f(x, z^{\ell}) \quad (7)$$

この特解 $\hat{u}(x, z^{\ell})$ を用いると、式 (3) の展開された支配微分方程式は未知係数 α^{ℓ} と特解 $\hat{u}(x, z^{\ell})$ により次式のように書き表すことができる。

$$\nabla^2 u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \nabla^2 \hat{u}(x, z^{\ell}) \quad (8)$$

上式の両辺に基本解 $u^*(x,y)$ をかけ、考察領域全体で積分し部分積分することにより、次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} c(y)u(y,t) + \int_{\Gamma} q^*(x,y)u(x,t)d\Gamma \\ - \int_{\Gamma} u^*(x,y)q(x,t)d\Gamma = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \left\{ c(y)\hat{u}(y,t) \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} q^*(x,y)\hat{u}(x, z^{\ell})d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x,y)\hat{q}(x, z^{\ell})d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 $\hat{q}(x, z^{\ell})$ は特解 $\hat{u}(x, z^{\ell})$ の法線方向勾配

$$\hat{q}(x, z^{\ell}) = \frac{\partial \hat{u}(x, z^{\ell})}{\partial n} \quad (10)$$

を表す。式 (9) より、すべて境界積分に変換された境界積分方程式が得られていることが分かる。式 (9) の境界積分方程式を、 N 個の境界節点においたソース点から全ての DRM 選点に対して適用することにより、 N 個の式が得られる。また、同様に L 個の内部選点においたソース点から全ての DRM 選点に対して適用することにより、 L 個の式が得られる。これらの $N+L$ 個の式は、マトリックス形式で次式のように一つにまとめることができる。

$$Hu - Gq = [H\hat{U} - G\hat{Q}] \alpha \quad (11)$$

ここで、本研究では近似関数として観測点 x と DRM 選点 z^ℓ との距離 r^ℓ の関数を使用する。近似関数で用いられる距離 r^ℓ は基本解で用いられる r とは意味が異なるので注意が必要である。

DRM⁽⁴⁾ や MRM^(9, 10) で用いられる近似関数は多くの研究がなされており^(11, 12)、この他にも Thin Plate Spline や線形な Radial Basis Function など用いられている。距離の関数を使用することが一般的である。本研究では近似関数として次式を使用する。

$$f(x, z^\ell) = \begin{cases} (1 - r^\ell)^3(3r^\ell + 1), & 0 \leq r^\ell \leq 1 \\ 0, & r^\ell \geq 1 \end{cases} \quad (12)$$

上式は、Compactly Supported Radial Basis Function⁽⁵⁾ と呼ばれる近似関数であり、 $r^\ell = |x - z^\ell|/a$ である。 a は近似関数が影響する半径であり、全ての境界節点と内部選点に影響するように、すなわち $r^\ell \leq 1$ となるように a を定める。本研究では $a = 1$ としている。他の研究では、領域内で近似関数が影響する半径を限定することも提案されているが、本研究では領域内で半径を限定することによる考察は行わない。後に示すが、本研究の定式化では温度の座標微分を近似関数を用いて評価する手法を適用するため、近似関数の座標微分が $r^\ell = 0$ において連続となることを考慮しなければならない。

近似関数として式 (12) を使用すると、式 (7) を満たす特解 $\hat{u}(x, z^\ell)$ も距離 r^ℓ の関数となり、具体形は次式となる。

$$\hat{u}(x, z^\ell) = \frac{1}{4}(r^\ell)^2 - \frac{3}{8}(r^\ell)^4 + \frac{8}{25}(r^\ell)^5 - \frac{1}{12}(r^\ell)^6 \quad (13)$$

同様に特解の法線方向勾配 $\hat{q}(x, z^\ell)$ も r^ℓ の関数となる。

$$\hat{q}(x, z^\ell) = \left(r_1 \frac{\partial x_1}{\partial n} + r_2 \frac{\partial x_2}{\partial n} \right) \times \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(r^\ell)^2 + \frac{8}{5}(r^\ell)^3 - \frac{1}{2}(r^\ell)^4 \right\} \quad (14)$$

ただし、 r_1, r_2 は r^ℓ の x_1, x_2 方向成分を表すものとする。2 点 x, z^ℓ を決定することにより近似関数と特解 $\hat{u}(x, z^\ell)$ 、および特解の法線方向勾配を求めることができる。

2.3. 未知係数

DRM を適用し領域積分項を境界積分に変換する際、未知係数と近似関数を用いて定式化を進めてきた。ここでは、未知係数を決定するための手法を示す。

式 (6) を再記する。

$$\sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^\ell f(x, z^\ell) = \frac{-1}{\lambda(u)} \left\{ \nabla \lambda(u) \nabla u(x, t) - \rho c \dot{u}(x, t) \right\} \quad (15)$$

ここで、近似関数 $f(x, z^\ell)$ は 2 点 x と z^ℓ を決定することにより既知関数となる。この関係式が全ての境界節点と内部選点に対して成り立つと仮定すると、未知係数 α^ℓ を求めることができ、マトリックス形式で書き表すと次式となる。

$$\alpha = F^{-1} \left[K_1 u_{x_1} + K_2 u_{x_2} - K_t \dot{u} \right] \quad (16)$$

ただし、 F^{-1} は F の逆行列を表し、

$$F = \begin{bmatrix} f(x^1, z^1) & \dots & f(x^1, z^{N+L}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x^{N+L}, z^1) & \dots & f(x^{N+L}, z^{N+L}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$K_m = \left\{ \begin{array}{c} \frac{-1}{\lambda(u)} \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \frac{\partial u(x^1, t)}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{-1}{\lambda(u)} \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \frac{\partial u(x^{N+L}, t)}{\partial x_m} \end{array} \right\} \quad (18)$$

$$u_{x_m} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u(x^1, t)}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial u(x^{N+L}, t)}{\partial x_m} \end{array} \right\} \quad (19)$$

$$K_t = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\rho c}{\lambda(x^1)} \\ \vdots \\ \frac{\rho c}{\lambda(x^{N+L})} \end{array} \right\} \quad (20)$$

$$\dot{u} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u(x^1, t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial u(x^{N+L}, t)}{\partial t} \end{array} \right\} \quad (21)$$

である。ただし、 x^i は全ての境界節点と内部選点の内、 i 番目の点を表す。ここで、温度 $u(x, t)$ の座標微分を近似関数を用いて評価する。

まず、温度 $u(x, t)$ を次式で近似する。

$$u(x, t) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \beta^\ell f(x, z^\ell) \quad (22)$$

ただし、 β^ℓ は未知係数、 $f(x, z^\ell)$ は近似関数を表す。ここで上式を一回微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_m} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \beta^\ell \frac{\partial f(x, z^\ell)}{\partial x_m} \quad (23)$$

式 (22)、式 (23) が全ての境界節点と内部選点に対して成り立つと仮定すると未知係数 β^ℓ が消去でき、温度の座標微分は次式のように評価することができる。

$$u_{x_m} = F_{x_m} F^{-1} u \quad (24)$$

ただし、

$$F_{x_m} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f(x^1, z^1)}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial f(x^1, z^{N+L})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x^{N+L}, z^1)}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial f(x^{N+L}, z^{N+L})}{\partial x_m} \end{array} \right] \quad (25)$$

である。この近似関数の微分は式 (12) の近似関数を使用するとき具体的に次式となる。

$$\frac{\partial f(x, z^\ell)}{\partial x_m} = \frac{r_m^\ell}{r^\ell} \left\{ -12r^\ell + 24(r^\ell)^2 - 12(r^\ell)^3 \right\} \quad (26)$$

同様に K_m の中の温度の座標微分も近似関数を用いて評価することができる。

$$K_m = J F_{x_m} F^{-1} u \quad (27)$$

ただし、

$$J = \begin{Bmatrix} \frac{-1}{\lambda(u)} \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{-1}{\lambda(u)} \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

である。

また、温度 $u(x, t)$ の時間微分に関しては差分近似を適用する。このとき、初回の計算においては後退差分近似、2回目以降の計算においては二次曲線差分近似を適用するものとする。このとき、初回の計算における近似式は次式となる。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{u(x, t) - u(x, t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (29)$$

ただし、 Δt はタイムステップ幅、 $u(x, t - \Delta t)$ は1ステップ前の温度を表すものとする。また、2回目以降の差分近似に次式を適用する。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{3u(x, t) - 4u(x, t - \Delta t) + u(x, t - 2\Delta t)}{2\Delta t} \quad (30)$$

ただし、 $u(x, t - \Delta t)$ は1ステップ前の温度、 $u(x, t - 2\Delta t)$ は2ステップ前の温度を表すものとする。1ステップまたは2ステップ前の各点における温度を見かけの初期条件として計算を進める。

したがって、未知係数 α^l は次式のようにまとめて書き表すことができる。

$$\alpha = F^{-1} \left\{ (K_1 F_{x_1} + K_2 F_{x_2}) F^{-1} - K_p \right\} u - F^{-1} t_0 \quad (31)$$

ただし、 K_p は現在求めている温度 $u(x, t)$ の差分近似に関する係数、 t_0 は初期条件、又は見かけの初期条件に関する既知ベクトルを表す。この未知係数 α を離散化された式(11)へ代入し整理すると、次に示す線形の式を得る。

$$Hu - Gq = [H\hat{U} - G\hat{Q}] [Ru - T_0] \quad (32)$$

ただし、

$$R = F^{-1} \left[\left\{ (K_1 F_{x_1} + K_2 F_{x_2}) F^{-1} - K_p \right\} \right] \quad (33)$$

$$T_0 = F^{-1} t_0 \quad (34)$$

とする。ここで、 R と T_0 は未知温度を含んでいるため繰り返し計算により計算する。まず、1ステップ前の温度を仮定する温度として R と T_0 を計算し、それより式(32)を計算する。その結果得られた温度を新たに仮定する温度とし、同様の計算を行う。仮定した温度と得られた温度が十分近い値になるまで、この計算を繰り返す。

以上の理論により、各タイムステップにおける境界上の未知量と領域内部の未知温度を求めることができる。

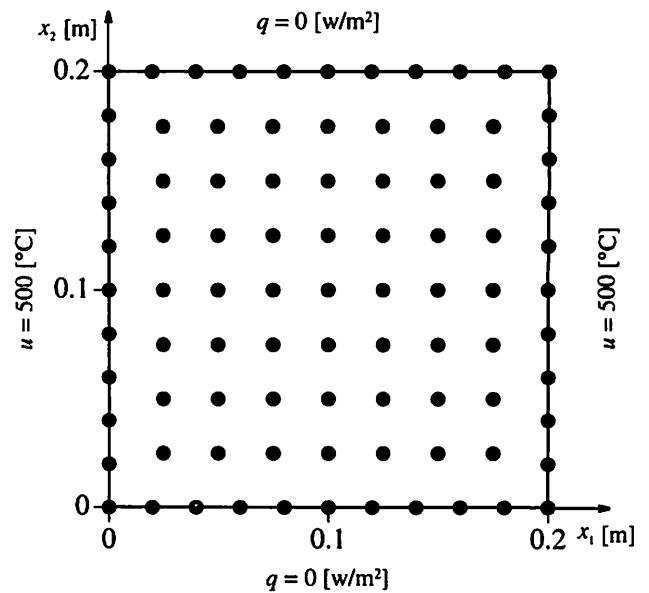


Fig. 2 Analysis model and discretization

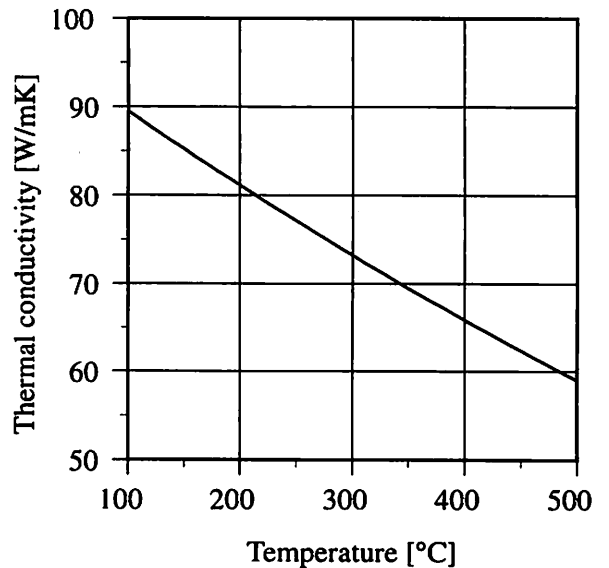


Fig. 3 Distribution of thermal conductivity

3. 数値解析例

3.1. 解析例 1

Fig. 2 に示す正方形モデルを用いて数値解析を行う。境界節点を 40、境界を 2 次要素を用いて 20 要素に分割する。内部選点は 49、図示のように配置する。境界条件は、 $x_1 = 0, 0.2$ で温度 $u = 500$ [°C]、 $x_2 = 0, 0.2$ で断熱境界条件 $q = 0$ [W/m] を与えるものとする。また、初期温度は領域全体に一様に 100 [°C] として与える。密度 $\rho = 7870$ [kg/m³]、比熱 $c = 442$ [J/kgK] とし、熱伝導率が次式で変化すると仮定する⁽¹⁾。

$$\lambda(u) = 98.43 - 0.09155u + 0.2554 \times 10^{-4} u^2 \quad (35)$$

その変化を Fig. 3 に示す。

比較対象として、 x_1 方向のみを考えた 1 次元の差分法を用いた。このとき、温度の座標微分の評価に次の差分式を使

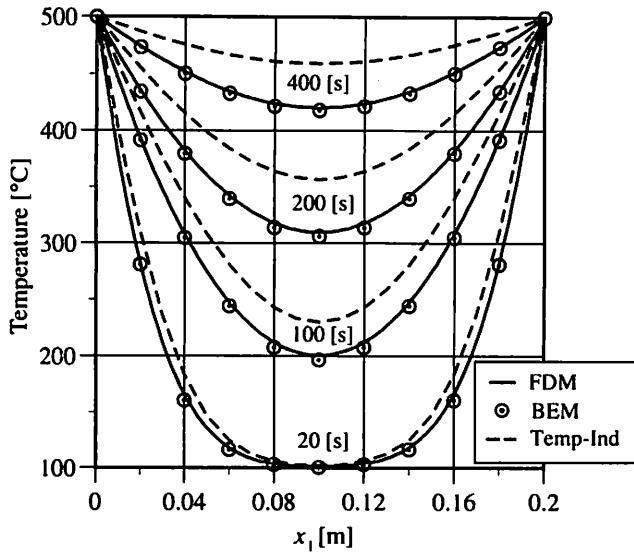


Fig.4 Temperature distribution along axis x_1

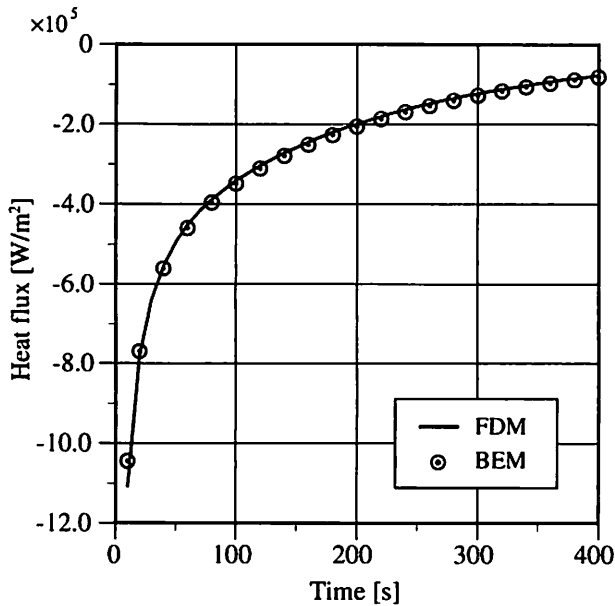


Fig.5 Heat flux variation on $x_1 = 0.2$

用した.

$$u_i' = \frac{-u_{i-1} + u_{i+1}}{2h} \quad (36)$$

$$u_i'' = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \quad (37)$$

ここで、 i は節点番号、 h は節点間距離である。また、温度の時間微分にはBEMと同様に初回には後退差分近似、それ以降には2次曲線差分近似を適用した。熱伝導率の温度依存性による非線形性は繰り返し計算により計算する。

タイムステップ幅を本手法、差分法ともに1秒として解析を行った。どちらの解法も1秒より小さくしてもこれ以上計算結果に影響しないことを確認している。

Fig.4に、 x_1 軸上における温度分布の解析結果を差分法と比較して示す。また図中の破線は、熱伝導率が温度に依存せず初期状態から一定とした場合の厳密解である。2つの解法による解には僅かに差が見られるがほぼ一致しており、温度

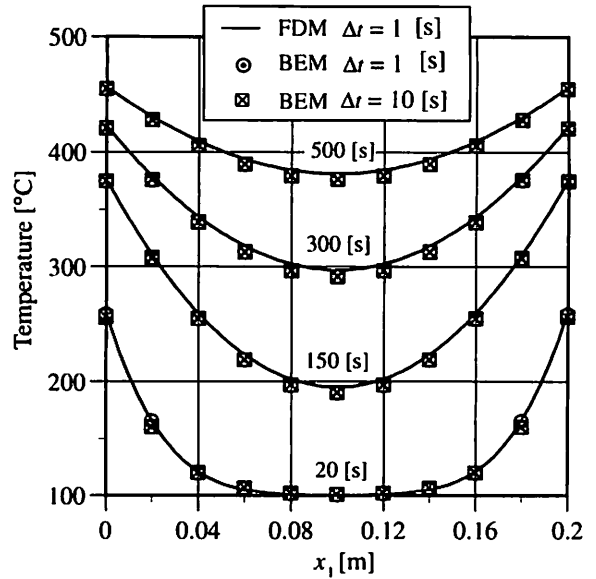


Fig.6 Temperature distribution along axis x_1

依存性の影響の度合いが顕著に現れている。

Fig.5に、 $x_1 = 0.2$ における熱流束の変化を差分法と比較して示す。2つの解法による解は、ほぼ一致していると言える。 $x_1 = 0$ においても、同様の結果が得られた。

3.2. 解析例2

Fig.2に示すモデルを用いて、解析例1とは異なる境界条件にて数値解析を行う。境界条件は、 $x_1 = 0, 0.2$ において外部雰囲気温度 $u_a = 500$ [°C]、熱伝達率 $h = 2000$ [W/m²K]の対流熱伝達境界条件、 $x_2 = 0, 0.2$ においては断熱境界条件 $q = 0$ [W/m²]を与えるものとする。初期条件、材料定数は解析例1と同様とする。また、比較対象として、 x_1 方向のみを考えた1次元の差分法を用いた。

タイムステップ幅を差分法は1秒、本手法は1秒と10秒の2種類について解析を行った。

Fig.6に x_1 軸上における温度分布を差分法と比較して示す。2つの解法による解析結果には僅かに差が見られるが、ほぼ一致していることがわかる。タイムステップ幅1秒と10秒のそれぞれの結果が20秒後では僅かに差が見られるが、150秒以降においては完全に一致している。このことから、タイムステップごとの計算をある程度繰り返すことにより、計算精度が向上してくると考えられる。

Fig.7に $x_1 = 0.2$ における熱流束の変化を差分法と比較して示す。2つの解法による解析結果はほぼ一致していることがわかる。タイムステップ幅1秒と10秒のそれぞれの結果は早い時間帯では差が見られるが、40秒以降においては完全に一致している。温度の解析結果と同様に、熱流束においてもタイムステップごとの計算をある程度繰り返すことにより、計算精度が向上してくると考えられる。

4. おわりに

本研究では、温度依存性材料の非定常熱伝導問題に対する時間ステップ境界要素法へ二重相反法を適用し、2次元問題

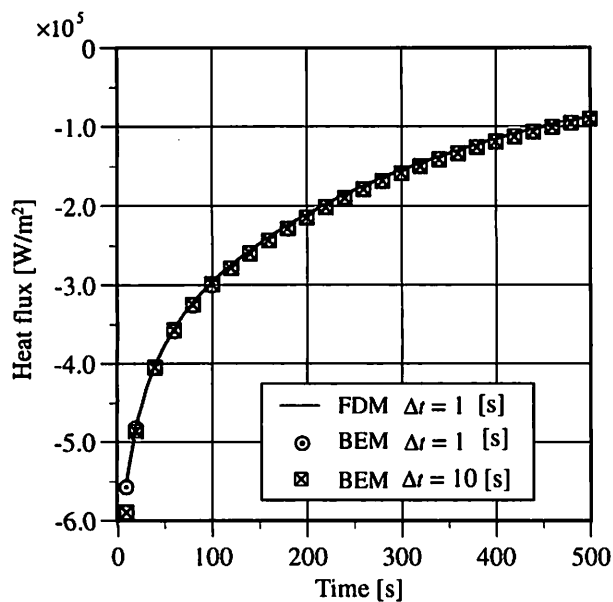


Fig.7 Heat flux variation on $x_1 = 0.2$

について定式化の詳細を示した。開発した解析プログラムにより本手法の有効性を検討した。2つの例題解析から、温度依存性の影響が大きな問題に対して本手法が有効であることが確認できた。また、タイムステップ幅の大きさによる計算精度の影響について確認した。タイムステップごとの計算をある程度繰り返すことにより、計算精度が向上してくることがわかる。

本解法の3次元問題への拡張が容易である。今後は3次元問題への適用と、近似関数のサポート半径による解析精度への影響と、計算のさらなる効率化について研究する予定である。

参考文献

(1) 竹内洋一郎：熱応力，日新出版，(1989)。

(2) S. J. Liao, A. T. Chwang : General Boundary Element Method for Unsteady Nonlinear Heat Transfer Problems, *Numerical Heat Transfer, Part B*, **35** (1999), pp. 225–242.

(3) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行：境界要素法，培風館，(1991)。

(4) P. W. Partridge, C. A. Brebbia, and L. C. Wrobel : The Dual Reciprocity Boundary Element Method, *Computational Mechanics Publications*, (1992).

(5) C. S. Chen, C. A. Brebbia, and H. Power : Dual Reciprocity Method Using Compactly Supported Radial Basis Functions, *Commun. Numer. Meth. Engng.* **15** (1999), pp. 225–242.

(6) 田中正隆, 松本敏郎, 楊慶峰：時間ステップ近似スキームに基づく2次元非定常熱伝導方程式の境界要素法解析，*シミュレーション*，**11-4** (1992)，pp.294–301。

(7) 田中正隆, 松本敏郎, 楊慶峰：直交異方性体の非定常熱伝導問題に対する時間ステップ境界要素法，*日本機械学会論文集 (A 編)*，**59-559** (1993)，pp.856–862。

(8) 田中正隆, 松本敏郎, 須田裕輔：温度依存性材料の定常熱伝導問題へのDRBEMの適用，*境界要素法論文集*，**Vol. 18** (2001)，pp.1–6。

(9) A. J. Nowak, A. C. Neves : The Multiple Reciprocity Boundary Element Method, (1994), *Computational Mechanics Publications*.

(10) 落合芳博：改良された多重相反境界要素法による二次元非定常熱伝導解析，*日本機械学会論文集 (B 編)*，**62-600** (1996)，pp.217–222。

(11) P. W. Partridge : Towards Criteria for Selecting Approximation Functions in the Dual Reciprocity Method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **24** (2000), pp. 519–529.

(12) M. A. Golberg, C. S. Chen, and H. Bowman : Some Recent Results and Proposals for the use of Radial Basis Functions in the BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **23** (1999), pp. 285–296.