

## 任意自由度における hr-wavelet BEM の構成

## HR-WAVELET BEM WITH ARBITRARY DEGREES OF FREEDOM

阿部和久<sup>1)</sup>, 岡田大介<sup>2)</sup>, 紅露一寛<sup>3)</sup>

Kazuhiisa ABE, Daisuke OKADA and Kazuhiro KORO

<sup>1)</sup>新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)<sup>2)</sup>新潟大学工学部建設学科 (研究当時) (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050)<sup>3)</sup>新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050, E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

An hr-adaptive method is developed for the wavelet BEM. In the hr-version, the h-process provides an optimum number of degrees of freedom (DOF) for an error tolerance, and the r-process optimizes the mesh distribution under a given number of DOF. In order to attain a mesh with arbitrary DOF in the h-process, while the DOF of standard wavelet expansion is restricted to a power of two, in the present method the wavelet expansion is generalized for any DOF. Moreover the acceleration of convergence in the mesh redistribution process is attempted. The developed method is applied to numerical examples. It is found that the present h-scheme can reduce the computational work by giving a minimum number of DOF for any prescribed error tolerance. The present r-process can also reduce the number of iterations in the mesh redistribution and then shortens the computation time for the adaptive meshing.

**Key Words :** hr-Method, Wavelet BEM, Arbitrary DOF

## 1. はじめに

Wavelet BEM は, 境界要素方程式の関数近似に wavelet 基底を用いる手法である. Wavelet が有する局所サポート性とゼロモーメント性により, 方程式の係数行列の大多数の成分は絶対値が非常に小さなものとなり, それらを切り捨てることで記憶容量と計算時間の両面において効率化を図ることが可能となる.

一方, hr-適応分割法は, 近似解の離散化において, 誤差評価に基づき最適な要素数と要素配置を合理的に決定するための手法である. これら 2 つの手法は, 互いにアプローチの仕方は異なるが, いずれも境界要素解析における計算効率の向上を目的としたものである.

以前, 著者らは wavelet BEM と hr-適応分割法を併用した解法の構成を試みた<sup>1)</sup>. なお, hr-法は, 要求精度の確保に要する要素数の決定 (h-過程) と, 最適な要素配置の生成 (r-過程) とから成る. この r-過程においては不均等な要素配置が与えられることから, 文献 1) では, 不等分割の下で一次のゼロモーメント性と正規直交性を有する Haar 型の wavelet 基底を採用した.

一方, h-過程で算出される必要要素数は, 一般に任意の自由度をとり得る. これに対し, 近似関数の wavelet 展開は 2 のべき乗個の要素分割を基本としている. そのため, 文献 1) では h-過程で得られた必要要素数を上回る最小の 2 のべき乗数により要素分割数を与えていた. しかし, この限られた自由度数の下では, 要求された精度を保証する解を享受し得るものの, 場合によっては過剰な

自由度を与える恐れがあった.

また, r-過程による要素配置の最適化には, 要素再配置過程の反復計算が必要となる. この反復回数が全体の計算時間を左右するため, 要素再配置の反復回数の削減が大きな課題となっていた.

本論文では, 文献 1) に構成した wavelet BEM に基づく hr-適応分割過程を対象に, 上述の問題点の改善を試みる. まず初めに, 近似解の wavelet 展開を任意の自由度に対して適用可能なものに拡張する. さらに, r-過程における反復計算の収束性の向上を図るための幾つかの方策について, 解析例を通してその有効性を検討する.

## 2. Wavelet 基底

## 2.1 任意の要素配置に対する wavelet 基底

r-過程において生成される不均等な要素配置下での wavelet 基底には, 文献 1) で構成したものをを用いる. ここではその概略を示す.

区間一定の Haar 型 wavelet 基底  $\psi_{m,k}$  を Fig.1 のように与える. なお,  $\psi_{m,k}$  は区間  $[a, b]$  で与えられた解像度レベル  $m$  の分割 (自由度  $2^m$ ) における wavelet 基底であり,  $k$  は基底の位置を表す指標である. 当該の wavelet 基底は以下に示す 1 次のゼロモーメント性と正規直交性を有するものとする.

1 次のゼロモーメント性:

$$(\psi_{m,k}, 1) = \int_a^b \psi_{m,k}(x) dx = 0 \quad (1)$$

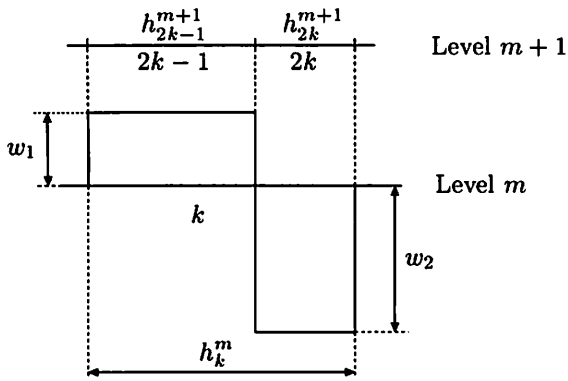


Fig. 1 Wavelet  $\psi_{m,k}$

正規直交性:

$$(\psi_{i,j}, \psi_{k,l}) = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (2)$$

ここで、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。

また、Fig. 1 において、 $h_k^m$  は  $\psi_{m,k}$  のサポート長、 $h_{2k-1}^{m+1}$ 、 $h_{2k}^{m+1}$  は  $\psi_{m,k}$  を構成している各一定関数区間長、 $w_1, w_2$  はそれらの高さである。なお、 $h_{2k-1}^{m+1}$ 、 $h_{2k}^{m+1}$  は解像度レベル  $m+1$  における wavelet 基底  $\psi_{m+1,2k-1}$ 、 $\psi_{m+1,2k}$  のサポート長に相当している。

以上の定義の下、式(1)、(2)をみたま  $w_1, w_2$  は次式で与えられる。

$$w_1 = \sqrt{\frac{h_{2k}^{m+1}}{h_k^m h_{2k-1}^{m+1}}}, \quad w_2 = \sqrt{\frac{h_{2k-1}^{m+1}}{h_k^m h_{2k}^{m+1}}} \quad (3)$$

なお、 $h_{2k-1}^{m+1} = h_{2k}^{m+1}$  の場合、式(3)は通常の Haar 基底を与える。

## 2.2 任意自由度下での wavelet 展開

$[a, b]$  上で定義された、自由度  $2^M$  の区間一定関数  $f^M(x)$  は次式により wavelet 展開される。

$$f^M(x) = c_{0,1} \phi_{0,1}(x) + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=1}^{2^m} d_{m,k} \psi_{m,k}(x) \quad (4)$$

ここで、 $\phi_{0,1}$  は  $[a, b]$  全体で一定値をとる関数基底 (Scaling 関数) である。また、 $c_{0,1}$ 、 $d_{m,k}$  は展開係数である。

一般に wavelet 展開においては、式(4)のように2のべき乗数の自由度の下で関数展開を行う。それ以外の自由度に対する関数展開は一意に決定することができない。例えば、Fig. 2 に示すように、自由度3の区間一定関数  $f^3(x)$  は、(a)、(b)のように、それぞれ異なる wavelet 基底で展開することが可能である。したがって、どの wavelet 基底をどこに配置するかについて、何らかの約束事が必要になる。

任意自由度下での関数の wavelet 変換については、福井<sup>2)</sup>が言及しているが、ここでは以下に示す手順により wavelet 基底の配置を決定する。

まず、ある階層における Haar 型 wavelet 基底は、Fig. 1 のように2つの一定値関数域から成る。この一定値関数

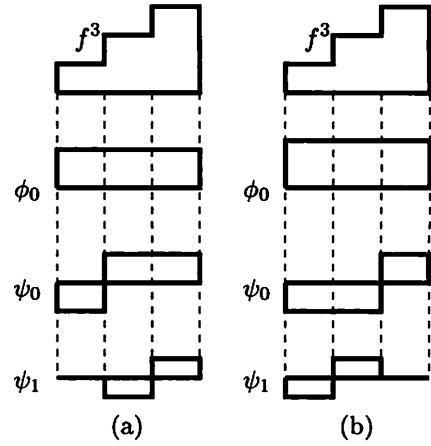


Fig. 2 Wavelet expansions of  $f^3$ .

域は、最高解像度の要素分割で与えられる一定要素の集合により構成されている。この最高解像度における一定要素集合の区間数を以下では単に区間数と呼ぶ。例えば、Fig. 2 (a) の  $\psi_0$  の場合、各一定値関数域の区間数は、左からそれぞれ1、2となる。

階層  $m$  における wavelet  $\psi_{m,k}$  に対して、1つ上位の階層  $m+1$  の wavelet は、 $\psi_{m,k}$  の各一定値関数域上に1つつ配置されることとなる。したがって、 $\psi_{m,k}$  上での階層  $m+1$  の wavelet の配置の決定は、 $\psi_{m,k}$  における2つの一定値関数域それぞれを、さらに2つの区間に細分割する操作に帰着する。この操作に対して、本研究では次の手順を採用する。

区間数  $\nu$  の一定値関数域を考える。ここでは次の約束に従い、この区間を2分割する。

- ①  $\nu$  が偶数  $2\sigma$  のとき、区間数  $\sigma, \sigma$  の2区間に分割する。
- ②  $\nu$  が奇数  $2\sigma - 1$  のとき、左から区間数  $\sigma, \sigma - 1$  の2区間に分割する。
- ③  $\nu = 1$  のとき、分割は行わない。

なお、自由度  $n$  が  $2^{M-1} < n \leq 2^M$  であるとき、最上位 wavelet の数は  $n - 2^{M-1}$  で与えられる。また、本研究においては、各区間長 (要素長) が一様である必要はない。

以上の手順による wavelet の配置を、区間数6( $n=6$ )の場合を例に Fig. 3 に示す。

## 3. hr-Wavelet BEM

本研究における適応分割過程は、基本的に文献1)に構成したものと同じである。以下にはその概要のみ記載する。

### 3.1 Wavelet BEM

二次元ポテンシャル問題について考える。解析対象領域の境界  $\Gamma$  上におけるポテンシャル  $u$  と流束  $q$  の近似  $\tilde{u}$ ,

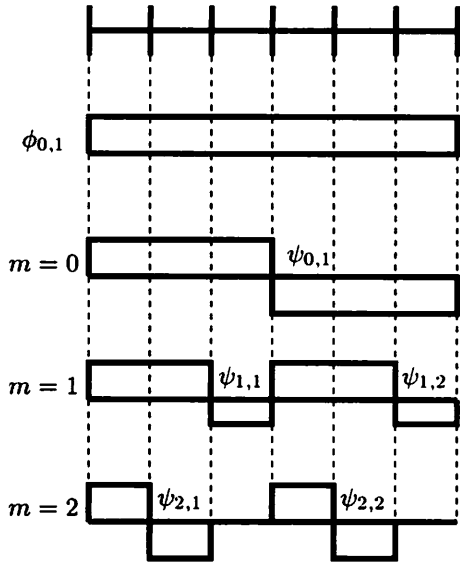


Fig. 3 Wavelet expansion of  $f^6$  by the present procedure.

$\tilde{q}$  を, 2. に導入した wavelet 基底により与える.

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n u_i w_i, \quad \tilde{q} = \sum_{i=1}^n q_i w_i \quad (5)$$

ここで,  $w_i$  は wavelet 展開における基底  $\phi_{0,1}, \psi_{m,k}$  を階層順に並べたもの,  $u_i, q_i$  はその係数である.

直接法に基づく境界積分方程式に対して, 解の近似に wavelet 基底を用い, Galerkin 法により離散化すると, 次の境界要素方程式を得る.

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (6)$$

ここで,  $\mathbf{u}, \mathbf{q}$  はそれぞれ  $u_i, q_i$  を成分に持つベクトル,  $\mathbf{H}, \mathbf{G}$  は次式を成分に持つ  $n \times n$  の係数行列である.

$$h_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int \int_{\Gamma} q^* w_i w_j d^2 \Gamma, \quad (7)$$

$$g_{ij} = \int \int_{\Gamma} u^* w_i w_j d^2 \Gamma$$

なお, 式(7)において,  $u^*, q^*$  は二次元ポテンシャル問題の基本解とその流束成分である.

### 3.2 Error indicator と error estimator

現分割段階における, 最上位の各区間 (要素  $\Gamma_j$ ) 上での近似精度を与える指標である error indicator  $\lambda_j$  を次式で定義する<sup>3)</sup>.

$$\lambda_j = \text{Max}\{|\lambda_{ij}|, i = 1, \dots, n\},$$

$$\lambda_{ij} = - \int \int_{\Gamma} q^* w_i \psi_j^M d^2 \Gamma \tilde{u}_j + \int \int_{\Gamma} u^* w_i \psi_j^M d^2 \Gamma \tilde{q}_j \quad (8)$$

ここで,  $\psi_j^M$  は現分割における要素  $\Gamma_j$  をサポートに持つ Haar wavelet 基底である. また,  $\tilde{u}_j, \tilde{q}_j$  は正解  $u, q$  の

$\psi_j^M$  に対する wavelet の展開係数であるが, 実際の解析では正解  $u, q$  は未知であるので, 現段階の境界要素解に基づき近似評価する.

近似解全体の精度評価は, 次の error estimator によりなされる.

$$\eta = \sum_j^n \lambda_j \quad (9)$$

### 3.3 r-過程

$\Gamma_j$  の要素長を  $h_j$  とし,  $\lambda_j$  と  $h_j$  とに次の関係を仮定する.

$$\lambda_j = C_j h_j^\beta (1 + O(h_j)) \quad (10)$$

ここで,  $C_j, \beta$  は  $h_j$  によらない定数とする.

このとき,  $\eta$  を最小にする要素長  $h'_j$  は次式で与えられる<sup>4)</sup>.

$$h'_j = \frac{L_l}{\sum_i \frac{h_i}{\lambda_i^{1/\beta}}} \cdot \frac{h_j}{\lambda_j^{1/\beta}} \quad (11)$$

ここで,  $L_l$  は wavelet 展開が定義されている部分境界長である.

式(10) の操作は各部分境界毎になされるものとする. また, r-過程は要素配置が概ね収束するまで繰り返し実行される. なお, 式(11) より, 最適要素配置 ( $h'_j = h_j$ ) において error indicator が全要素上で一定値をとることがわかる. そこで, r-過程の終了条件は, 部分境界  $L_l$  毎に定義された  $\lambda_j$  の平均値  $\bar{\lambda}_l$  と最大値  $\lambda_{l, \text{Max}}$  の比  $\lambda_{l, \text{Max}}/\bar{\lambda}_l$  の許容値により与えることとした.

### 3.4 h-過程

$\eta$  がその許容値  $\eta_{tol}$  を与えるために必要となる要素数  $n'_l$  は, 各部分境界  $L_l$  毎に次式により与えられる<sup>5)</sup>.

$$n'_l = \left( \frac{\bar{\lambda}_l}{\lambda} \right)^{1/\beta} \cdot n_l \quad (12)$$

ここで,  $\bar{\lambda}$  は次式で定義される量である.

$$\bar{\lambda} = \left( \frac{\eta_{tol}}{\sum_l n_l \bar{\lambda}_l^{1/\beta}} \right)^{\beta/(\beta-1)} \quad (13)$$

### 3.5 係数行列成分の切り捨て

式(7)により定義された係数行列成分の内, 境界要素解の精度への影響が無視し得る程度に値の小さなものを切り捨てることで, 係数行列のスパース化を図る. 具体的には, 次式に基づいた切り捨てを実行する<sup>6)</sup>.

$$|h_{ij}| \leq \tau \cdot H_{\text{max}}, \quad |g_{ij}| \leq \tau \cdot G_{\text{max}} \quad (14)$$

ここで,  $H_{\text{max}}, G_{\text{max}}$  は  $\mathbf{H}, \mathbf{G}$  行列における係数成分の絶対最大値,  $\tau$  は切り捨てパラメータである.  $\tau$  は式(14)

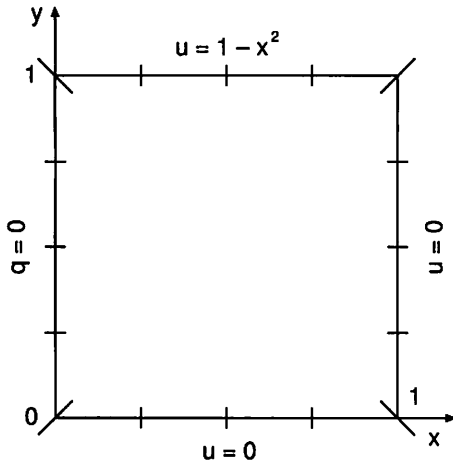


Fig. 4 Boundary conditions and initial mesh, Ex.1.

の切り捨てによる精度低下が、境界要素解の離散化誤差と均衡するように、次式により与える<sup>1)</sup>。

$$\tau = \frac{\rho_{tol}}{2\alpha H_{max}} \quad (15)$$

ここで、 $\rho_{tol}$  は、次式で定義される  $R_i$  のノルム  $\|R\|_{\infty}$  に関し、 $\rho_{tol} = \|R\|_{tol} / \|u\|_{\infty}$  により与えられる値である。なお、 $\|R\|_{tol}$  は  $\eta_{tol}$  に対応して得られる  $\|R\|_{\infty}$  の許容値である。

$$R_i = \sum_j^n \lambda_{ij} \quad (16)$$

また、以下の解析では、式(15)における  $\alpha$  の値を経験的に  $\alpha = 4$  と設定した<sup>1)</sup>。

係数行列計算に要する時間の短縮を図るため、まず  $g_{ij}$  を次式で事前評価し、それが式(14)の切り捨て基準をみたす場合については、その段階で切り捨て、式(7)による  $h_{ij}, g_{ij}$  の計算は実施しない。

$$|g_{ij}| \simeq \frac{1}{4\pi r} \sqrt{h_i^0} \sqrt{h_j^l h_{2j-1}^{l+1} h_{2j}^{l+1}}, \quad (w_i \text{が scaling 関数の場合}), \quad (17)$$

$$\frac{1}{8\pi r^2} \sqrt{h_i^k h_{2i-1}^{k+1} h_{2i}^{k+1}} \sqrt{h_j^l h_{2j-1}^{l+1} h_{2j}^{l+1}}, \quad (w_i, w_j \text{が wavelet の場合})$$

ここで、 $r$  は基底  $w_i$  と  $w_j$  との距離、 $h_i^k, h_j^l$  はサポート長である。

## 4. 解析例に基づく検討

### 4.1 解析条件

解析例に用いた2つの問題 Ex.1 と Ex.2 の境界条件と初期分割を Fig.4, 5 に示す。Ex.1 では全境界を4つの部分境界に、Ex.2 では5つの部分境界にそれぞれ分け、初期分割では各部分境界を4等分割している。なお、Ex.1 は解が特異性を持たない問題、Ex.2 は  $(x, y) = (0, 1), (0.5, 1)$  の2点において流束が特異性を有する問題となっている。

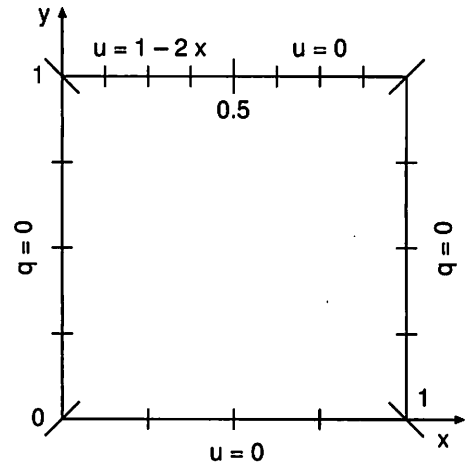


Fig. 5 Boundary conditions and initial mesh, Ex.2.

解析において、式(10)の  $\beta$  は文献1)と同様に  $\beta = 3$  と設定した。また、連立方程式の求解には GMRES 法を用い、その際のリスタート値は10とした。

### 4.2 r-過程における収束性の改善

まず、r-過程における要素再配置の反復回数の削減を目的に、以下に示す2つの改善策を検討する。

**改善策①** h-過程によって更新された新たな自由度下での初期要素分布の生成は、直前の自由度下での要素分布の補間で与えている。この初期要素分布が、更新後の自由度における最適要素配置の十分に良い近似を与える場合には、r-過程の速やかな収束が期待できる。しかし、一回のh-過程において大幅な自由度の変更がなされた場合、上述のようにして作成された初期要素分布は最適なものを十分に近似し得ない可能性が高く、その結果としてr-過程の収束に多大な反復回数を要することが懸念される。

そこで、一回のh-過程における要素数の更新は、現自由度の4倍を上限とし、要素数の大幅な変更を抑制した。

**改善策②** 文献1)では、更新された自由度における初期要素分布を、直前の自由度下での要素分布の線形補間により与えていた。この初期要素分布をより適切なかたちで与えることを目的に、補間次数を1次から3次に変更した。

各改善策の有効性を確認するため、①を用いる場合、②を用いる場合、①と②を併用する場合、およびいずれも用いない場合の各ケースを対象に、最終分割を得るまでに要した計算時間、h-過程のステップ数、最終自由度数について調べた。Ex.1 と Ex.2 において  $\rho_{tol}$  をそれぞれ  $8 \times 10^{-6}$  および  $2 \times 10^{-5}$  とした場合の結果を Table 1, 2 に示す。なお、ステップ数の欄には、最終自由度におけるr-過程の反復回数を括弧内に示した。

改善策①を用いた場合、一回のh-過程における自由度の増分が抑制されるため、h-過程のステップ数が増える傾向にある。しかし、最終自由度におけるr-過程の反復回数がいずれの解析例においても1回となっており、要

Table 1 Influence of the proposed improvements on the computational performance (Ex.1).

	CPU Time(s)	DOF	No. of h-Steps
①	10.81	416	7(1)
②	10.80	393	5(3)
①+②	8.64	415	5(1)
nothing	15.12	483	5(3)

Table 2 Influence of the proposed improvements on the computational performance (Ex.2).

	CPU Time(s)	DOF	No. of h-Steps
①	10.90	396	9(1)
②	10.30	412	6(4)
①+②	7.37	372	7(1)
nothing	21.39	546	7(5)

素再配置の収束性が向上している。また、必要となる自由度も減少しており、計算時間が短縮されている。

改善策②を用いた場合、h-過程のステップ数、および最終自由度におけるr-過程の反復回数に顕著な変化は認められない。しかし、最終的な自由度が減少しており、結果として計算時間が短縮されている。この理由については明らかではないが、r-過程においてより最適に近い要素配置が生成され、相対的に解の精度が向上したことによる影響が考えられる。

改善策①、②を同時に用いた場合において、各改善策を個々に用いた場合に比べて更なる計算時間の短縮が達成されている。また、いずれの改善策も用いない場合に比べ、Ex.1で約1/2、Ex.2では約1/3にまで計算時間が短縮されており、両改善策の有効性が確認できる。

#### 4.3 適応分割法の有効性に関する検討

改善策①と②を併用した適応分割過程において生成される、各分割段階での自由度と  $\|R\|/\|u\|$  との関係を図6、7に示す。図には比較のため、文献1)に構成したhr-法による結果と、一連の一樣分割列に対する結果を合わせて示した。図より、今回構成したhr-法と文献1)のhr-法のいずれによっても、概ね等しい収束性が得られており、それらが一樣分割に比べ大幅に向上していることが確認できる。なお、文献1)の方法では、h-過程で与えられる自由度が2のべき乗数に限定されているため、最終分割が要求精度に対し過剰な要素数を与える傾向にある。一方、今回の手法では、h-過程で任意自由度をとり得るため、要求精度に対して過不足の無い分割が得られている。

次に、様々な  $\rho_{tol}$  とそれに対して得られた最終分割における自由度との関係を図8、9に示す。100自由度以上の範囲においては、全ての  $\rho_{tol}$  に対し今回の手法による結果が文献1)における結果より少ない自由度を与えており、図6、7に示した結果と合わせ、wavelet展開を

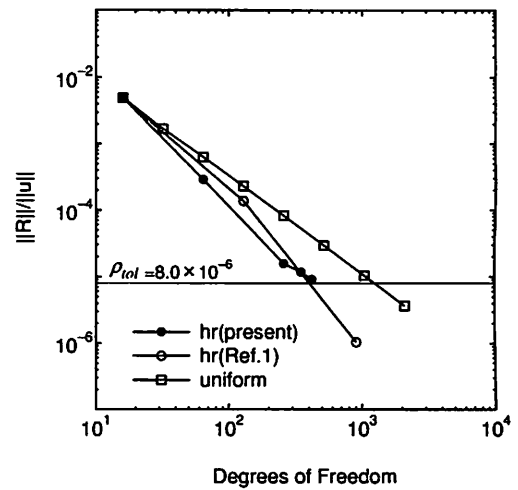


Fig. 6 Convergence of solution in hr-process for Ex.1.

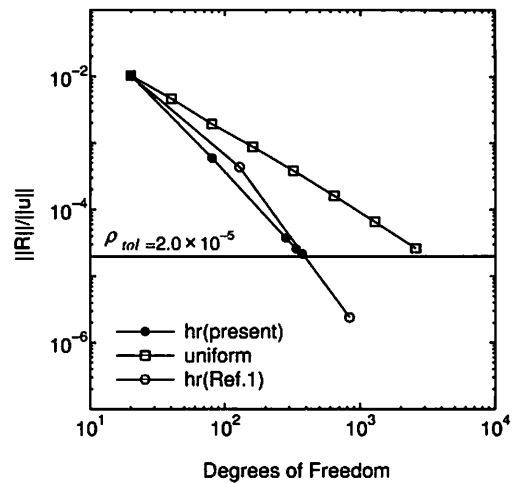


Fig. 7 Convergence of solution in hr-process for Ex.2.

任意自由度に拡張したことの効果が認められる。

続いて、本手法と文献1)の手法で得た最終分割と error indicator の分布の比較を、Ex.1を例に図10、11に示す。なお、ここでは  $\rho_{tol} = 1 \times 10^{-5}$  としている。図10に示した文献1)の方法では、各部分境界毎に見ると、error indicator がほぼ一定値を示しているものの、異なる部分境界間においてその大きさにバラツキが目立ち、自由度を2のべき乗に限定したことの弊害が認められる。一方、図11の本手法による結果では、error indicator の値が全境界上で概ね等しい値を示しており、無駄の無い要素分割がなされていることが窺える。

なお、1000自由度程度の問題において、3.5に述べた切り捨ての下で作成された係数行列成分は約30%にまで圧縮されており、当然のことながら、この点に関しては文献1)と同程度のパフォーマンスが得られていた。

#### 5. おわりに

Wavelet BEM に対する hr-適応分割法の実効性向上を目的に、幾つかの改善を試みた。まず、wavelet 基底によ

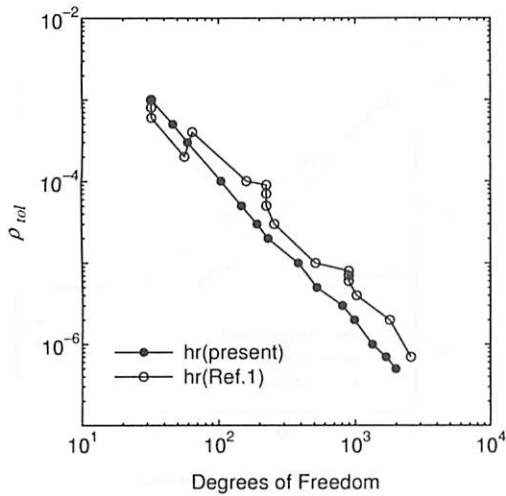


Fig. 8 Relation between DOF and  $\rho_{tol}$  for Ex.1.

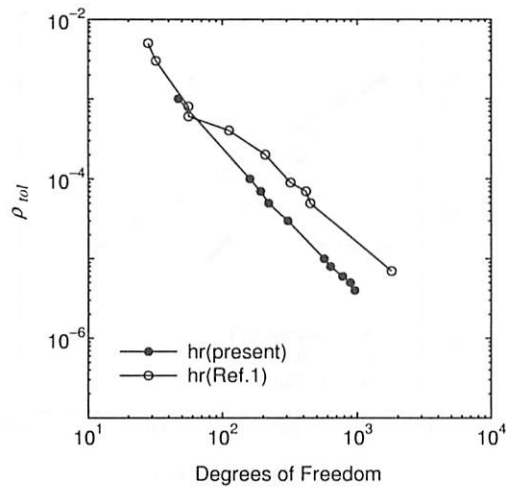


Fig. 9 Relation between DOF and  $\rho_{tol}$  for Ex.2.

る関数展開を任意自由度に対応可能なものに拡張した。その結果、任意の要求精度に対して過不足の無い要素分割を生成することが可能となった。また、r-過程における反復回数の削減を目的に、一回のh-過程でなされる自由度の増分に上限を設ける方法(改善策①)と、自由度更新直後の初期要素配置を直前の要素分布の高次補間で与える方法(改善策②)の2つの改善策について、解析例を通し検討した。改善策②はr-過程の反復回数の削減に直接寄与しないものの、これら2つの方法が、hr-過程に要する計算時間の短縮に有効であることが確認できた。

なお、後者の2つの改善策は、通常用いられる関数基底による適応分割法にもそのまま適用し得るものである。また、本研究では、1000自由度程度の解析例で検討したが、ここに対案した改善策は、より大きな問題にも同様に有効なものである。

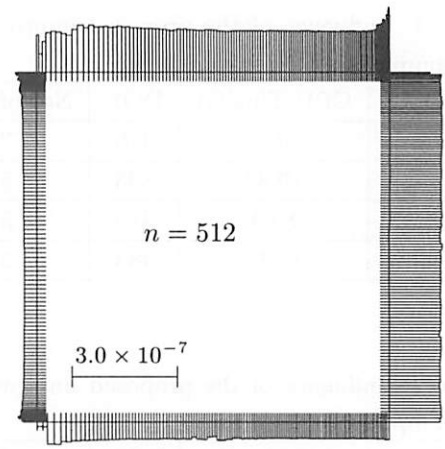


Fig. 10 Final mesh and distribution of error indicator for the hr-method in Ref.1) (Ex.1).

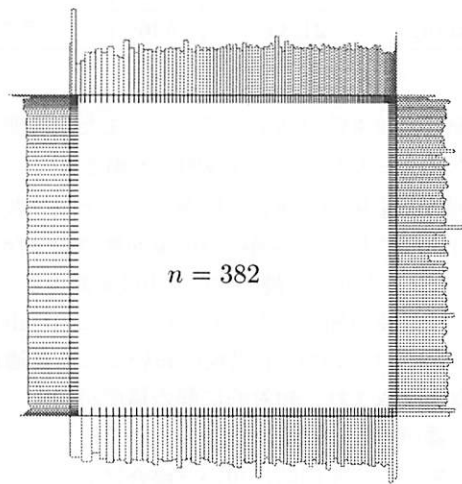


Fig. 11 Final mesh and distribution of error indicator for the present hr-method (Ex.1).

#### 参考文献

- 1) 阿部和久, 中村 淳, 紅露一寛, Wavelet 基底を用いた hr-境界要素適応分割法, 計算数理工学論文集, Vol.2, 15-20, 2002.
- 2) 福井卓雄, 藪田順子, Wavelet 変換による反復前処理法の高速多重極境界要素法への応用, 境界要素法論文集, Vol.18, 65-70, 2001.
- 3) Abe,K. Koro,K. and Itami,K., An h-hierarchical Galerkin BEM using Haar wavelets, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.25, 581-591, 2001.
- 4) 阿部和久, r-法による最適境界要素分割, 境界要素法論文集, Vol.9, 115-120, 1992.
- 5) 阿部和久, 櫻庭庄平, hr-境界要素適応分割過程の改善, 境界要素法論文集, Vol.13, 79-84, 1996.
- 6) Koro,K. and Abe,K., A practical determination strategy of optimal threshold parameter for matrix compression in wavelet BEM, *Int. Jour. Num. Meth. Engng.*, Vol.57, 169-191, 2003.