

LBIE 法を適用した領域積分項のメッシュレス評価

MESHLESS CALCULATION OF DOMAIN INTEGRAL TERM USING LBIE

大上 俊之¹⁾, 中村 裕充²⁾, 小山 茂³⁾

Toshiyuki OHKAMI, Hiromitsu NAKAMURA and Shigeru KOYAMA

1) 信州大学工学部社会開発工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: tohkami@gipwc.shinshu-u.ac.jp)

2) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: t01a332@mail.shinshu-u.ac.jp)

3) 信州大学工学部社会開発工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: koyama@gipwc.shinshu-u.ac.jp)

This paper describes an application of local boundary integral equation (LBIE) method to solve two-dimensional potential problems. The LBIE method proposed by Zhu *et al.*⁽⁸⁾ is a new meshless scheme in which the domain and boundary integrals are calculated by the element free Galerkin method based on the moving least squares method (MLSM). A formulation with the modified shape function of MLSM is presented. Numerical examples are shown and results by LBIE method are examined by comparing with those by the computing point analysis scheme, the method using Fourier series and exact solutions.

Key Words: Local Boundary Integral Equation Method, Meshless Method, Poisson Equation

1. はじめに

非同次項や非線形項を含む微分方程式に対して, 線形作用素に関する基本解を用いた境界要素法で解析しようとする, 積分方程式に非同次項・非線形項と基本解との積に関する領域積分を含むことになり, 境界上の離散化だけで解析できるという境界要素法の大きな特徴が損なわれることになる. これに対し, 二重相反法, 多重相反法による方法⁽¹⁾や, 非同次項を Fourier 級数に展開して⁽²⁾ 領域積分を境界積分に変換し, 領域積分を必要としない方法が提案されている. また, 神谷らは非同次・非線形項を空間座標の多項式で近似し, これと基本解の積の領域積分を境界積分に変換する計算点解析法を開発し, 種々の問題への適用を行っている.⁽³⁾⁻⁽⁷⁾ これらの手法は領域積分項について部分積分を行うことによって領域積分を境界積分に変換して解析を行おうとするものである.

一方, Zhu ら⁽⁸⁾⁻⁽¹⁰⁾ は, 境界積分方程式の新しい解法としてソース点の節点値をソース点近傍の局所領域における境界値問題として解く局所境界積分方程式 (LBIE) 法を示している. LBIE 法では, 領域全体についての境界要素の離散化を必要とせず, 非同次項の領域積分についても局所領域に対してエレメントフリーガラキン法 (EFGM)⁽¹¹⁾ を適用することによってメッシュレス化を図っている.

本研究では, 領域積分項のメッシュレス化法として Poisson 方程式を対象に LBIE 法を適用し, 境界積分への変換手法である Fourier 級数に展開する方法, 計算点解析法と比較検討

する. 通常の EFGM では物理量の関数近似に移動最小二乗法 (MLSM) を用いるため, 近似曲線が必ずしも節点を通らない. ここでは, 節点のポテンシャルで表現する近似関数⁽¹²⁾ を LBIE 法に適用し, 定式化を行う.

2. 局所境界積分方程式

境界 Γ で囲まれた 2 次元領域 Ω における Poisson 方程式を考える.

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, u) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

ここに, u はポテンシャル, b は非同次・非線形項を表す. 基本解 u^* を用いて式 (1) を積分方程式に変換すれば次のようになる.

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}) \frac{\partial u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} u^* b d\Omega \quad (2)$$

ここに, \mathbf{y} はソース点, n は境界外向き単位法線である.

今, Fig.1 に示すような全体領域 Ω の内部にソース点 \mathbf{y} を含むサブ領域 Ω_s を考えると, 式 (1) は

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega_s} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\partial\Omega_s} u(\mathbf{x}) \frac{\partial u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega_s} u^* b d\Omega \quad (3)$$

のように変換することができる。ここに、 $\partial\Omega_s$ はサブ領域 Ω_s の境界である。通常の BEM では、全体境界 Γ において $u, q = \partial u / \partial n$ のどちらかの値が境界条件として規定されるが、局所境界 $\partial\Omega_s$ ではいずれも未知のままである。

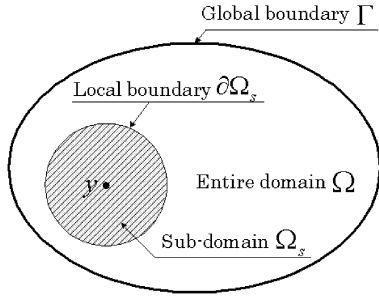


Fig. 1 Entire domain and sub-domain

ここで、次式で定義されるコンパニオン解 u' を導入する。

$$\nabla^2 u' = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_s \quad (4)$$

$$u' = u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{on} \quad \partial\Omega_s \quad (5)$$

$u^{**} = u^* - u'$ を支配方程式 (1) に対する重み関数として適用し、部分積分することにより次式を得る。

$$\int_{\Omega_s} -u(\mathbf{x}) \nabla^2 u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_s} u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega_s} u(\mathbf{x}) \frac{\partial u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega_s} u^{**} b d\Omega \quad (6)$$

サブ領域 Ω_s 内で $-\nabla^2 u^{**} = -\nabla^2 u^* + \nabla^2 u' = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ および局所境界 $\partial\Omega_s$ 上で $u^{**} = 0$ であることより、式 (6) は全体領域 Ω 内のソース点 \mathbf{y} について

$$u(\mathbf{y}) = - \int_{\partial\Omega_s} u(\mathbf{x}) \frac{\partial u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega_s} u^{**} b d\Omega \quad (7)$$

となる。

サブ領域 Ω_s としてソース点 \mathbf{y} を中心とした半径 r_0 を考えると、2次元ポテンシャル問題の基本解が

$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (8)$$

で与えられることから、 u^{**} は次のようになる。

$$u^{**} = u^* - u' = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r} \quad (9)$$

ソース点 \mathbf{y} が全体境界 Γ 上にある場合は、Fig.2 に示すように $\partial\Omega_s = L_s \cup \Gamma_s$ であり、 L_s 上では $u^{**} = 0$ となることから、

$$\alpha(\mathbf{y})u(\mathbf{y}) = - \int_{\partial\Omega_s} u(\mathbf{x}) \frac{\partial u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_s} u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega_s} u^{**} b d\Omega \quad (10)$$

を得る。ここに、 α は境界の形状によって決まる係数である。

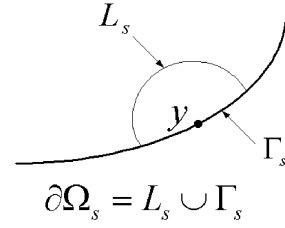


Fig. 2 Local boundary $\partial\Omega_s$ for a source point \mathbf{y} on the global boundary Γ

このように、全体領域 Ω 内のソース点 \mathbf{y} のポテンシャル値がサブ領域 Ω_s に局所化された境界値問題を解くことによって得られることになる。

3. 評価点における $u, \frac{\partial u}{\partial n}$ の決定方法

式 (7), (10) の局所境界 $\partial\Omega_s$ 上、およびサブ領域 Ω_s 内の評価点におけるポテンシャル u は、移動最小二乗法 (MLSM) によって評価点近傍 (影響領域) の節点値の関数として表現される。なお、影響領域は関数近似のための領域であり、LBIE における局所領域とは異なるものである。

任意の評価点 \mathbf{x} における関数 $u(\mathbf{x})$ の近似関数 $u^h(\mathbf{x})$ を以下のように表す。

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (11)$$

ここに、 m は近似に用いた項数、 $p_j(\mathbf{x})$ は空間座標の多項式であり、本研究では

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y] \quad m = 3 \quad (12)$$

を用いている。 a_j は未定係数であり、次の重み付き二乗和 J を最小にすることによって求められる。

$$J = \sum_i^n w(r_i) (u^h(\mathbf{x}_i) - u_i)^2 \quad (13)$$

ここに、 n は評価点 \mathbf{x} 近傍 (影響領域内) の節点数、 \mathbf{x}_i, u_i は節点 i の位置ベクトル、節点値であり、 r_i は評価点と節点 i の距離、 $w(r_i)$ は評価点への節点 i の寄与度を与える重み関数である。このように評価点の値が n 個の節点値によって表現される。式 (13) の停留条件より \mathbf{a} を求め、整理することにより近似関数 $u^h(\mathbf{x})$ が形状関数 ϕ と節点値 u の積和として

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_i^n \phi_i(\mathbf{x}) u_i = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (14)$$

のように表現できる。

式 (13) に示すように、MLSM は重み付きの最小二乗法であることから、一般に近似関数 $u^h(\mathbf{x})$ は

$$u^h(\mathbf{x}_j) \neq u_j \quad (15)$$

となることが特徴である。

ここで、節点 x_j におけるポテンシャルを U_j とすると

$$u^h(\mathbf{x}_j) = U_j \quad (16)$$

となり、これを全節点について適用すると、次式が得られる。

$$\Phi_N \mathbf{u} = \mathbf{U} \quad (17)$$

ここに

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}_1) & \phi_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & \phi_N(\mathbf{x}_1) \\ \phi_1(\mathbf{x}_2) & \phi_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & \phi_N(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(\mathbf{x}_N) & \phi_2(\mathbf{x}_N) & \cdots & \phi_N(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{U}^T = [U_1, U_2, \dots, U_N] \quad (19)$$

であり、 N は全体領域の総節点数を示す。式 (17) より $\mathbf{u} = \Phi_N^{-1} \mathbf{U}$ となることから、これを式 (14) へ代入して

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \Phi_N^{-1} \mathbf{U} = \Psi(\mathbf{x}) \mathbf{U} \quad (20)$$

が得られ、近似関数 $u^h(\mathbf{x})$ が各節点のポテンシャル \mathbf{U} で表現されることになる。また、 $u^h(\mathbf{x})$ の微分値は

$$\frac{\partial u^h(\mathbf{x})}{\partial n} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{x})}{\partial n} \mathbf{U} = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial n} \Phi_N^{-1} \mathbf{U} \quad (21)$$

となる。

式 (20) を式 (7) または式 (10) に代入し、境界条件を与えることによって次式を得る。

$$\alpha_i U_i = f_i + \sum_j^N K'_{ij} U_j \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

ここに

$$f_i = \int_{\Gamma_{sq}} u^{**} \bar{q} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \bar{u} \frac{\partial u^{**}}{\partial n} \, d\Gamma - \int_{\Omega_s} u^{**} b \, d\Omega \quad (23)$$

$$K'_{ij} = \int_{\Gamma_{su}} u^{**} \frac{\partial \psi_j}{\partial n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{sq}} \psi_j \frac{\partial u^{**}}{\partial n} \, d\Gamma - \int_{L_s} \psi_j \frac{\partial u^{**}}{\partial n} \, d\Gamma \quad (24)$$

である。ここに、 \bar{u} 、 \bar{q} はそれぞれ境界 Γ_{su} 、 Γ_{sq} 上における既知の境界値を表し、 $\Gamma_s = \Gamma_{su} \cup \Gamma_{sq}$ である。ソース点 y が全体領域内に位置する場合は、 Γ_{su} 、 Γ_{sq} に関する境界積分は消えて、 $L_s = \partial\Omega_s$ となる。

最終的に U に関する次の代数方程式を得る。

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{f} \quad (25)$$

$$K_{ij} = -K'_{ij} + \alpha_i \delta_{ij} \quad (26)$$

境界条件を考慮して式 (25) を解くことによって、節点のポテンシャル値 \mathbf{U} を求めることができる。

4. 解析例

図 3 に示すような正方形領域における 2 次元 Poisson 方程式を解析する。最初に非同次項 b が座標の関数として

$$\nabla^2 u + 6.25 \frac{\sin 2.5x}{\sin 2.5} = 0$$

のように与えられる場合について、Fourier 級数に展開する方法、計算点解析法と比較する。境界要素は線形要素を用い、図 4 に示すように各辺ごとに 10 個の要素で離散化し、境界節点を 40 個、内部点を 5 個配置する。

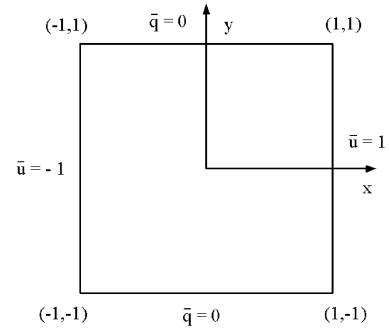


Fig. 3 Calculation model and mesh discretization

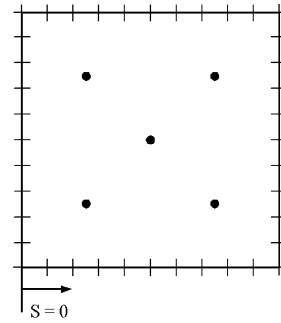


Fig. 4 Mesh discretization

LBIE の解析では影響領域を評価点を中心とした半径 $\rho = 3$ の円とし、重み関数を

$$w_i = 1 - 6\left(\frac{r_i}{\rho}\right)^2 + 8\left(\frac{r_i}{\rho}\right)^3 - 3\left(\frac{r_i}{\rho}\right)^4$$

とした。また、Fourier 級数による方法では周期を領域の大きさの 2 倍、項数を 5 とし、計算点解析法では b を 4 次の完全多項式、図 4 に示す全節点を境界計算点と内部計算点として計算を行った。

図 5 はポテンシャルの正解値に対する相対誤差の分布を境界に沿って示したもので、横軸は $S = 0$ からの距離 S を示している。LBIE 法における局所半径 r_0 の大きさは境界上の隣接節点間の距離としている。いずれの手法も精度良い解が得られており、最大誤差はそれぞれ Fourier 級数による方法で 1.62%、計算点解析法で 1.28%、LBIE 法で 2.53%であった。

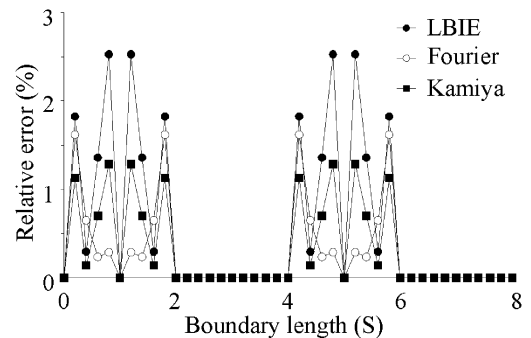


Fig. 5 Error distribution of potential values on boundary

次に、非同次項 \mathbf{b} が u の線形関数

$$\nabla^2 u + 2.5^2 u = 0$$

で与えられる場合について、内部点の数と局所領域の大きさ r_0 の影響を調べる。 r_0 と境界上の隣接節点間の距離 l との比を表すパラメータ $\lambda = \frac{r_0}{l}$ を用い、節点を領域に対して格子状に $64(8 \times 8)$ 点、 $121(11 \times 11)$ 点配置した場合についてパラメータ λ を変化させて解析を行う。それぞれの場合の正解値に対する相対誤差の分布を図 6、図 7 に示すが、 λ の値によって解の精度が大きく影響されることがわかる。図 8 は境界上の節点の数を等間隔に 40 個と固定し、格子状に配置した内部点の数 (IP) を変えてその影響を調べたものである。計算点解析法では、内部点の数が 9 個と少ない場合でも精度良い結果が得られているが、LBIE 法では内部点の数を密に設定する必要があることがわかる。

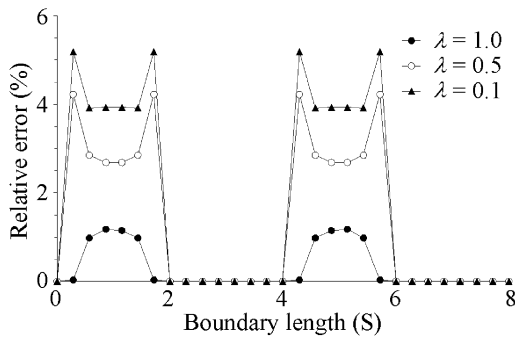


Fig. 6 Error distribution (64 nodes)

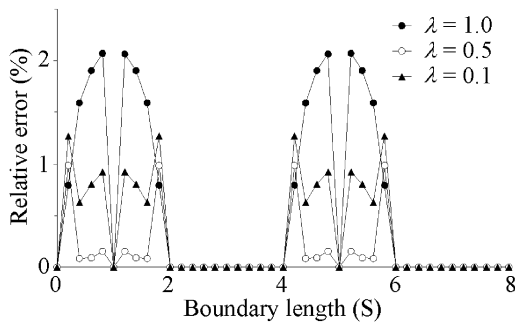


Fig. 7 Error distribution (121 nodes)

5. おわりに

本研究では、Poisson 方程式を対象に領域積分項のメッシュレス化について、ソース点近傍の局所領域で境界積分方程式を解く LBIE 法について検討した。簡単な計算例から、局所領域の大きさ r_0 および内部点の数が結果の精度に大きな影響を与えることがわかった。今回の計算では積分をすべて数値積分で行ったが、ソース点を含む部分については解析的に積分を評価することにより精度の向上が期待できると思われる。さらに、最適な局所領域の取り方、局所境界・局所領域内の評価点の数、MLSM との関連等について詳細に検討する必要がある。

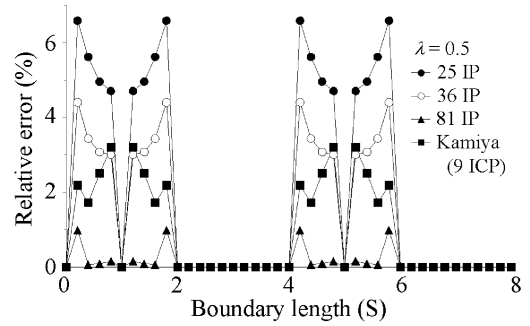


Fig. 8 Error distribution (40 boundary nodes)

参考文献

- (1) C.A.Brebbia: Two different approaches for transforming domain integrals to the boundary, *Mathematical and Computer Modelling*, **15** No.3-5 (1991), pp. 43-58.
- (2) W.Tang: Transforming domain into boundary integrals in BEM - A generalized approach, *Lecture Note in Engineering* (Eds C.A.Brebbia and S.A.Orszag), **35**(1988), Springer - Verlag.
- (3) 神谷紀夫, 許松青: 非同次・非線形問題に対する境界要素法の一形式と解法, *日本機械学会論文集 (A)*, **64**(1998), pp. 147-154.
- (4) 神谷紀夫, 許松青: 非同次・非線形問題に対する境界要素法の一形式と解法 (第 2 報, 未知関数の導関数を含む非同次項の場合), *日本機械学会論文集 (A)*, **64**(1998), pp. 1341-1347.
- (5) 許松青, 神谷紀夫: 計算点解析法による境界要素法のためのアダプティブ境界要素, *日本機械学会論文集 (A)*, **64**(1998), pp. 1598-1595.
- (6) 神谷紀夫, 鈴木崇之: 境界要素法における計算点解析法の傾斜機能材料の熱伝導問題への応用, *計算数理工学論文集*, **1**(2001), http://homer.shinshu-u.ac.jp/JASCOME/papers/CTEC2001/01_070615.pdf
- (7) 神谷紀夫, 鈴木崇之, 安藤孝彦: 境界要素法における計算点解析法の傾斜機能材料の熱伝導問題への応用, *境界要素法論文集*, **18**(2001), http://homer.shinshu-u.ac.jp/JASCOME/papers/BEM2001/01_101809.pdf
- (8) T.Zhu, J.-D.Zhang, S.N.Atluri: A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach, *Computational Mechanics*, **21**(1998), pp. 223-235.
- (9) T.Zhu, J.Zhang, S.N.Atluri: A meshless local boundary integral equation (LBIE) method for solving nonlinear problems, *Computational Mechanics*, **22**(1998), pp. 174-186.
- (10) Tulong Zhu, Jindong Zhang, S.N.Atluri: A meshless numerical method based on the local boundary integral equation (LBIE) to solve linear and non-linear boundary value problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **23**(1999), pp. 375-389.
- (11) T.Belytschko, Y.Y.Lu and L.Gu: Element-free Galerkin methods, *Int. J. Num. Methods Eng.*, **37**(1994), pp. 229-256.
- (12) 井浦雅司, 庭山孝史: Element Free Galerkin Method における基本境界条件の処理, *構造工学論文集*, **43A**(1997), pp. 355-364.