境界要素法論文集 Vol. 20 (2003 年 12 月), 論文 No. 09-031002 JASCOME

破壊現象に適した新しい数値解析手法の提案

PROPOSAL OF NEW NUMERICAL METHOD OF ANALYZING FRACTURE PHENOMENA

堀宗朗[1)], 小国健二[2)]

Muneo HORI and Kenji OGUNI

1) 東京大学地震研究所 (〒 113-0032 文京区弥生 1-1-1, E-mail: hori@eri.u-tokyo.ac.jp)

2) 東京大学地震研究所 (〒 113-0032 文京区弥生 1-1-1, E-mail: oguni@eri.u-tokyo.ac.jp)

The effect of material heterogeneity on failure problems is not negligible since it influences the local crack paths. This is different from the deformation in which displacement does not strongly depend on the local heterogeneity. The authors are proposing a new analysis method, called FEM-β, to analyze failure problems such that the heterogeneity effects can be accounted for. FEM-β solves a variational problem of continuum, although physical fields are discretized in terms of a set of non-overlapping characteristic functions. Thus, it can easily compute growing cracks as displacement discontinuity. The formulation and the accuracy of FEM-β are briefly presented in this paper.

Key Words : analysis of failure problem, conjugate discretization, Finite Element Method, Discrete Element Method

1. はじめに

通常，構造物の変形現象の解析には均一な連続体がモデルとして用いられる．実際の構造物は必ずしも均一ではないが，変位や荷重に及ぼす影響は小さいため，均一性が仮定される．実際，均一性を仮定しても概ね妥当な再現・予測を与えることは経験的事実である．しかし，破壊現象に対しては，非均一性が与える影響は無視することができない．亀裂の進展経路は局所的な非均一性に依存し，経路が曲がる他，折れたり枝分かれする場合もある．非均一性の度合いが強まるほど，亀裂によって構造物が完全に壊れる荷重のばらつきが大きくなる．したがって，変形現象とは異なり，均一性を仮定した連続体モデルの解析は，実際の構造物の破壊現象を必ずしも良好に予測・再現するとは限らない (図 1 参照).

変形する物体に対し，連続体モデルとは別に剛体-バネモデルが使われる場合がある．剛体-バネモデルは広い意味での粉体や粒状体のモデルであるが，通常は連続体としてモデル化される岩盤や地盤材料の破壊現象を解析する際にも用いられることもある．剛体-バネモデルの解析は個別要素法 (DEM, discrete element method) と呼ばれる．非均一材料を十分大きなサイズで見ると均一材料とみなすことができる．剛体-バネモデルの剛体の寸法はこのサイズに対応する．したがって DEM ではこのサイズ以下の剛体を使う必要がない．破壊現象の解析では DEM はバネの切断として亀裂を表現する．このため，亀裂の進展経路は剛体の境界に沿った複雑なものとなり，自然に非均一性の影響を取り込むことができる．しかし，変形現象の解析に DEM を用いることは難しい．なぜなら，剛体-バネモデルのバネ定数がきちんと決定されないためである．この結果，亀裂進展の解析は定性的に妥当であろうが，破壊現象の解析に DEM が用いられる例は限られている．

著者のグループは，破壊現象に対する非均一性の影響が自然に取り込まれるという DEM の長所を，連続体モデルの解析に合理的に取り組む方法を検討してきた．変形する物体に敢えて剛体-バネモデルを用いることなく，通常の連続体モデルに対して非均一性の影響を取り込める解析手法である．この解析手法は，連続体モデルの数理問題である境界値問題に対し，それと等価なやや特殊な変分問題を設定し，特殊な関数群を用いて離散化して解く，という手順を踏んで定式化される．なお「特殊」とは「通常用いられる変分問題や関数とは異なる関数」という意味である．この解析手法は FEM-β と呼ばれる．本論文は FEM-β の定式化と簡単な数値計算例を紹介する．

本論文は直交座標を用いる．ベクトルやテンソルの成分は下添え字を用いて表し，総和規約を用いる．またカンマの後の下添え字は偏微分を表す．

2. 定式化

簡単のため，2 次元平面ひずみ状態を仮定し，均一な線形弾性体の連続体モデル B に変位境界条件 u_i^o が与えられた問題を考える．弾性テンソルを c_{ijkl}，変位ベクトルを u_i とす

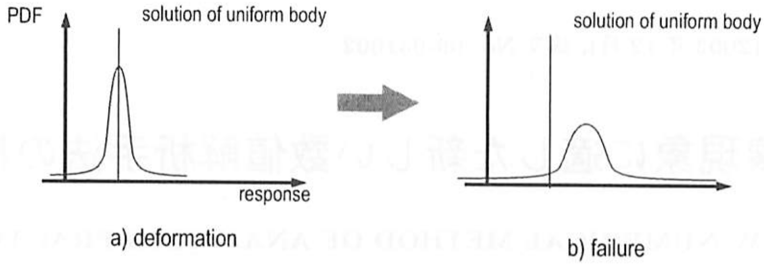


Fig. 1　非均一性が変形現象と破壊現象に与える影響．

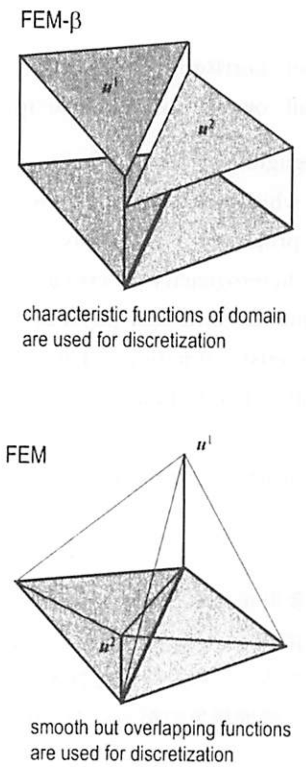


Fig. 2　デラネー分割された三角形領域での離散化に用いられる関数．

ると，境界値問題は次のようになる．

$$\left\{ \begin{array}{ll} (c_{ijkl}u_{k,l}(\mathbf{x}))_{,i} = 0 & \text{in } B \\ u_i(\mathbf{x}) = u_i^o(\mathbf{x}) & \text{on } \partial B \end{array} \right. \tag{1}$$

対称テンソルである応力を σ_{ij} とすると，次の汎関数の変分問題はこの境界値問題 (1) と等価である．

$$J(\mathbf{u},\sigma) = \int_B \sigma_{ij}\epsilon_{ij} - \frac{1}{2}c^{-1}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\mathrm{d}s. \tag{2}$$

ここで $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ は歪，c^{-1}_{ijkl} は c_{ijkl} の逆，コンプライアンステンソルである．この汎関数の変分は $\delta J = \int_B \delta\sigma_{ij}(\epsilon_{ij} - c^{-1}_{ijkl}\sigma_{kl}) + \delta u_j \sigma_{ij,i}\,\mathrm{d}s$ であるから，境界値問題との等価性は保障されている．

式 (2) で定義された汎関数 J に使われた関数 u_i と σ_{ij} を次のように離散化する．モデル B をボロノイ分割し，ボロノイ分割に対応した領域の特性関数を $\{\phi^\alpha\}$ とする．またボロノイ分割に共役なデラネー分割をとり，それに対応した領域の特性関数を $\{\psi^\beta\}$ とする．この二つの特性関数の組を使って関数を離散化する．すなわち，

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_\alpha u_i^\alpha \phi^\alpha(\mathbf{x}),$$
$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_\beta \sigma^\beta_{ij}\psi^\beta(\mathbf{x}). \tag{3}$$

変位が互いに重ならない特性関数で離散化されていることは重要である．すなわち，変位はボロノイ分割の境界で不連続な関数として与えられている．したがって，自然に，亀裂の進展経路をボロノイ分割の境界に沿って取ることができる．式 (3) を J に代入する．停留条件より係数 $\{\sigma^\beta_{ij}\}$ が $\sigma^\beta_{ij} = \sum_\alpha c_{ijkl}(\int \phi^\alpha_{,l}\psi^\beta \mathrm{d}s)/(\int \psi^\beta \mathrm{d}s)u^\alpha_k$ として決定できる．この結果，J は $\{u^\alpha_i\}$ のみの関数として次のように与えられる．

$$J = \sum_{\alpha,\alpha'} \left(\sum_\beta c_{ikjl}\frac{R^{\alpha\beta}_k R^{\alpha'\beta}_l}{Q^\beta} \right) u^\alpha_i u^{\alpha'}_j \tag{4}$$

ここで $Q^\beta = \int \psi^\beta \mathrm{d}s$ と $R^{\alpha\beta}_i = \int \phi^\alpha_{,i}\psi^\beta \mathrm{d}s$ である．提案する数値解法手法は，式 (3) で与えられる離散化を用いて連続体の変分問題 (2) を解くものであり，式 (4) の J を使った $\partial J/\partial u^\alpha_i = 0$ から導かれるマトリクス方程式を解く．この解析手法を FEM-β と呼ぶ．

簡単な計算により，式 (4) の括弧内の項は，デラネー分割の三角形を定歪三角形要素とした時に得られる有限要素法の剛性マトリクスの成分と一致することが示される．すなわち，式 (4) の解として与えられる $\{u^\alpha_i\}$ は，この有限要素法の節点変位と同一となる．表 1 と図 2 に FEM-β と FEM の比較を示す．

Table 1　FEM-β と FEM の比較．

	FEM-β	FEM
汎関数	$\int \frac{1}{2}c_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}\mathrm{d}s$	$\int \sigma_{ij}\epsilon_{ij} - \frac{1}{2}c^{-1}_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\mathrm{d}s$
離散化	重複しない特性関数	重複する連続な関数
亀裂	DEM と同様に容易	複雑 (煩雑)

式 (3) で離散化された変位関数は元の境界値問題の解空間にはない．特に微係数は二乗可積の条件すら満たさない．しかし，式 (2) の J に代入することは可能であり，また，式 (4) は三角形要素を使った有限要素法 (FEM, finite element method) と同一の解を与える．これは，上の定式化において，

1. 汎関数 J において，歪エネルギーを歪の二乗を使って計算する代わりに，(エネルギーを与えるという意味で) 物理的に共役な σ_{ij} と ϵ_{ij} を使って計算されている
2. 物理的に共役な関数の離散化に，空間的に共役なボロノイ分割とデラネー分割に対応した特性関数を用いている

という二つの工夫がなされているためである．ボロノイ分割の領域の特性関数は互いに重ならないため，亀裂という変位の不連続性 (面) を表すことは容易である．すなわち，この特性関数を用いた関数空間は，破壊現象に適した解が得られるように，境界値問題の解空間を拡張したことになると考えられる．特に，有限要素法と比べて精度が落ちないことは注意すべきである．

ボロノイ分割によって連続体を離散化した時点で，既に非均一性の影響は考慮されている．しかし，より効果的に非均一性の影響を与えることが可能である．簡単な方法は応力の離散化を変えることである．これには汎関数 J の次の性質を考える．前提として，連続体 B をボロノイ分割し，分割された領域の特性関数の組で変位を離散化し，さらに応力を特性関数の組で離散化する場合を考える．このとき，

> さまざまな特性関数の組の中で，汎関数 J の停留値を最も小さくするものは，ボロノイ分割に共役なデラネー分割によって分割された領域の特性関数の組である．

この性質は 1 次元問題に対し証明することができる．共役なデラネー分割を使って離散化される J の解が有限要素法と一致するのであるから，デラネー分割に若干の乱れがあると，J の解は有限要素法と乱れの分だけ異なることになる．すなわち，応力を離散化する際にデラネー分割に若干の乱れを加えるだけで，見かけ上，その乱れに対応した材料非均一性を加えることが可能である．

剛体-バネモデルでは剛体の剛体回転も考慮されており，個別要素法では剛体回転も自由度として加えられる．式 (3) から分かるように，提案される FEM-β の変位の離散化は，ボロノイ分割された領域に対し剛体変位を与えていることになっているが，この領域に剛体回転を与えることも可能である．すなわち

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha}\left(\begin{bmatrix} u_1^{\alpha} \\ u_2^{\alpha} \end{bmatrix} + \theta^{\alpha}\begin{bmatrix} -x_2 + x_2^{\alpha} \\ x_1 - x_1^{\alpha} \end{bmatrix}\right)\phi^{\alpha}(\mathbf{x}). \tag{5}$$

ここで θ^{α} は回転，$\mathbf{x}^{\alpha}$ は領域の重心である．定義により θ^{α} は剛体回転であるにも関わらずボロノイ分割の境界で 0 でない歪を作る．実際，式 (5) を式 (2) に代入すると，θ^{α} が作る歪エネルギーが計算され，式 (4) に対応した $\{u_i^{\alpha}, \theta^{\alpha}\}$ のマトリクス方程式が導かれる．式 (5) の離散化は物理的にも自然であると同時に，亀裂問題に対して数理的にも有効である．亀裂先端で変位は先端からの距離 ℓ の平方根 $\sqrt{\ell}$ に比例した特異性を持つのに対し，歪は距離の平方根の逆数 $1/\sqrt{\ell}$ に比例した特異性を持つためである．この特異性に対応し，$\{u_i^{\alpha}\}$ が一定値を取る一方で θ^{α} は大きな値を取ることになる．回転を導入した FEM-β では自由度は増えるものの，特異性が異なる関数を別々に表現できる点は有効である．

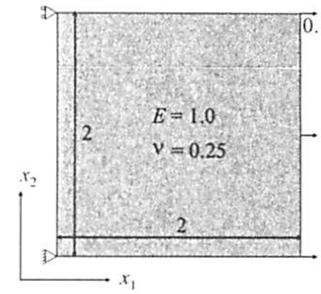


Fig. 3　数値シミュレーションの問題．

3. 解析例

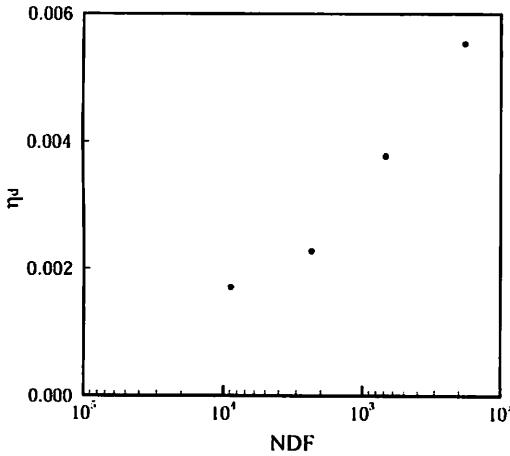
本章では，数値解析の基本的特性である収束性に関する数値解析結果を紹介する．対象とする問題は一様な引っ張りを受ける板の問題である (図 2 参照)．数値解の誤差を定量的に検討する．なお，離散化による非均一性の目安として，次のように定義されるデラネー分割からの平均の乱れを用いる．

$$\bar{\xi} = \sum_{\beta} \rho^{\beta}\xi^{\beta} \tag{6}$$

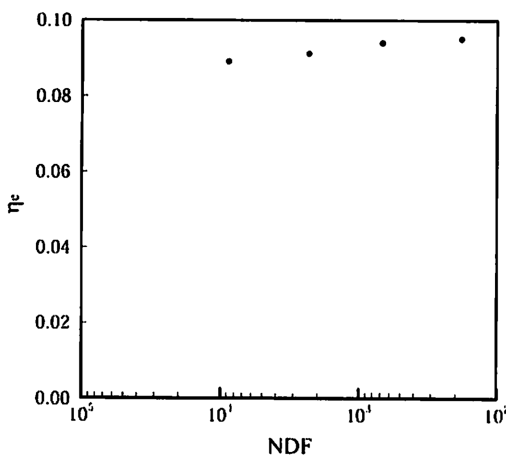
ここで ξ^{β} は β 番目のデラネー三角形の辺-高さ比として定義され，デラネー分割では $\xi^{\beta} = 2$，それに乱れが入ると $\xi^{\beta} > 2$ となる．また ρ^{β} は全領域に対する三角形の面積比である．なお，FEM-β では連続体の境界上にボロノイ分割の代表点を置いているため，デラネー分割には必ず乱れが入る．このため $\bar{\xi} = 2$ とすることはできない．

点の配置を工夫して式 (6) の $\bar{\xi}$ の値が同一となるボロノイ分割に対し，その分割数を増やし FEM-β で得られる解の収束性を調べた．二乗積分で関数のノルムを定義し，変位と歪の解析解に対する数値解の相対誤差 (η_d と η_ϵ) を，自由度を横軸にして図 4 にプロットする．変位は良好に収束するが，歪の相対誤差は 0 にはならない．これは離散化の乱れ，すなわち，非均一性の影響である．非均一性は変位よりも歪の値を変えることに対応している．また自由度が小さい場合でも，特性関数を使っているにも関わらず，変位の相対誤差は歪の相対誤差よりも小さい．

次にボロノイ分割の分割数を決めて自由度を固定し，離散化の乱れとして表される非均一性の度合いを変えた場合の数値解の相対誤差を調べた．結果を図 5 に示す．一様歪が解であるため，歪に関しては $\bar{\xi}$ が 2 に近づくほど相対誤差 η_ϵ が 0 に収束し，その収束は早い．一方，FEM-β は区分的に一様な特性関数で線形変位を表しているため，$\bar{\xi} = 2$ の近くでも変位の相対誤差 η_d は 0 となることはない．約 0.1%程度の相対誤差が生じる．しかし，数値解をボロノイの分割の代表点の節点変位とみなし，線形関数で内挿すると $\bar{\xi} = 2$ の時に相対誤差は 0 となる．見かけ上の FEM-β の精度を上げるためには，簡単ではあるがこのような平滑化処理が効果的で

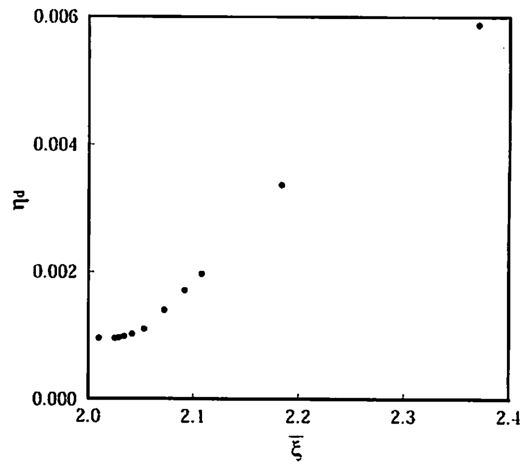


a) $\bar{\xi}$ を固定した場合の変位の残差

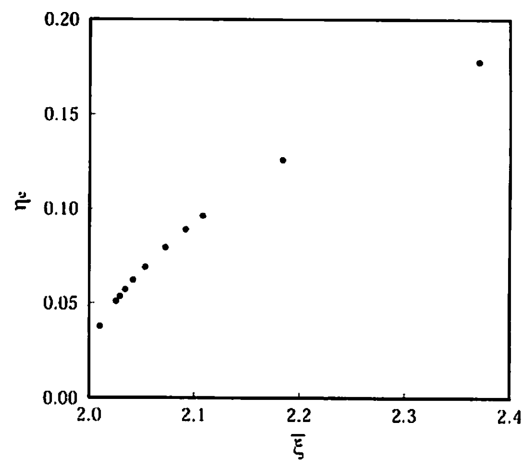


b) $\bar{\xi}$ を固定した場合の歪の残差

Fig. 4　FEM-β の解の収束性.



a) 自由度を固定した場合の変位の残差



b) 自由度を固定した場合の歪の残差

Fig. 5　FEM-β の非均一性の影響.

ある.

4. おわりに

本論文で提案された FEM-β は，非均一性の影響が無視できない破壊現象の解析に特化した数値解析手法である．変位や歪に特異性がない場合でも FEM と同定の精度であり，亀裂進展を伴う破壊現象に対しては，DEM と同様に亀裂を簡便に表現できる．これは互いに重なり合わない特性関数を用いて変位の離散化をしているためであり，この結果，非均一性の影響を簡単に取り込むことができるようになっている．

FEM-β は連続体の変分問題の数値解法である．しかし，互いに重なり合わない特性関数を用いた離散化によって相応の精度の解が得られることは，変形する物体のモデルとして，剛体-バネモデルが連続体モデルの代替となることを示唆している．また，FEM-β は対象とする変分問題が厳密に設定されているため，DEM と異なり，3 次元問題はもとより材料・幾何非線形性や動的状態に対しても，きちんとバネ定数が決定されることは強調すべきであろう．

参考文献

(1) Hori, M, Ichimura, T. and Nakagawa, H., Analysis of stochastic model: application to strong motion and fault problems, *Structural Eng./Earthquake Eng.*, JSCE, **20** (2003), pp. 11–24.

(2) Belytschko, T., Moes, N., Usui, S. and Parimi C. Arbitrary discontinuities in finite element, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **50** (2001), pp. 993–1013.

(3) Bardenhagen, S.G., Brackbill, J.U. and Sulsky, D. The material-point method for granular materials, . *Comput. Methods. Appl. Mech. Engng.*, **187** (2000), pp. 529–541.

(4) 岩井俊英, 小国健二, 堀 宗朗, FEM-β — 破壊現象の解析に適した FEM, 応用力学論文集, 土木学会, **6** (2003), pp. 231–238.