

## 境界要素法における計算点解析法の複雑な支配方程式の問題への適用 第3報：特殊な問題における解析例

# APPLICATION OF COMPUTING POINT METHOD IN BEM TO PROBLEMS WITH COMPLICATED GOVERNING EQUATION Third Report: Applications to Particular Problems

神谷紀生<sup>1)</sup>, 橋爪智弘<sup>2)</sup>, 箕浦昌之<sup>3)</sup>

N. Kamiya, T. Hashizume and M. Minoura

<sup>1)</sup>名古屋大学大学院情報科学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp)

<sup>2)</sup>名古屋大学大学院人間情報学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:hashi@info.human.nagoya-u.ac.jp)

<sup>3)</sup>名古屋大学情報文化学部 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:minoura@info.human.nagoya-u.ac.jp)

Applicability of the so-called boundary-type numerical analysis scheme to some of nonlinear and/or inhomogeneous problems governed by linear differential operators is considered in this paper. Considered differential equations, say, correspond to the problem with space coordinate dependent thermal conductivity in heat conduction. Ang et al. treated these problems in complex-valued boundary element formulation and/or by Dual Reciprocity Boundary Element Method, which are special schemes for the restricted cases and therefore have no wider usability. Authors try to apply the Computing Point Analysis (CPA) scheme in the Boundary Element Method, proposed earlier by one of the present authors in order to get solution by boundary discretization alone. Comparing the results with the method by Ang et al., we will discuss new possibility of the CPA to the mentioned problems.

Key Words: Boundary Element Method, Computing Point Method, Nonlinear Differential Equations, Complicated Differential Operators

### 1. はじめに

たとえば、定常熱伝導問題を例にとりて考えてみよう。媒体が等方性で、熱伝導率が方向によって変化せず、しかもそれが場所や温度に無関係ならば、熱伝導の支配方程式は、温度に関するラプラス方程式あるいはポアソン方程式によって表される。これらは典型的な2階の楕円型微分方程式であり、この解法は理論的にも、また複雑な形状であれば、有限要素法、境界要素法などの数値的手法により適切に扱うことが可能である。

熱伝導率が方向によって異なる場合には、方向によって係数が異なるので、標準的ラプラス方程式あるいはポアソン方程式にはならない。また熱伝導率が場所とともに変化する傾斜機能材料や一般的な複合材料では、伝導率が空間座標に依存する係数をもつ2階の微分方程式となる。さらに一般に熱伝導率は温度とともに変化するのので、大きい温度範囲を対象とする場合にはその影響を考えなければならず、このとき微分方程式はもはや線形にもならない。

後者の場合について、境界要素法の立場から解法を研究したものが多数見られる。熱伝導率が温度の関数である場合について

の研究はすでに歴史が古く、その代表的な方法は、キルヒホッフ変換<sup>(1,2)</sup>を用いるもので、この結果、微分方程式はラプラス/ポアソン型に帰着される。ただし、これには逆変換をあとで行う必要がある。また典型的な温度依存関数であれば、簡単な変数変換でラプラス/ポアソン方程式を導出できることも示されている<sup>(3)</sup>。

熱伝導率が空間座標の関数である場合は、支配微分方程式がラプラス微分作用素を主要作用素とするものにならないので、方程式は線形であるにもかかわらず、境界要素法を適用する場合都合よくならない。Angら<sup>(4,5)</sup>が用いた方法は、可能な限りラプラス/ポアソンの方程式に近づけ、そのあと境界要素法でよく知られた2重相反法(DRM)<sup>(6)</sup>を適用しようとするものである。その概略を次節で示そう。またKassabら<sup>(7)</sup>は、不均質方程式に対応する基本解を求めようとしている。試みはアグレッシブであるが一般性をもたせることが困難であるとともに、出てきた方程式の扱いが簡単ではない。これ以外には、ラプラス作用素に注目し、これ以外の項すべてを非同次項として2重相反法を適用する研究が見られる。

本研究では、著者が最近提案した、計算点解析法<sup>(8)</sup>とよばれる境界要素法に基づく解法を、伝導率が空間座標の関数となる

問題などに適用して、応用可能性を調べることにする。なお、計算点解析法は、非同次、非線形問題を境界積分方程式を用いて解く方法であるが、境界の要素による離散化だけを用い、領域内部の離散化は必要としない。ただし、内部にいくつかの計算点と呼ばれるものを取り、非同次項の当てはめを最小2乗法により行うものである（詳細は省略し、文献<sup>8,9)</sup>などを参照）。

## 2. ANG らの扱った問題と解法

最近、Ang ら<sup>11,12)</sup>が扱った問題は2次元空間 $(x, y)$ における未知関数 $u(x, y)$ に関する楕円型の微分方程式に関する境界値問題であり、次の2種類である：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ K(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0 \quad (2)$$

式(1)について、未知関数を次のように変数変換すれば、

$$u(x, y) \equiv \psi(x, y) / [K(x, y)]^{1/2} \quad (3)$$

新しい未知関数 $\psi$ について、つぎの式が得られる：

$$\Delta \psi - \Lambda(x, y) = 0 \quad (4)$$

ここで、 $\Lambda(x, y)$ は係数 $K(x, y)$ の微係数で表される。式(4)にDRMを用いることは可能であるが、文献では複素平面における積分方程式を用いて定式化している。係数 $K(x, y)$ が $x$ および $y$ の関数の積で与えられる場合の例を示している。

式(2)については、係数 $\lambda$ について、対称性をはじめ種々の制約条件をつけているほか、

$$\lambda_{ij}(x, y) = \lambda_{ij}^0 g(x, y) \quad (5)$$

とおき、次のように変換する：

$$u(x, y) = w(x, y) / [g(x, y)]^{1/2} \quad (6)$$

この結果、式(2)は次のようになる：

$$\lambda_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\lambda_{12}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \lambda_{22}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \kappa(x, y)w \quad (7)$$

この式は標準形のラプラシアンになっていないが、 $x$ と $y$ につい

て座標変換を行って、標準形にすることは可能である。なお、 $\kappa(x, y)$ は関数 $g$ によって次のように表される。

$$\kappa(x, y) = \frac{1}{\sqrt{g}} (\lambda_{11}^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\lambda_{12}^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \lambda_{22}^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \sqrt{g} \quad (8)$$

このように変換された形式の微分方程式に複素平面での扱いを行っているほか、最終的にはDRMを適用している。

したがって、上記の扱いでは式(1)あるいは(2)のような問題を変数変換により、ラプラスあるいはポアソンの微分作用素をもつ微分方程式に変換した後、数値計算にはDRMを用いることを基本としている方法であると言える。それ故に、係数 $K$ や $\lambda$ がより一般的な形式に与えられる場合には、これらの方法は用いることができないことになる。

## 3. 計算点解析法の適用

計算点解析法は、主要微分作用素がラプラシアンである場合、あるいはそれに近い形式である場合、線形作用素をラプラシアンとし、与えられた微分方程式のその他の項はすべて非同次項とみなす。それが非線形であってもかまわない。非線形項と基本解の積は領域積分として定式化されるが、これは多重相反法の考えに従って、境界積分に変換される。考え方は領域内部に補足の点を配置して関数値を決めるDRMと似ているが、境界上にも計算点と呼ばれる関数値を計算する点を設けていることと、関数値の決定は最小2乗法を用いて行われるなど、DRMと異なる特徴を持つ。

式(1)あるいは(2)は特別な形をしているが、元来2階の微分方程式であるから、これを未知関数のラプラシアンとその他の和として表すことができる。すなわち

$$\Delta u + N(u) = 0 \quad (9)$$

この変形には、Ang らが行ったように特別な変数変換を使う必要はまったくない。単純に計算を行えば済むことである。変数変換を行えば、境界条件にもその影響は現れることにも注意が必要である。参考のために、式(1)と(2)における式(9)の非同次項はそれぞれつぎのようになる：

$$N = \frac{1}{K} \left[ \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (10)$$

$$N = \frac{1}{\lambda_{11}} \left[ (\lambda_{22} - \lambda_{11}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (11)$$

ここで注意することは、式(2)に対応する非同次項(11)は、未知関数の微分係数が $x$ と $y$ について同じではないことと、 $x$ および $y$ の両者に関する微分を含むことである。したがって、主要微分作用

素をラブラシアンとすることにより、非同次項に2階の導関数が現れることになる。計算点解析法はこのような場合にも対応できることがすでに示されている<sup>(10, 11)</sup>。計算点解析法は、境界を境界要素により離散化するほかに、領域内部および境界上にいくつかの点を配置し、そこで関数値および非同次項の計算を行う。また計算はあらかじめ仮定した未知関数値から、反復的に収束値を求めるプロセスによっている。

#### 4. 例題による計算と比較

具体的問題として、計算点解析法による結果を Ang らの方法による結果と比較してみよう。扱う例題は次のようである。2 次元の正方形領域  $0 \leq x, y \leq 1$  において、次の微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x^2 - 2xy + 2)^2 \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (x^2 - 2xy + 2)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} = 0 \quad (12)$$

を Dirichlet 条件のもとで考える<sup>(9)</sup>。式(12)に対して

$$\frac{1}{2} \lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = (x^2 - 2xy + 2)^2 \quad (13)$$

と式(6)の変換を行えば、この問題では  $k = 0$  となるので、新しい未知関数  $w$  に関して次のような式を得る:

$$2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (14)$$

また、式(12)を直接変形し、式(9)に対応させれば、非同次項  $N$  は次のようになる:

$$N = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2}{x^2 - 2xy + 2} \left[ (x - 2y) \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (15)$$

なお、この問題の厳密解は次のように与えられることが知られている:

$$u = \frac{1 + x - y}{x^2 - 2xy + 2} \quad (16)$$

計算点法による計算は、領域の境界である正方形の1辺を20個の線形境界要素により離散化し、計算点は境界上では節点を一つおきにとり、内部計算点は総計9個を Fig. 1 のようにとった。反復計算の出発値はすべて0とし、有効数字5桁の一致を収束条件とした。計算結果は、Table 1 に示す。なお、ここで Method 1, 2 は、未知数を  $u$  として、式(15)を非線形項とする計算、および未知数を  $w$  とし

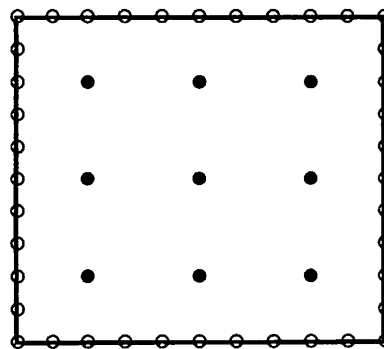


Fig. 1 Boundary and internal computing points

て、式(14)を用いた計算に対応する。これらはいずれも厳密解により一致を示している。

Ang らの解析は、同じ問題であるが境界条件の与え方が上記とは幾分異なる。ただし解析解が式(16)となるように設定されている。これに対して、式(14)に DRM を適用して計算を行った。境界要素数は1辺あたり10、40(合計境界節点数  $n = 40, 120$ )とし、内部点数は  $m = 16, 81$  ととっている。ただし、式(14)は  $x$  と  $y$  に関する2階の導関数の係数が異なり、しかも  $x$  と  $y$  とに関する解の導関数を含む微分方程式であるから、これにどのようにして DRM を適用したかは明らかでない。Table 2 に、特定の内部位置での計算結果の比較を示した。これらの計算結果を比較すると、いずれの結果も厳密解によく一致している。ただし、Ang らの結果で要素分割数が少ない場合には多い場合よりも精度が低いことがわかる。さらに、計算点法では、DRM に比べて領域内部に与える点数をおおぼに減少しても十分の精度が実現できる。

#### 5. まとめ

Ang らが扱った特殊な形式で与えられる2次元、2階の微分方程式をラブラシアンを線形微分作用素とする非線形微分方程式とみなして解く方法を計算点解析法の立場から示した。Ang らの方法に見られるように問題ごとに特別な形式の変数変換を施すことなく、計算ができる。したがって、著者らの方法はより一般性を持った計算法ということができる。

もちろん変数変換が簡単に推測され、その結果として容易な計算が実行されるならばその方法は役に立つと思われるが、これを予測するには相当の数学的な直感を必要とする。

#### 5. 文献

- (1) H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*. Oxford Clarendon Press, 1959
- (2) P. Skerget, and C. A. Brebbia, Nonlinear potential problems. C. A. Brebbia ed., *Progress in Boundary Element Methods-2*, pp. 1-23, 1983.
- (3) N. Kamiya, and S. Q. Xu, Note on a simplified, linearized formulation for the quasi-linear equation, *International Journal of BEM Communications*, 8(1997), 219-221.

- (4) W. T. Ang, D. L. Clements and N. Vahdau, A dual-reciprocity boundary element method for a class of elliptic boundary value problems for non-homogeneous anisotropic media, *Eng. Anal. Bound. Elms.*, **27**(2003), 49-55
- (5) W. T. Ang, J. Kusama and D. L. Clements, A boundary element method for a second order elliptic partial differential equation with variable coefficients, *Eng. Anal. Bound. Elms.*, **18**(1996), 311-316
- (6) P. W. Partridge, C. A. Brebbia, and L. C. Wrobel, *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*, Comp. Mech. Pub., 1992
- (7) A. J. Kassab and E. Divo, A generalized boundary integral equation for isotropic heat conduction with spatially varying thermal conductivity, *Eng. Anal. Bound. Elms.*, **18**(1996), 273-286
- (8) 神谷・許, 非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法, 日本機械学会論文集 (A), **64**(1998), 147-154
- (9) 許・神谷, 非同次・非線形問題に対する境界要素の一定式と解法, 続報: 未知関数の導関数を含む非同次項の場合, 日本機械学会論文集(A), **64**(1998), 1341-1347
- (10) 神谷・橋爪・箕浦, 境界要素法における計算点解析法の複雑な支配方程式の問題への適用, 計算数理工学論文集, **3**(2003), 13-16
- (11) 神谷・橋爪・箕浦, 境界要素法における計算点解析法の複雑な支配方程式の問題への適用, 第2報: 板曲げ問題における考察, 計算数理工学論文集, **3**(2003), 17-20

Table 1 Comparison of results

	$x$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$y = 0.1$	Exact	5.025E-01	5.500E-01	5.911E-01	6.250E-01	6.512E-01	6.696E-01	6.809E-01	6.855E-01	6.844E-01
	Method 1	5.035E-01	5.502E-01	5.905E-01	6.241E-01	6.503E-01	6.691E-01	6.806E-01	6.855E-01	6.846E-01
	Method 2	5.025E-01	5.500E-01	5.911E-01	6.250E-01	6.512E-01	6.696E-01	6.809E-01	6.855E-01	6.844E-01
$y = 0.3$	Exact	4.103E-01	4.688E-01	5.236E-01	5.729E-01	6.154E-01	6.500E-01	6.763E-01	6.944E-01	7.048E-01
	Method 1	4.097E-01	4.675E-01	5.221E-01	5.717E-01	6.148E-01	6.500E-01	6.769E-01	6.953E-01	7.055E-01
	Method 2	4.103E-01	4.688E-01	5.236E-01	5.729E-01	6.154E-01	6.500E-01	6.763E-01	6.944E-01	7.048E-01
$y = 0.5$	Exact	3.141E-01	3.804E-01	4.469E-01	5.114E-01	5.714E-01	6.250E-01	6.704E-01	7.065E-01	7.330E-01
	Method 1	3.133E-01	3.794E-01	4.463E-01	5.114E-01	5.721E-01	6.262E-01	6.719E-01	7.078E-01	7.338E-01
	Method 2	3.141E-01	3.804E-01	4.469E-01	5.114E-01	5.714E-01	6.250E-01	6.704E-01	7.065E-01	7.330E-01
$y = 0.7$	Exact	2.139E-01	2.841E-01	3.593E-01	4.375E-01	5.161E-01	5.921E-01	6.623E-01	7.237E-01	7.742E-01
	Method 1	2.137E-01	2.841E-01	3.599E-01	4.386E-01	5.176E-01	5.936E-01	6.635E-01	7.244E-01	7.743E-01
	Method 2	2.139E-01	2.841E-01	3.593E-01	4.375E-01	5.161E-01	5.921E-01	6.623E-01	7.237E-01	7.742E-01
$y = 0.9$	Exact	1.093E-01	1.786E-01	2.581E-01	3.472E-01	4.444E-01	5.469E-01	6.504E-01	7.500E-01	8.403E-01
	Method 1	1.095E-01	1.790E-01	2.587E-01	3.481E-01	4.452E-01	5.474E-01	6.505E-01	7.496E-01	8.396E-01
	Method 2	1.093E-01	1.786E-01	2.581E-01	3.472E-01	4.444E-01	5.469E-01	6.504E-01	7.500E-01	8.403E-01

Table 2 Comparison between present and Ang's results

$x$	0.4	0.6	0.4	0.6	0.4	0.6	0.4	0.6
$y$	0.2	0.2	0.4	0.4	0.6	0.6	0.8	0.8
Exact	6.000E-01	6.604E-01	5.435E-01	6.383E-01	4.762E-01	6.098E-01	3.947E-01	5.714E-01
Method 1 ( $n = 80, m = 9$ )	5.987E-01	6.599E-01	5.428E-01	6.390E-01	4.769E-01	6.103E-01	3.959E-01	5.726E-01
Method 2 ( $n = 80, m = 9$ )	6.000E-01	6.604E-01	5.435E-01	6.383E-01	4.762E-01	6.098E-01	3.947E-01	5.714E-01
Ang 1 ( $n = 40, m = 16$ )	5.979E-01	6.577E-01	5.424E-01	6.365E-01	4.757E-01	6.087E-01	3.945E-01	5.709E-01
Ang 2 ( $n = 120, m = 81$ )	5.996E-01	6.598E-01	5.433E-01	6.379E-01	4.761E-01	6.095E-01	3.947E-01	5.713E-01