

## 境界要素法を用いた薄板構造の電場解析

Electric field analysis of thin structure by boundary element method

阿部 馨督<sup>1)</sup>, 天谷 賢治<sup>2)</sup>, 青木 繁<sup>3)</sup>

Kenji AMAYA and Keisuke ABE

- 1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: kabe@a.mei.titech.ac.jp)  
 2) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: kamaya@a.mei.titech.ac.jp)  
 3) 東洋大学コンピュータシヨナル情報工学科 (〒 350-8585 川崎市鯨井 2100, E-mail: saoki@eng.toyo.ac.jp)

A new boundary element method for analyzing the potential field including thin plates is developed. It is known that the inaccurate solutions are encountered with the standard BEM for this potential problem. In case each source point on foreside and backside of the thin plate is close, the boundary integral equations for these sources are almost dependent on each other. This is because the fundamental solution distributions for each source are almost the same. In order to overcome this problem, the special weighting function whose form is not symmetric instead of the standard fundamental solution in the BEM is proposed. The weighting function for 2D potential problem is derived. A few problems are solved with this method to demonstrate its applicability and usefulness.

**Key Words:** BEM, Fundamental Solution, Weighting Function, Thin Structure

## 1. はじめに

めっき技術や防食技術は古くから存在し、社会の様々な所で利用されて来た。めっき解析や金属の腐食解析は近年でもその有用性および重要性は高い。腐食分野ではタンカー、また、めっき分野では管楽器や放熱フィンのように薄板構造をもつ場合が良く見られる。

一般に、境界要素法(BEM)は汎用・効率的な数値解析法として広く利用されている。しかし、領域内に著しく薄い板状構造物を含む解析にBEMを適用すると精度低下を生じることが知られている。(1)

薄板構造物を含むポテンシャル場に対して通常のBEM解析を行う場合、領域を一領域として扱う手法で解析すると、係数マトリクスが悪条件となるばかりではなく解が得られない場合がある。そのため、Regular BEMや超特異積分積分方程式を利用する方法が提案されているが、解が不安定であったり、数値的な取扱いが難しいという問題があった。一方で、領域を幾つかの部分領域に分割して解析する手法が提案されている。(2)(3)しかし、薄板構造物が多数存在する場合に領域分割法を利用すると、領域を多数に分割する必要があったり、解の誤差が増大するといった問題があった。

本研究では、薄板構造物を含むポテンシャル場に対して特別な重み関数を基本解の代わりに境界要素解析に適用する事で、精度の良い解を得るための方法を提案する。具体的に、2次元問題に対しての特別な重み関数を導出する。本手法を

用いた2次元電場解析を行い、その有効性を示す。

## 2. 通常の境界要素法

## 2.1. 支配方程式と境界条件

静電界、静磁界、定常熱伝導問題などの多くの物理現象はラプラス方程式やポアソン方程式を支配方程式とするポテンシャル問題として扱うことができる。本研究では次のような一般的なポテンシャル境界値問題を枠組とする。図1のように滑らかな境界 $\Gamma$ をもつ領域 $\Omega$ 内で、ポテンシャル $\phi$ はラプラス方程式を満たすとす。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

式(1)の支配方程式の境界条件は次の式(2)~(4)のいずれかで与えられるとする。

$$\phi = \phi_0 \quad (2)$$

$$i(\equiv \frac{\partial \phi}{\partial n}) = i_0 \quad (3)$$

$$\phi = -f(i) \quad (4)$$

ただし、 $\partial/\partial n$ は外向き法線方向の微分である。

## 2.2. 通常の境界要素方程式の定式化

基本解 $\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を用いると、式(1)に対する境界要素法の基礎式は次式のように表せる。

$$c(\mathbf{y})\phi(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} [\phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})i(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})i^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})] d\Gamma \quad (5)$$

ここで、 $x, y$  は領域内の点、 $c(y)$  はソース点  $y$  が置かれている境界のなす角度によって決まる定数である。基本解  $\phi^*$  は次の微分方程式を満たす。

$$\nabla^2 \phi^*(x, y) + \delta(x - y) = 0 \quad (6)$$

ただし、 $\delta(x - y)$  は Dirac のデルタ関数である。2次元ラプラス方程式に対して、通常用いられている基本解は

$$\phi^*(r) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (7)$$

である。ここで  $r$  はソース点と積分点の距離を表す。式 (5) を離散化すると次式が得られる。

$$[H]\{\phi\} - [G]\{i\} = \{0\} \quad (8)$$

式 (8) に境界条件を代入して、未知成分に関する連立一次方程式に整理し直すと次式が得られる。

$$[A]\{q\} = \{b\} \quad (9)$$

ここで、 $[A]$  は未知成分に関連する要素からなるマトリクス、 $\{q\}$  は未知境界値、 $\{b\}$  は既知境界から定まるベクトルである。

### 2.3. 通常の境界要素法の問題点

図 2 に示すように薄板構造部に基本解のソース点がある場合、薄板上に置かれたソース点 A と下に置かれたソース点 B の間の距離が非常に近くなる。通常の境界要素法の基本解

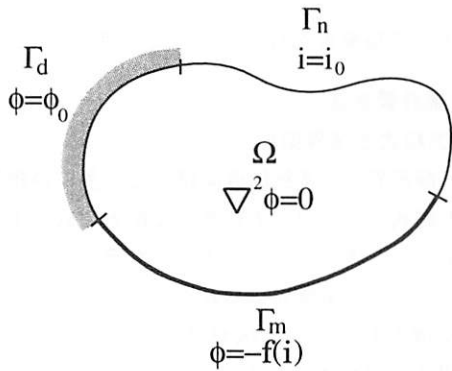


Fig. 1 Governing equation and boundary conditions

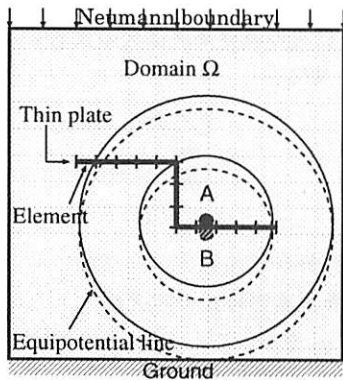


Fig. 2 Fundamental Solution Image

はソース点を中心に点対称な分布をもつため、点 A および点 B をソース点とする基本解  $\phi^*$  のポテンシャル分布は同じような分布となる。板厚を 0 に近づけていくと、両者のポテンシャル分布は一致する。したがって、通常的基本解を重み関数として用いると、境界積分方程式 (5) の独立性が失われる。代数方程式 (10) においては、マトリクス  $[H]$ 、 $[G]$  に同じような値をもつ行 ( $h_{A,i} \simeq h_{B,i}$ ,  $g_{A,i} \simeq g_{B,i}$ ;  $i = 1 \cdots n$ ) が現れる。マトリクスの条件数が悪くなるので解の精度が悪くなるばかりでなく解が得られない場合がある。

$$\begin{bmatrix} h_{1,1} & \cdots & \cdots & h_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{A,1} & \cdots & \cdots & h_{A,n} \\ h_{B,1} & \cdots & \cdots & h_{B,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} g_{1,1} & \cdots & \cdots & g_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{A,1} & \cdots & \cdots & g_{A,n} \\ g_{B,1} & \cdots & \cdots & g_{B,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ i_n \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (10)$$

### 3. 2次元 Laplace 方程式の特別な重み関数の提案

#### 3.1. 特別な重み関数

基本解に対する境界条件は対象とする問題とは無関係に定める事ができる。(4) マトリクス方程式 (10) の式の独立性を保つためには、点対称なポテンシャル分布をもつ通常的基本解に代えて非点対称な関数を利用すれば良い。本研究で

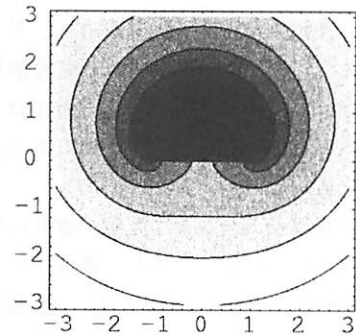


Fig. 3 Potential distribution of special weighting function

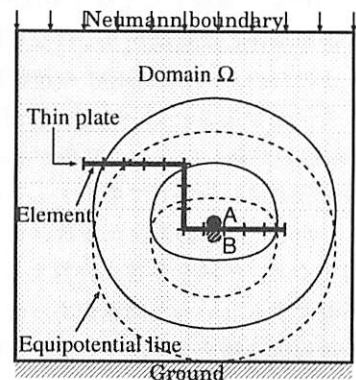


Fig. 4 Special Weighting Function Image

は、絶縁薄板上にソース点を置いたときに、通常の基本解に代えて次式で表される特別な重み関数を利用する。

$$\phi^*(z) = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left\{ \ln \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{(z + \sqrt{z^2 - a^2} - ai)^2} \right\} \quad (11)$$

ただし、 $z = |x| + yi$  とする。このとき  $a$  は任意のパラメータである。式 (11) は、有限長さ  $2a$  の仮想絶縁板の片面上の一点で湧出しがあるときのポテンシャル分布を表す式である。式 (11) は仮想絶縁板の片面は特異点があるが、反対の面はポテンシャル値が低くなるので、通常の基本解の代わりに利用すると近特異性を抑える事ができる。そこで、 $a$  の長さは近特異性が生じない程度の長さによれば良い。図 3 は、 $a = 1$  のときの式 (11) の等ポテンシャル線を示している。

### 3.2. 特別な重み関数の利点

図 4 に示すような薄板構造部に基本解のソース点がある場合、薄板上に置かれたソース点 A と下に置かれたソース点 B の間の距離が非常に近くなる。提案する特別な重み関数式 (11) は図 3 に示すように上下非対称な分布をもつため、点 A および点 B を中心とする重み関数  $\phi^*$  のポテンシャル分布は異なる。板厚を 0 に近づけたとしても、両者のポテンシャル分布は異なる。この関数を重み関数として用いると、境界積分方程式が独立となる。代数方程式式 (10) においては、マトリクス  $[H]$ 、 $[G]$  に同じような値をもつ行が現れないので、方程式の独立性が保たれて解を得ることができる。

本手法は、ソース点を薄板上に置いたときにだけ、通常の基本解に代えて特別な重み関数式 (11) を適用すれば良いので、プログラムを大幅に変更する必要が無い。

### 3.3. 係数マトリクス成分の計算法

境界要素法の係数マトリクス成分は、基本解を境界要素上で積分することで計算する。通常的基本解は解析的に積分できるが、提案する重み関数は解析的な積分が困難である。数値的に積分すると、特異点周りの積分に誤差が生じる。そこで、式 (11) を式 (12) のように変形し、この式を積分することを考える。すなわち、式 (11) から通常的基本解を引いた特異性の無い下線部を数値的に積分し、これに通常的基本解を解析的に積分した値を加算する。

$$\phi^*(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left\{ \ln \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{(z + \sqrt{z^2 - a^2} - ai)^2} \right\} - \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (12)$$

図 5 は  $a = 0.5$  のときの  $y = +0$  上における式 (12) の下線部の値を示している。 $x = 0$  において、特異性がないことがわかる。

## 4. 本手法の検証と解析例

### 4.1. 通常の単一領域法との比較

薄板問題に対して、本手法と通常境界要素法で得られる解の精度を条件数で評価する。条件数  $Cond$  は次式で与えられる。

$$Cond = \lambda_{max} / \lambda_{min} \quad (13)$$

ここで、 $\lambda_{max}$ 、 $\lambda_{min}$  はそれぞれ式 (9) における係数マトリクス  $[A]$  の最大固有値及び最小固有値である。条件数は式 (9) のベクトル  $\{b\}$  の相対誤差の最大拡大率を表す。条件数が小さい程、解の誤差は小さい。(4)

図 6 に示すような解析モデルを、通常境界要素法と本手法で解析した場合の条件数を求める。上辺から電流密度分布  $1[\text{mA}/\text{cm}^2]$  で電流を流し、下辺を接地した。領域中には高さ  $h[\text{cm}]$  の絶縁板を接地した。1要素の長さは  $1[\text{cm}]$ 、式 (11) のパラメータ  $a$  は  $0.5$  とした。板厚  $h$  に対する、係数マトリクス  $[A]$  の条件数を図 7 に示した。通常用いられている境界要素法は、板厚が薄くなるにつれて、条件数が悪く

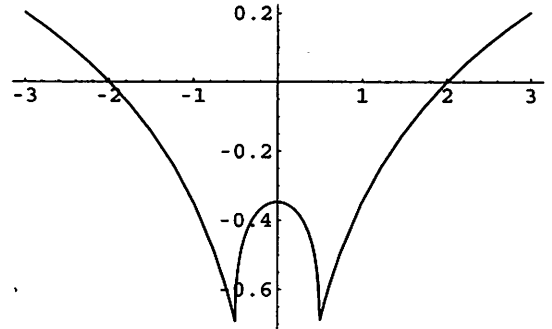


Fig. 5 Potential distribution on x-axis

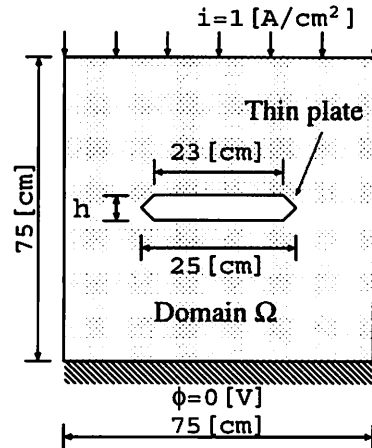


Fig. 6 Two-dimensional problem, h:Height

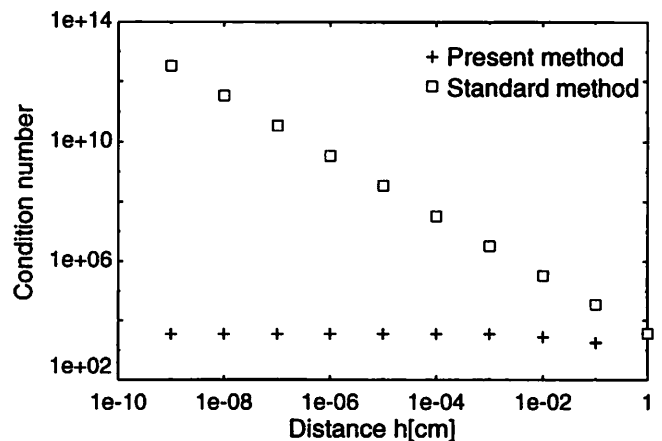


Fig. 7 Comparison of condition number

なる。一方、本手法は、板厚が薄くなった場合でも条件数は上昇しない。したがって、本手法は薄板問題に対して精度の良い解析を行なえることが分かる。

#### 4.2. 領域分割法との比較

本手法の有効性を検証するため、簡単な例題を用いて領域分割法との比較を行う。図8に示すように、領域内に1枚の接地された薄板があり、領域の両端から電流を加える閉領域問題を考える。薄板の厚みを0とするため、通常の単一領域法では解析ができない。1要素の長さは1[cm]、式(11)のパラメータ $\alpha$ は0.5とした。

本手法と領域分割法で求めた薄板面上の電流密度分布を図9に示す。本手法を用いて、精度良く解析できる事がわかる。

#### 4.3. 薄板構造の電場解析の例

図10に示すように、絶縁された複数の薄板がある溶液に電場をかけるをする例題を本手法を用いて解析する。本例題を領域分割法で解析する場合、解析領域を複数の領域に分割しなければならない。

一辺100[cm]の正方領域内に、4枚の絶縁板があり、上辺からは1[mA/cm<sup>2</sup>]の電流を流入させ、下辺は接地する。1要素の長さは1[cm]、式(11)のパラメータ $\alpha$ は0.5とした。

解析した絶縁板(a)上の電位分布を図11に示す。板の上側の電位が下側に比べて高く、合理的な結果が得られている。

#### 5. 結言

本論文では、薄板構造の電場解析を対象として、特別な重み関数を利用した境界要素解析手法を開発し、薄板構造が複数含まれるポテンシャル問題に対して数値シミュレーションを行った。仮想的に有限長の絶縁壁の片面中央部一点に湧出しがある場合のポテンシャルを表す重み関数を導出した。薄板構造が含まれる問題に対して本手法を適用し、領域を複数に分割せずに精度の良い解析が行なえる事を確認した。

本手法は、薄板部にソース点を置いたときのみ、通常の基本解の代わりに特別な重み関数を用いるため、通常の本BEMプログラムを大幅に変更する必要が無い。本研究では2次元問題を対象としたが、今後は3次元問題への拡張を行う。

#### 参考文献

- (1) 結城良治, 曹国強: 細長い物体のBEM解析の高精度化, 境界要素法論文集, 7(1990), pp. 53-58.
- (2) 宮坂松甫, 橋本和宏他2: 境界要素法によるガルバニック腐食問題の解析, 材料, 38-432(1991), pp. 1079-1084.
- (3) C. A. Brebbia and S. Walker, 神谷紀生, 田中正隆, 田中喜久昭訳: 境界要素法の基礎と応用(1981), 培風館.
- (4) 河村庄造, 伊吹竜大他1: 境界要素法を用いた境界値逆問題解析における適切な基本解の選択に関する研究, 日本機械学会論文集, 64-628(1998), pp. 2920-2924.
- (5) 今井 功: 流体力学(前編), (2001), 裳華房.

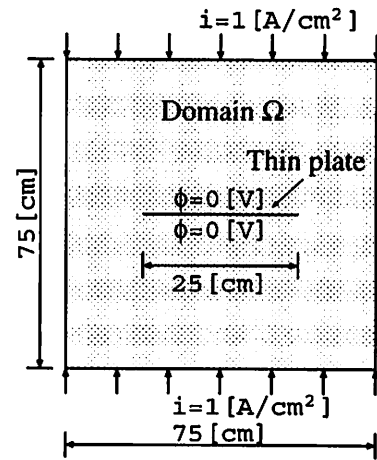


Fig. 8 Analyzed model

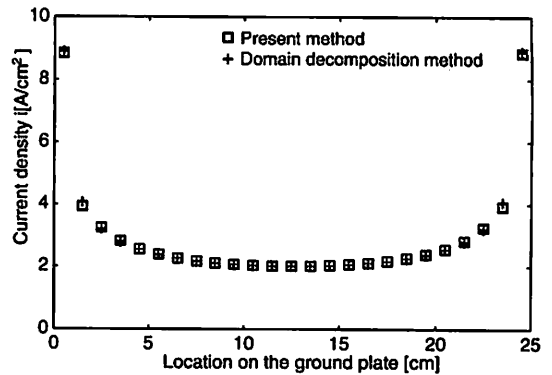


Fig. 9 Current density distributions on the ground plate

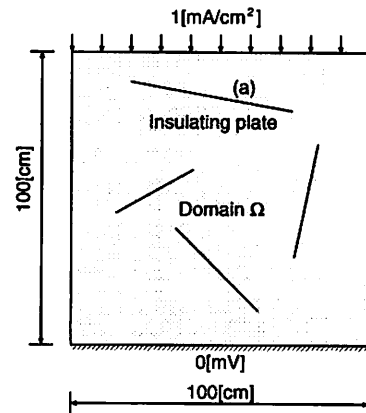


Fig. 10 Analyzed model

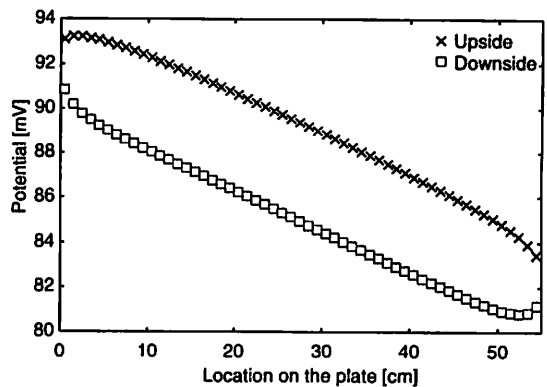


Fig. 11 Potential distributions on the thin plate