

# 傾斜機能材料中の非定常熱伝導問題に対する 時間ステップBEMへのDRMの適用 (3次元問題の検討)

## DUAL RECIPROCITY TIME-STEPPING BEM APPLIED TO THE TRANSIENT HEAT CONDUCTION PROBLEM OF FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS (STUDY ON THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS)

田中 正隆<sup>1)</sup>, 松本 敏郎<sup>2)</sup>, 高桑 晋<sup>3)</sup>

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO and Susumu TAKAKUWA

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinshu-u.ac.jp)  
2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: toshiro@gipwc.shinshu-u.ac.jp)  
3) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: s-takakuwa@artist.shinshu-u.ac.jp)

This paper presents a dual reciprocity boundary element method (DRBEM) applied to the transient heat conduction problem of functionally graded materials. The functionally graded material can be modeled as an inhomogeneous one where the thermal conductivity is a continuous function of coordinates. The integral equation formulation employs the fundamental solution of the Laplace equation for homogeneous materials, and hence from the inhomogeneous part of the governing differential equation a domain integral arises in the boundary integral equation. This domain integral is transformed into boundary integrals by using a new set of radial basis functions. Furthermore, time derivative is approximated by the time-stepping method, and the domain integral also appears from this approximation. The domain integral concerning the “pseudo” initial condition at each time step is also transformed into a boundary integral via the same dual reciprocity method. The details of the proposed DRBEM are presented, and a computer code is developed for two-dimensional problems. Through comparison of the results obtained by the computer code with the result of collocation method, the usefulness of the present DRBEM is demonstrated.

**Key Words:** Computational Mechanics, Time-stepping Boundary Element Method, Dual Reciprocity Method, Transient Heat Conduction, Three-dimensional

### 1. はじめに

傾斜機能材料に代表される非均質材料は、熱伝導率が場所ごとに連続的に変化する非均質媒体としてモデル化することができる<sup>(1)</sup>。境界要素法を用いてこのような非均質媒体中の非定常熱伝導問題を解析する際、定式化の際に必要な厳密基本解を求めることが困難となり、均質媒体に対する基本解を用いて定式化を行わなければならない。このとき、非均質性および初期条件に関する領域積分項が境界積分方程式の中に現れる。この領域積分項は領域内部を要素またはセルに区切ることにより計算することができるが、領域内部の要素分割にはたいへん手間がかかり、境界要素法の特長が半減してしまう<sup>(2)</sup>。

本研究では、非均質性および初期条件に由来する領域積分項に対して二重相反法 (DRM)<sup>(3), (4)</sup> を適用し、境界積分に置き換え近似的に評価する。また、ここでは時間微分を時間ステップ近似<sup>(5), (6)</sup> して積分方程式の定式化を行い、各時間ステップごとに順次解いてゆく。この定式化において時間ステップごとに現れる見かけの初期条件に対応する領域積分も、同じ DRM により境界積分に変換して評価する。DRM を用いると、境界積分方程式の中に現れる領域積分項を比較的簡単な近似関数と線形微分作用素の特解を用いて境界積分に変換することができる。したがって、DRM を適用することにより最終的に境界のみの離散化と、領域内部に評価点を配置することだけで解析が可能となり、効率的となる。

著者らは以前に、熱伝導率が場所ごとに連続的に変化する定常熱伝導問題に対して DRM を適用し、開発した解析プログラムにより本手法の有効性を示している<sup>(7)</sup>。本報では、定常熱伝導問題から非定常熱伝導問題への拡張を行い、定式化の詳細と開発した解析プログラムによる解析例を示し、本手法の有効性について検討を行う。

## 2. 理論

### 2.1. 支配微分方程式

熱伝導率が場所ごとに連続的に変化する非定常熱伝導問題に対する支配微分方程式は、内部発熱がない場合、次式で与えられる。

$$\nabla\{\lambda(x)\nabla u(x,t)\} = \rho c \dot{u}(x,t) \quad (1)$$

ただし、 $u(x,t)$  は温度、 $\lambda(x)$  は熱伝導率、 $\rho$  は密度、 $c$  は比熱、 $\nabla$  は微分演算子を表すものとし上付きのドット ( $\dot{\cdot}$ ) は時間による微分を表すものとする。また、上式において境界条件および初期条件は次式で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \bar{u}, & x \in \Gamma_u \\ q(x,t) &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = \bar{q}, & x \in \Gamma_q \\ \lambda(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} + h\{u(x,t) - u_a\} &= 0, & x \in \Gamma_a \\ u(x,0) &= u_0, \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $n$  は境界  $\Gamma$  上の単位外向き法線ベクトルであり、 $\partial u(x,t)/\partial n$  は  $u(x,t)$  の法線方向勾配を表すものとする。また、 $\Gamma_u$ 、 $\Gamma_q$ 、 $\Gamma_a$  はそれぞれ温度既知境界、熱流束既知境界、対流熱伝達境界である。さらに、 $\bar{u}$ 、 $\bar{q}$ 、 $u_0$  は既知の境界値および初期値であり、 $h$  は熱伝達率、 $u_a$  は外部雰囲気温度である。式 (1) は、次式のように均質性を表す項と非均質性を表す項、および時間項に展開することができる。

$$\nabla^2 u(x,t) = \frac{-1}{\lambda(x)} \left\{ \nabla\lambda(x)\nabla u(x,t) - \rho c \dot{u}(x,t) \right\} \quad (3)$$

### 2.2. DRM の適用

境界積分方程式の導出において、本研究では近似基本解として Laplace 方程式の基本解を使用する。3次元 Laplace 方程式の基本解は次式で与えられる。

$$u^*(x,y) = \frac{1}{4\pi r} \quad (4)$$

ただし、 $r$  はソース点  $y$  と観測点  $x$  との距離を表す。式 (3) の両辺に上式の基本解  $u^*(x,y)$  をかけ、考察領域  $\Omega$  全体で積分し、部分積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} c(y)u(y,t) + \int_{\Gamma} q^*(x,y)u(x,t)d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x,y)q(x,t)d\Gamma \\ = - \int_{\Omega} u^*(x,y) \left\{ \frac{-1}{\lambda(x)} \left( \nabla\lambda(x)\nabla u(x,t) - \rho c \dot{u}(x,t) \right) \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $c(y)$  はソース点の置かれている境界のなす角度により決まる定数である。また、 $q^*(x,y)$  は基本解  $u^*(x,y)$  の法線方向勾配を表し、具体形は次式となる。

$$q^*(x,y) = \frac{-1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (6)$$

式 (5) の左辺は境界積分となっているが、右辺は領域積分のまま残る。この領域積分を評価する際、領域内部を要素またはセルに区切るにより領域積分を評価する手法が提案されているが、この作業にはたいへん手間がかかり、境界要素法の特長が半減してしまう<sup>(2)</sup>。そこで、この領域積分項を境界積分に変換するために DRM を適用する。

まず、式 (3) の右辺を次式で近似する。

$$\frac{-1}{\lambda(x)} \left\{ \nabla\lambda(x)\nabla u(x,t) - \rho c \dot{u}(x,t) \right\} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} f(x,z^{\ell}) \quad (7)$$

ただし、 $N$  は境界節点数、 $L$  は内部選点数、 $\alpha^{\ell}$  は未知係数、 $f(x,z^{\ell})$  は近似関数、 $z^{\ell}$  は DRM 選点を表すものとする。ここで、次式を満たす特解を  $\hat{u}(x,z^{\ell})$  とする。

$$\nabla^2 \hat{u}(x,z^{\ell}) = f(x,z^{\ell}) \quad (8)$$

この特解  $\hat{u}(x,z^{\ell})$  を用いると、式 (3) の展開された支配微分方程式は未知係数  $\alpha^{\ell}$  と特解  $\hat{u}(x,z^{\ell})$  により次式のように書き表すことができる。

$$\nabla^2 u(x,t) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \nabla^2 \hat{u}(x,z^{\ell}) \quad (9)$$

上式の両辺に基本解  $u^*(x,y)$  をかけ、考察領域全体で積分し部分積分することにより、次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} c(y)u(y,t) + \int_{\Gamma} q^*(x,y)u(x,t)d\Gamma \\ - \int_{\Gamma} u^*(x,y)q(x,t)d\Gamma = \sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^{\ell} \left\{ c(y)\hat{u}(y,t) \right. \\ \left. + \int_{\Gamma} q^*(x,y)\hat{u}(x,z^{\ell})d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x,y)\hat{q}(x,z^{\ell})d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 $\hat{q}(x,z^{\ell})$  は特解  $\hat{u}(x,z^{\ell})$  の法線方向勾配

$$\hat{q}(x,z^{\ell}) = \frac{\partial \hat{u}(x,z^{\ell})}{\partial n} \quad (11)$$

を表す。式 (10) より、すべて境界積分に変換された境界積分方程式が得られていることが分かる。式 (10) の境界積分方程式を、 $N$  個の境界節点においたソース点から全ての DRM 選点に対して適用することにより、 $N$  個の式が得られる。また、同様に  $L$  個の内部選点においたソース点から全ての DRM 選点に対して適用することにより、 $L$  個の式が得られる。これらの  $N+L$  個の式は、マトリックス形式で次式のように一つにまとめることができる。

$$Hu - Gq = [H\hat{U} - G\hat{Q}]\alpha \quad (12)$$

ここで、本研究では近似関数として観測点  $x$  と DRM 選点  $z^{\ell}$  との距離  $r^{\ell}$  の関数を使用する。近似関数で用いられる距離  $r^{\ell}$  は基本解で用いられる  $r$  とは意味が異なるので注意が必要である。

DRM で用いられる近似関数に対しては、さまざまな関数が使われており多くの研究がなされている。距離の関数を使

用することが一般的である．本研究では近似関数として次式を使用する．

$$f(x, z^\ell) = \begin{cases} (1 - r^\ell)^4(4r^\ell + 1), & 0 \leq r^\ell \leq 1 \\ 0, & r^\ell \geq 1 \end{cases} \quad (13)$$

上式は，Compactly Supported Radial Basis Function<sup>(4)</sup> と呼ばれる近似関数であり， $r^\ell = |x - z^\ell|/a$  である． $a$  は近似関数が影響する半径であり，全ての境界節点と内部選点に影響するように，すなわち  $r^\ell \leq 1$  となるように  $a$  を定める．本研究では  $a = 1$  としている．他の研究では，領域内で近似関数が影響する半径を限定することも提案されているが，本研究では領域内で半径を限定することによる考察は行わない．後に示すが，本研究の定式化では温度の座標微分を近似関数を用いて評価する手法を適用するため，近似関数の座標微分が  $r^\ell = 0$  において連続となることを考慮しなければならない．

近似関数として式 (13) を使用すると，式 (8) を満たす特解  $\hat{u}(x, z^\ell)$  も距離  $r^\ell$  の関数となり，具体形は次式となる．

$$\hat{u}(x, z^\ell) = \frac{1}{6}(r^\ell)^2 - \frac{1}{2}(r^\ell)^4 + \frac{2}{3}(r^\ell)^5 - \frac{5}{14}(r^\ell)^6 + \frac{1}{14}(r^\ell)^7 \quad (14)$$

同様に特解の法線方向勾配  $\hat{q}(x, z^\ell)$  も  $r^\ell$  の関数となる．

$$\hat{q}(x, z^\ell) = \left( r_1 \frac{\partial x_1}{\partial n} + r_2 \frac{\partial x_2}{\partial n} + r_3 \frac{\partial x_3}{\partial n} \right) \times \left\{ \frac{1}{3} - 2(r^\ell)^2 + \frac{10}{3}(r^\ell)^3 - \frac{15}{7}(r^\ell)^4 + \frac{1}{2}(r^\ell)^5 \right\} \quad (15)$$

ただし， $r_1, r_2$  および  $r_3$  は  $r^\ell$  の  $x_1, x_2$  および  $x_3$  方向成分を表すものとする．2点  $x, z^\ell$  を決定することにより近似関数と特解  $\hat{u}(x, z^\ell)$ ，および特解の法線方向勾配を求めることができる．

### 2.3. 未知係数

DRM を適用し領域積分項を境界積分に変換する際，未知係数と近似関数を用いて定式化を進めてきた．ここでは，未知係数を決定するための手法を示す．

式 (7) を再記する．

$$\sum_{\ell=1}^{N+L} \alpha^\ell f(x, z^\ell) = \frac{-1}{\lambda(x)} \left\{ \nabla \lambda(x) \nabla u(x, t) - \rho c \dot{u}(x, t) \right\} \quad (16)$$

ここで，近似関数  $f(x, z^\ell)$  は2点  $x$  と  $z^\ell$  を決定することにより既知関数となる．この関係式が全ての境界節点と内部選点に対して成り立つと仮定すると，未知係数  $\alpha^\ell$  を求めることができ，マトリックス形式で書き表すと次式となる．

$$\alpha = F^{-1} \left[ \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_{x_1} + \mathbf{K}_2 \mathbf{u}_{x_2} + \mathbf{K}_3 \mathbf{u}_{x_3} - \mathbf{K}_t \dot{\mathbf{u}} \right] \quad (17)$$

ただし， $F^{-1}$  は  $F$  の逆行列を表し，

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x^1, z^1) & \dots & f(x^1, z^{N+L}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x^{N+L}, z^1) & \dots & f(x^{N+L}, z^{N+L}) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\lambda(x^1)} \frac{\partial \lambda(x^1)}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{-1}{\lambda(x^{N+L})} \frac{\partial \lambda(x^{N+L})}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{u}_{x_m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x^1, t)}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial u(x^{N+L}, t)}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \frac{\rho c}{\lambda(x^1)} \\ \vdots \\ \frac{\rho c}{\lambda(x^{N+L})} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x^1, t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial u(x^{N+L}, t)}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (22)$$

である．ただし， $x^i$  は全ての境界節点と内部選点の内， $i$  番目の点を表す．ここで，温度  $u(x, t)$  の座標微分を近似関数を用いて評価する．

まず，温度  $u(x, t)$  を次式で近似する．

$$u(x, t) = \sum_{\ell=1}^{N+L} \beta^\ell f(x, z^\ell) \quad (23)$$

ただし， $\beta^\ell$  は未知係数， $f(x, z^\ell)$  は近似関数を表す．ここで上式を一回微分すると次式を得る．

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_m} = \sum_{\ell=1}^{N+L} \beta^\ell \frac{\partial f(x, z^\ell)}{\partial x_m} \quad (24)$$

式 (23)，式 (24) が全ての境界節点と内部選点に対して成り立つと仮定すると未知係数  $\beta^\ell$  が消去でき，温度の座標微分は次式のように評価することができる．

$$\mathbf{u}_{x_m} = \mathbf{F}_{x_m} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (25)$$

ただし，

$$\mathbf{F}_{x_m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^1, z^1)}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial f(x^1, z^{N+L})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x^{N+L}, z^1)}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial f(x^{N+L}, z^{N+L})}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (26)$$

である．この近似関数の微分は式 (13) の近似関数を使用するとき具体的に次式となる．

$$\frac{\partial f(x, z^\ell)}{\partial x_m} = \frac{r_m^\ell}{r^\ell} \left\{ -20r^\ell + 60(r^\ell)^2 - 60(r^\ell)^3 + 20(r^\ell)^4 \right\} \quad (27)$$

また，温度  $u(x, t)$  の時間微分に関しては差分近似を適用する．このとき，初回の計算においては後退差分近似，2回

目以降の計算においては二次曲線差分近似を適用するものとする。このとき、初回の計算においての近似式は次式となる。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{u(x, t) - u(x, t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (28)$$

ただし、 $\Delta t$  はタイムステップ幅、 $u(x, t - \Delta t)$  は1ステップ前の温度を表すものとする。また、2回目以降の差分近似に次式を適用する。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{3u(x, t) - 4u(x, t - \Delta t) + u(x, t - 2\Delta t)}{2\Delta t} \quad (29)$$

ただし、 $u(x, t - \Delta t)$  は1ステップ前の温度、 $u(x, t - 2\Delta t)$  は2ステップ前の温度を表すものとする。1ステップまたは2ステップ前の各点における温度を見かけの初期条件として計算を進める。

したがって、未知係数  $\alpha^\ell$  は次式のようにまとめて書き表すことができる。

$$\alpha = F^{-1} \left\{ (K_1 F_{x_1} + K_2 F_{x_2} + K_3 F_{x_3}) F^{-1} - K_p \right\} u - F^{-1} t_0 \quad (30)$$

ただし、 $K_p$  は現在求めている温度  $u(x, t)$  の差分近似に関する係数、 $t_0$  は初期条件、又は見かけの初期条件に関する既知ベクトルを表す。この未知係数  $\alpha$  を離散化された式 (12) へ代入し整理すると、次に示す線形の式を得る。

$$Hu - Gq = [H\hat{U} - G\hat{Q}] [Ru - T_0] \quad (31)$$

ただし、

$$R = F^{-1} \left\{ (K_1 F_{x_1} + K_2 F_{x_2} + K_3 F_{x_3}) F^{-1} - K_p \right\} \quad (32)$$

$$T_0 = F^{-1} t_0 \quad (33)$$

とする。式 (31) を境界条件より未知量と既知量に振り分け、連立方程式を解くことにより、各タイムステップにおける境界上の未知量と領域内部の未知温度を求めることができる。

### 3. 数値解析例

本手法の有効性を示すために、2つの数値解析例を示す。まず均質媒体について解析を行い、厳密解と比較し有効性を確認する。次に非均質媒体について解析を行い、選点法と比較し有効性を確認する。

#### 3.1. 解析例 1

Fig. 1 に示す直方体モデルを用いて数値解析を行う。境界節点を122点、境界を四角形2次要素を用いて40要素に分割する。内部選点は領域内部に  $x_1$  方向に7点、 $x_2, x_3$  方向にそれぞれ3点の計63点を均等に配置する。境界条件は、 $x_1$  に垂直な面において外部雰囲気温度  $u_a = 0$  [°C]、熱伝達率  $h = 1200$  [W/m<sup>2</sup>K] の対流熱伝達境界条件、その他の面においては断熱境界条件  $q = 0$  [W/m<sup>2</sup>] を与えるものとする。また、初期温度は領域全体に一樣に100 [°C] として与える。材料定数を、熱伝導率  $\lambda$ : 220 [W/mK]、密度  $\rho$ : 2700 [kg/m<sup>3</sup>]、比熱  $c$ : 900 [J/kgK] とする。

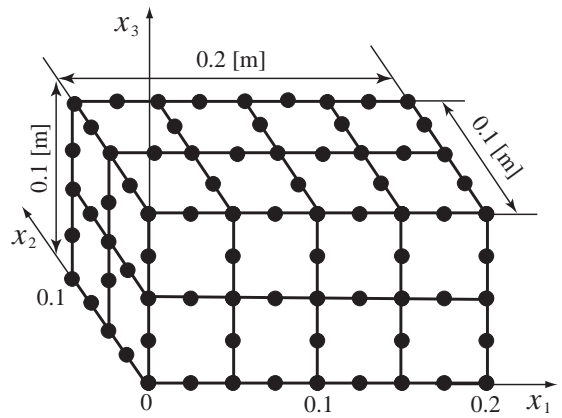


Fig. 1 Analysis model and discretization

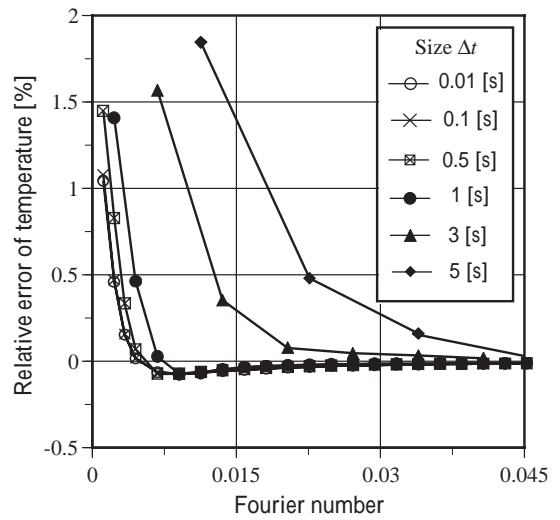


Fig. 2 Relative error of temperature

本手法では時間微分を時間ステップ近似しているため、精度のよい解を求めるには時間分割に留意する必要がある。適切なタイムステップ幅を決定しなければならない。Fig. 2 に、 $x_1 = 0$  における温度の解析解の、厳密解との相対誤差をタイムステップ別に示す。ここで横軸はフーリエ数と呼ばれる無次元時間であり、次式で表される。

$$F_o = k \frac{t}{L^2} \quad (34)$$

ここで、 $k$  は熱拡散率、 $t$  は時間、 $L$  は解析対象の長さである。Fig. 2 から、タイムステップ幅が小さいほうが早い時間で精度の良い結果が得られているが、1秒より小さくしてもこれ以上早い時間で精度の良い結果が得られないことがわかる。そこでタイムステップ幅を1[s]として解析を行う。また、タイムステップ幅が大きくともある程度計算ステップを繰り返すと精度の良い結果が得られることがわかる。

Fig. 3 に  $x_1$  軸上における温度分布の解析結果を厳密解と比較して示す。精度のよい結果が得られていることがわかる。著者らは内点においてもよい結果が得られていることを確認している。

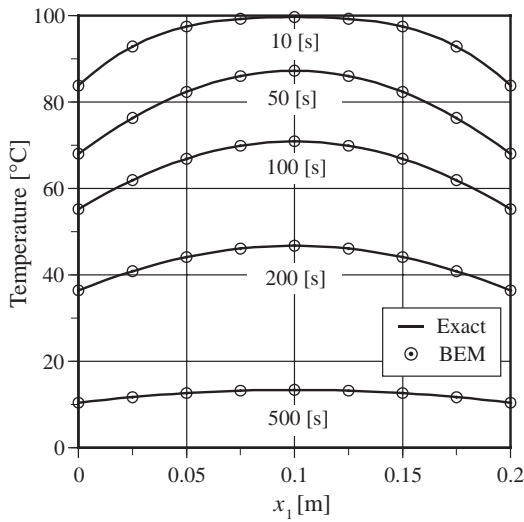


Fig. 3 Temperature variation

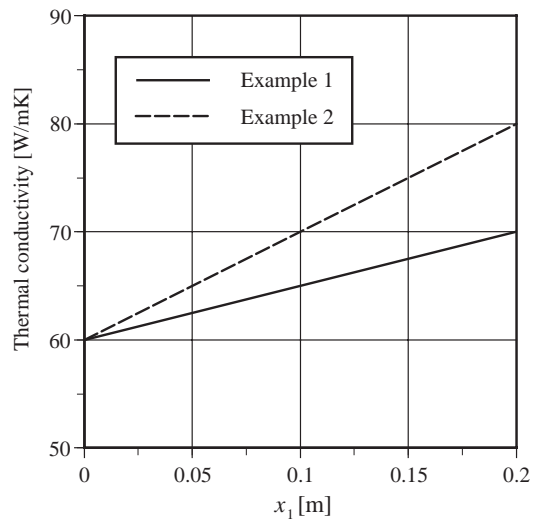


Fig. 5 Distribution of thermal conductivity

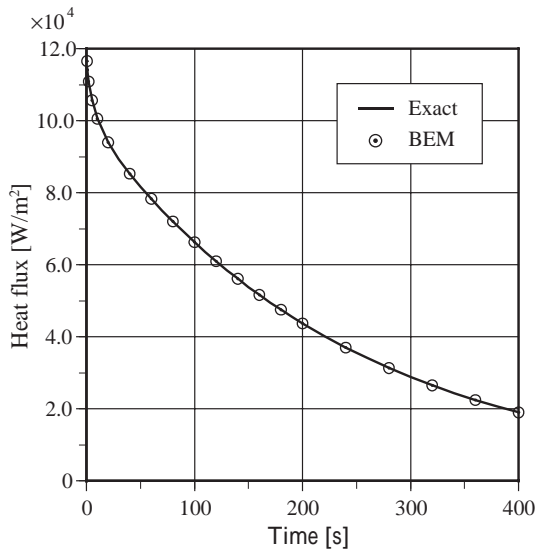


Fig. 4 Heat flux variation on  $x_1 = 0$

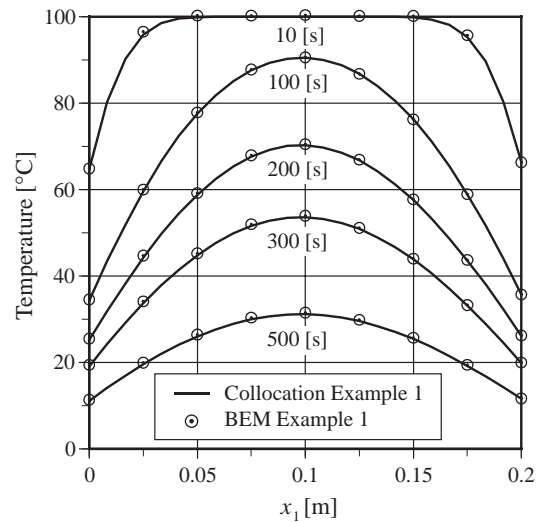


Fig. 6 Temperature distribution along axis  $x_1$

Fig. 4 に  $x_1 = 0$  の熱流束の変化を厳密解と比較して示す。精度のよい結果が得られていることがわかる。

### 3.2. 解析例 2

Fig. 1 に示すモデルを用いて、非均質媒体について数値解析を行う。境界条件は、 $x_1$  に垂直な面において外部雰囲気温度  $u_a = 0$  [°C]、熱伝達率  $h = 2000$  [W/m<sup>2</sup>K] の対流熱伝達境界条件、その他の面においては断熱境界条件  $q = 0$  [W/m<sup>2</sup>] を与えるものとする。また、初期温度は領域全体に一樣に 100 [°C] として与える。材料定数を、密度  $\rho : 7800$  [kg/m<sup>3</sup>]、比熱  $c : 440$  [J/kgK] とし、熱伝導率の変化を次式で仮定する 2 つの例題について考える。

- Example 1  $\lambda = 60 + 50x_1$  [W/mK] (35)

- Example 2  $\lambda = 60 + 100x_1$  [W/mK] (36)

また、熱伝導率の変化の様子を Fig. 5 に示す。

解析結果を選点法 (Collocation method) による解と比較して示す。この選点法による解析では、 $x_1$  方向のみを考慮することにより 1 次元に考え、 $x_1$  方向に  $N$  個の節点を配置する。さらに、支配微分方程式の時間項を差分近似することにより、 $x_1$  方向の温度を次式で仮定している。

$$u_{x_1} = \sum_{j=1}^N a_j x_1^{j-1} \quad (37)$$

ただし、 $a_j$  は未知係数である。上式が  $N$  個の節点に対して支配微分方程式、または境界条件を満たすとすると、 $N$  個の  $a_j$  を決定することができる。これをタイムステップごとに繰り返すことにより、各タイムステップごとの温度を求める。

タイムステップ幅を本手法、選点法ともに 1 秒として解析を行った。どちらの解法も 1 秒より小さくしてもこれ以上計算結果に影響しないことを確認している。

Fig. 6, 7 にそれぞれ Example 1, 2 の  $x_1$  軸上における温度

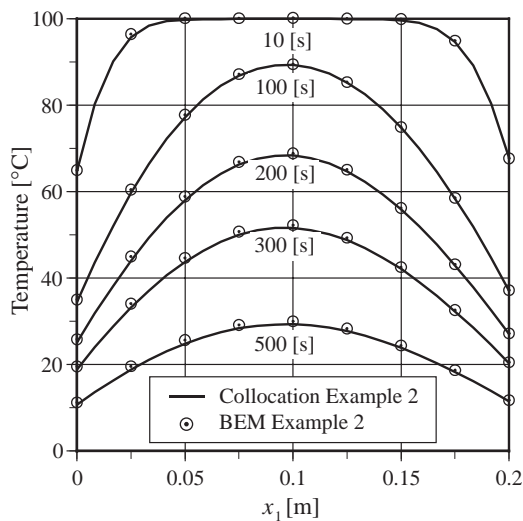


Fig. 7 Temperature distribution along axis  $x_1$

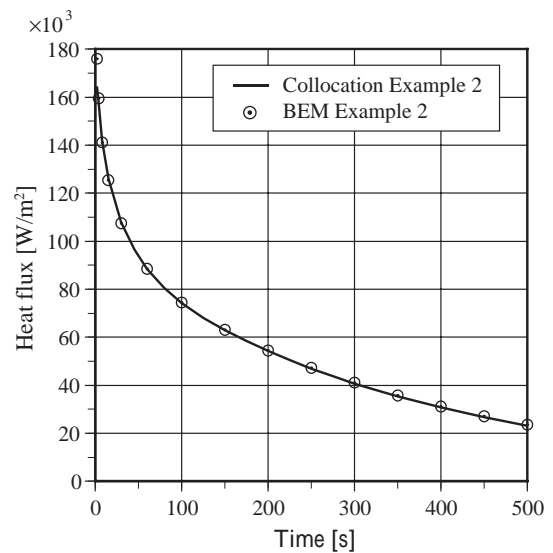


Fig. 9 Heat flux variation on  $x_1 = 0.2$

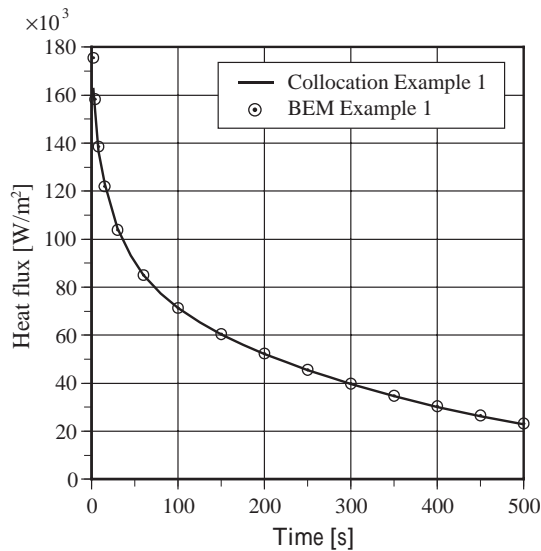


Fig. 8 Heat flux variation on  $x_1 = 0.2$

分布の解析結果を選点法と比較して示す。Example 1 においては2つの解法による解がほぼ一致しているが、Example 2 においては、 $x_1 = 0.05$  付近で2つの解にわずかに差がみられる。熱伝導率の変化の大きさが、計算精度に影響を与えると考えられる。また、要素分割を細かくし、内部選点を増やしても改善は見られなかった。内点においても同様の結果が得られた。Fig. 8, 9 にそれぞれ Example 1, 2 の  $x_1 = 0.2$  における熱流束の解析結果を選点法と比較して示す。どちらの結果も、2つの解法による解がほぼ一致していると言える。 $x_1 = 0$  においても同様の結果が得られた。Fig. 6 から Fig. 9 により、対流熱伝達境界 ( $x_1 = 0, 0.2$ ) においては、温度、熱流束ともに熱伝導率の変化の大きさが計算精度に影響していないことがわかる。

#### 4. おわりに

傾斜機能材料の非定常熱伝導問題に対する境界要素法への

二重相反法の適用を3次元問題について検討した。開発した解析プログラムにより、均質媒体と非均質媒体の2つの例題に対して数値解析を行った。解析例1を用い、均質媒体において厳密解と比較することにより、タイムステップ幅の大きさによる計算精度の影響について確認した。タイムステップ幅を小さくすることにより、早い時間で精度の良い解が得られることがわかる。解析例2では、非均質媒体において選点法と比較することにより、本手法の有効性を検討した。熱伝導率の変化の大きさに計算精度が影響されることがわかる。

#### 参考文献

- (1) 谷川義信, 赤井富一, 笠井輝明: 不均質性を有する平板の一次元非定常熱伝導・熱応力問題, 日本機械学会論文集 (A 編), **61**-583 (1995), pp.607-613.
- (2) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 境界要素法, 培風館, (1991).
- (3) P. W. Partridge, C. A. Brebbia, and L. C. Wrobel: The Dual Reciprocity Boundary Element Method, *Computational Mechanics Publications*, (1992).
- (4) C. S. Chen, C. A. Brebbia, and H. Power: Dual Reciprocity Method Using Compactly Supported Radial Basis Functions, *Commun. Numer. Meth. Engng.* **15** (1999), pp. 225-242.
- (5) 田中正隆, 松本敏郎, 楊慶峰: 時間ステップ近似スキームに基づく2次元非定常熱伝導方程式の境界要素法解析, シミュレーション, **11**-4 (1992), pp.294-301.
- (6) 田中正隆, 松本敏郎, 楊慶峰: 直交異方性体の非定常熱伝導問題に対する時間ステップ境界要素法, 日本機械学会論文集 (A 編), **59**-559 (1993), pp.856-862.
- (7) 田中正隆, 松本敏郎, 須田裕輔: 傾斜機能材料の定常熱伝導問題へのDRBEMの適用(3次元問題での検討), 計算数理工学論文集, Vol. 1 (2001), pp.1-6.