境界要素法論文集 Vol. 20 (2003 年 12 月), 論文 No.02-030918 JASCOME

境界要素法における計算点解析法の複雑な支配方程式の問題への適用 第４報：解析法の比較

APPLICATION OF COMPUTING POINT METHOD IN BEM TO PROBLEMS WITH COMPLICATED GOVERNING EQUATION

Fourth Report: Comparison of Analysis Schemes

神谷紀生 [1]，橋爪智弘 [2]，箕浦昌之 [3]

N. Kamiya, T. Hashizume and M. Minoura

[1]名古屋大学大学院情報科学研究科（〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp)
[2]名古屋大学大学院人間情報学研究科（〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:hashi@info.human.nagoya-u.ac.jp)
[3]名古屋大学情報文化学部 （〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:minoura@info.human.nagoya-u.ac.jp)

Applicability of the so-called boundary-type numerical analysis scheme to some of nonlinear and/or inhomogeneous problems governed by complicated differential operators is considered in this paper. Considered differential equation has no linear differential operator as the principal part and every term is nonlinear. In these cases, generally, ordinary schemes either by finite elements or boundary elements cannot be dealt easily and efficiently. Therefore, Computing Point Analysis (CPA) scheme in the Boundary Element Method, proposed earlier by one of the present authors in order to get solution by boundary discretization alone, is tried to apply. Three main computational schemes, Finite Element, Boundary Element and Finite Difference are employed to solve the problem considered by Katsikadelis et al. Comparison of the three methods is made from several points of view, i.e., accuracy, formulation, programming among others.

Key Words: Boundary Element Method, Computing Point Method, Nonlinear Differential Equations, Complicated Differential Operators

1. はじめに

非線形微分方程式で与えられた問題を解くことは一般に容易でない．広い一般性をもつ数値解析法の代表であると言われる，差分法，有限要素法においても非線形問題は困難を伴うことが通例である．一方，境界要素法でこのような問題を解く場合には，上記２法と違って，境界要素法の顕著な特徴である，境界だけの離散化ではすまないので，より困難が生じ，方法の有効性が明白にならないとさえ言われる(1)．本研究では，線形な項をもたない非線形微分方程式を例にとって，上記の３方法による解法の比較をするとともに，非線形方程式においても境界だけの離散化で解析が可能な計算点解析法(2, 3)の，これらの方法の比較における位置付けを検討してみる．

非線形微分方程式の境界値問題を境界要素法で解く際のひとつの問題は，線形な主要微分作用素が存在しない場合や，主要微分作用素に座標の関数や未知関数あるいはその導関数などが掛かる問題の扱いである(4)．これらについては，先にも指摘したように，もはや境界要素法だけの問題ではなく，差分法や有限要素法においても普遍的で有効な方法を見出すことはむつかしいといえる．このような問題にはじめて境界要素法の立場から取り組んだのはKatsikadelis ら(1)であり，阿部ら(5, 6)も同様な試みを行っている．ある種の仮定のもとに，非線形方程式の解を，ラプラシアンを主要微分作用素とする非同次方程式の解と仮定し，非同次項に２重相反法(DRM)(1)と同様の考えを導入する．この形式の解をもとの非線形方程式に代入し，境界と領域内部にとった点で方程式が成り立つようにする．非同次項の近似はDRM と同様，距離に依存する簡単な関数を用いている．いくつかの解析例によって有効性を主張しているが，精度の高い解を得るためにはきわめて多数の内点が必要になるようである．また阿部ら(5, 6)の計算によれば，非同次項の近似に用いる関数の選択が解の精度，ひいては方法の有効性に本質的影響を与えるようである．

本研究では，線形項をもたず，すべての項が非線形項だけで

表されるある種の非線形微分方程式を例にとって，差分法，有限要素法，そして境界要素法における新たな取り組みである計算点解析法(CPM)によってこの問題を解く．これらの定式化，非線形方程式の逐次近似計算，計算精度などを比較する．

2．問題の設定と定式化

ここで考える問題は，2次元空間(x, y)における2階の微分方程式であり，個々の項はすべて非線形であるとする．未知数を$u(x, y)$とし，方程式を次のように表す：

$$N(u) = 0 \tag{1}$$

この方程式に関して，閉領域Ωにおける境界値問題を考えよう．なおΩの境界をΓと表すものとする．式(1)の作用素Nは非線形であるから，差分法(FDM)，有限要素法(FEM)，あるいは境界要素法(BEM)など代表的な数値解析法における定式化では，解を得るために，線形項を用いた都合のよい形式を導出することは通常困難である．そこで，何らかの線形微分作用素Lを追加して，式(1)を次のように表す：

$$L(u) + [N(u) - L(u)] \equiv L(u) + M(u) = 0 \tag{2}$$

この結果，式(1)は線形作用素Lに関する微分方程式であり,第2項以降，すなわち$M(u)$が非線形項として現れるとみなされる．

式(2)に対する重みつき残差表示は次のようになる：

$$\int_\Omega \{L(u) + M(u)\} v d\Omega = 0 \tag{3}$$

ここで，vは重み関数である．したがって，有限要素法では形状関数を，境界要素法では線形作用素に関する基本解をとれば，それぞれの方法に用いられている定式化が可能であるし,それに関連した関係式を導出できる．線形微分作用素Lとして何をとるか，何を取るべきか，あるいは何をとれば合理的な計算が可能になるか,などは方法にとって，基本的に重要な問題であろうが，さしあたりそのための適切な指針が見あたらないので，以下では次の2種類を考えてみることにする：

$$\begin{aligned}&(a)\ L(u) = \Delta u,\\ &(b)\ L(u) = \mathrm{I}(u) \equiv u\end{aligned} \tag{4}$$

最初は2次元ラプラシアンであり，この場合基本線形微分作用素をラプラシアンとするポアソン方程式とみなして扱うことを意味している．第2の場合はもとの非線形方程式に単純にuを追加し，非線形項からこれを差し引いたものである．以下に具体的な定式を示そう．

(1) **有限要素法**：Lとしてラプラシアンを取れば，式(3)は次のようになる：

$$\int_\Omega \{\Delta u + M(u)\} v d\Omega = 0 \tag{5}$$

重み関数は未知関数の形状関数である．これを一度部分積分することによって，弱形式を得る：

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma - \int_\Omega [\nabla u \nabla v - M(u) v] d\Omega = 0 \tag{6}$$

上式の計算は領域Ωを適当な要素に分割して行うことができる．しかしながら，非線形項Mが複雑な場合，その項に関する計算のためのプログラミングは極めて面倒になる．

(2) **境界要素法**：その正当性は別として，ここではLとしてラプラシアンをとる．ラプラス方程式あるいはポアソン方程式に関する境界要素法は広く用いられているし，非同次項，非線形項が含まれる場合の扱いにも境界だけの離散化による有効な手段が存在することから,このような扱いをする．

$$\int_\Omega \{\Delta u + M(u)\} u^* d\Omega = 0 \tag{7}$$

u^*はラプラス微分作用素に関する基本解である．上式を2回部分積分し，基本解の性質を用いれば次の関係を得る：

$$\alpha u + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} u^* d\Gamma - \int_\Gamma u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \int_\Omega M(u) u^* d\Omega = 0 \tag{8}$$

ここで，係数αは式(8)を適用する位置によって決まる定数である．最後の項は領域にわたる積分として表されているが，DRMあるいは計算点解析法を用いることにより，境界積分に変換できる．ただし，そのために，境界の要素による離散化以外に，境界上および領域内部に計算点と呼ばれるいくつかの点を指定する必要が生じる．

(3) **差分法**：差分法の定式化を重みつき残差法として理解することは可能であるが,ここでは，2次元格子を取り，単純に与えられた微分方程式(1)の微分係数を差分により近似すると考える．ただし，その結果として導出される代数方程式は,もとの微分方程式が非線形であれば,非線形になるので，これを解く際には種々の工夫が必要になる．式(1)の項が非線形であれば，格子点での未知関数値を求める式は非線形になる．そこで，ここでは，有限要素法あるいは境界要素法の定式化にも用いたように，Lとしてラプラシアンをとるものと，さらにLとして1をとるものの2種類を考えてみる．このようにすることにより，いずれの方法においても，格子点の未知量を計算するために線形項が現れる．あらかじめすべての格子点での値を仮定し，逐次近似計算を行い,収束値を得るまで続ける．

3．例題による検討

具体的例題として，Katsikadelis ら[4]が用いた問題を取り上げる．これはガウス曲率が一定の曲面$u(x, y)$を決定する問題であって，

曲面は次の微分方程式で表される:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2-\frac{1}{50}\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^2=0 \quad (11)$$

考える領域は正方形で, $0 \le x, y \le 3$ とし, また境界条件として関数値が与えられているものとする. この方程式の厳密解はわかっており, 次のように与えられる:

$$u=\left[50-(x^2+y^2)\right]^{1/2} \quad (12)$$

(1) **有限要素法**: 非線形項には未知関数の 2 階の導関数が含まれているので, 要素上で近似される未知関数は 2 次以上としなければならない. そこで, 2 次の正方形要素により式(6)を離散化する. 重み関数である v はもちろん 2 次である. 式(6)から導出される関係式を連立方程式として解いて, 解を得る. なお, 個々の要素における式(6)の非線形項の積分は, 計算式が極めて面倒になるので, 数式処理の Maple を補助的に用いて, 計算プログラムを作成した.

考える領域を合計25個の 2 次要素で分割し, 計算を行った(Fig. 1(a)). なお, 式(6)のようにラプラシアンの項を追加しているから, この項から現れる線形項について非線形代数方程式を解く, 反復計算を行った. なお, 値が指定されているものを除き, 各節点の初期仮定値はすべて0である. また, 極めて粗い有限要素分割として, 合計 4 個だけの場合についても比較のために計算を行った. 有効数字5桁が一致するまでの計算回数は約 100 回であった.

(2) **境界要素法**: 境界を線形要素により40等分し, 計算点は境界節点を 1 つおきにとるほかに, 領域内部に 9 個とった(Fig. 1(b)). 計算点解析法のプログラムは, 著者らがすでに種々の問題に適用して十分の精度を持つことを確認している. 計算点解析法は反復計算によって行われるので, これにも初期推定値が必要であるが, ここではすべて0とおいて解を求めた. 有効数字5桁の一致を収束のめどとし, この問題では 40 回の反復計算が行われた.

この方法は, 計算プログラムを作成するためには境界要素法の基本知識が必要であるが, 計算を実行する際のデータ作成等の手間は, 有限要素法に比べて大幅に緩和される.

(3) **差分法**: ここで考える領域は正方形であるので, 差分格子を構成することは極めて容易である. ここでは, 各辺を 10 等分するように格子配置を取った(Fig. 1(c)). もとの微分方程式を差分近似して得られる代数方程式は当然非線形であるから, 上記のように, 未知関数のラプラシアンあるいは未知関数自体をつけた方程式を考えて, これを計算に用いた. 非線形方程式の解法は, 初期推定値からの反復計算であり, 前者はすべての格子点で0と仮定した. 計算すべき点の数は他の方法に比べて多いが, 領域が単純であるために, 計算プログラムは容易に構成できる. 上記2種類の方法による計算はいずれも早く収束し, 有効数字 5 桁の条件に要した反復回数は約 200 回であった.

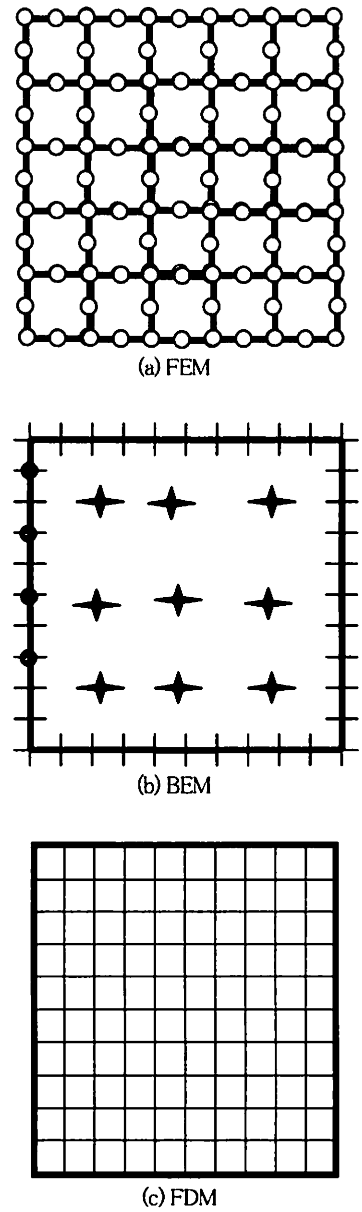

Fig. 1 Discretization for each scheme.

以上説明した方法によって計算した結果を厳密解と比較して, $y=1.2$ における結果を Table 1 に, $y=2.4$ における結果を Table 2に示した. ここに示すように, 有限要素法で全領域を 4 分割して得られた結果(FEM 1)を除き, 1辺を10に分割するあるいは10個の節点を持つように分割する, もしくは格子配列をとれば, 上記のいずれの計算方法においても, 極めて精度の高い結果を得ることが可能である.

いずれの方法によっても精度の高い解を得ることが可能であることがわかったので, この問題に限れば, いずれの方法を用いてもかまわないと言える. 解析を実行する際のプログラミング, データの作成などの立場で方法を比較すれば顕著な差異があることは明らかである. もちろんそれぞれの方法に関する十分な知識がなければ, 計算のためのプログラムを書くことは不可能である. また, 反復収束計算を行う際に, 計算プロセスは時として不安定になったり, また場合によっては収束せずに発散することもありうる. この点につ

Table 1 Comparison of results (y = 1.2)

x	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3
Exact	6.969	6.962	6.943	6.910	6.864	6.805	6.732	6.645	6.542	6.424	6.290
CPM	6.969	6.964	6.946	6.915	6.870	6.812	6.738	6.650	6.546	6.421	6.290
FEM 1	6.969	6.886	6.809	6.736	6.669	6.606	6.531	6.462	6.399	6.341	6.290
FEM 2	6.969	6.962	6.943	6.910	6.864	6.805	6.732	6.644	6.542	6.420	6.290
FDM	6.969	6.962	6.943	6.910	6.864	6.805	6.732	6.644	6.542	6.425	6.290

Table 2 Comparison of results (y = 2.4)

x	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3
Exact	6.645	6.651	6.624	6.590	6.542	6.480	6.403	6.311	6.203	6.079	5.936
CPM	6.645	6.646	6.627	6.594	6.546	6.485	6.408	6.315	6.206	6.080	5.936
FEM 1	6.645	6.595	6.535	6.469	6.399	6.324	6.258	6.187	6.109	6.025	5.936
FEM 2	6.645	6.648	6.624	6.589	6.542	6.479	6.403	6.312	6.203	6.075	5.936
FDM	6.645	6.645	6.624	6.590	6.542	6.480	6.403	6.311	6.203	6.079	5.936

いても十分な知識の実地対応は避けられない. したがって, 問題を解析しようとするものにとって, 上記のような条件が満たされている場合の"使い勝手"を検討するのが適当と思われる. 差分法は計算方法が他の用法に比べて単純であるから, 格子配列が簡単にできれば, 便利な方法である. 解析対象領域が曲線境界であれば, 一般的に差分法で言われている短所である, 境界と格子の近似度合いが問題になる. 関連して, このような場合には, 一般に十分細かい格子を配置せざるを得ないことによって, 計算量が増大することを指摘できる. 有限要素法では, 任意の要素形状, 大きさをとることができるので, 差分法での困難は解消できる. 個々の要素上での積分計算は, 未知関数の形状関数の次数をある程度高く取らなければならない場合には面倒になる. 先にも述べたように, このような場合には数式処理プログラムを利用すれば, この困難が軽減される. 有限要素法のいわゆるコマーシャルプログラムでは, 要素番号や節点番号の処理はプリプロセッサおよびポストプロセッサによって行われる. しかし特殊な問題について計算を行おうとするものがプログラムを作成する場合には, 必ずしもプリ・ポストプロセッサを有効に使えないことがある. そのような場合には, 有限要素解析のためのデータ作成は一般に手間がかかる.

境界要素法は, ユーザーの立場から, データ作成等の量,時間は上記 2 方法に比べて大幅に軽減されることは明らかである。複雑な領域形状であればあるほどそのような傾向は増大する.

4. まとめ

Katsikadelis らが扱った問題を例にとって, 有限要素法, 差分法, 境界要素法による計算を行って, それぞれの方法の特徴を比較検討した. 対象とした問題は, 非線形項だけからなる微分方程式であって, 従来の考えではいずれの方法によっても, 扱いは線形問題におけるようにはゆかず, 計算方法に工夫が必要になるものである. 定式化には, 線形項を追加して従来の方法を拡張して扱えるようにした. 個々の方法における詳細は上に述べた通りである. 計算結果はいずれの方法も精度の高い結果を与えることが判明した. したがって, ここで示した方法が計算に有効に利用できる.

追加した線形項はプラシアンあるいは1 (恒等作用素) であったが, これがどのような問題に適切かは数学的に検討しなければならない. また, 収束解を得るための条件は何かなどの問題も残っている.

5. 文献

(1) P.W. Partridge, C.A. Brebbia, and LC.Wrobel, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Comp. Mech. Pub., 1992

(2) 神谷・許, 非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法, 日本機械学会論文集 (A), **64** (1998), 147-154

(3) 許・神谷, 非同次・非線形問題に対する境界要素の一定式と解法(続報:未知関数の導関数を含む非同次項の場合), 日本機械学会論文集(A), **64** (1998), 1341-1347

(4) J.T. Katsikadelis and M.S. Nerantzaki, The boundary element method for nonlinear problems, *Eng. Anal. Bound. Elms.*, 23(1999), 365-373

(5) 阿部・岩成, 等高面の方法による移動境界問題の境界要素解析, BTEC 論文集, **10**(2000), 37-42

(6) 阿部・岩成, 薄板スプラインを用いた多重相反法の AEM による等高面解析への適用, 境界要素法論文集, **17**(2000), 1-6