境界要素法論文集 Vol. 18 (2001 年 11 月), 論文 No. 01_102511 JASCOME

d 次元 $(d-2)$ 連結領域でのラプラス方程式に対する境界要素法

Boundary element method for the Laplace equation on a $(d-2)$-connected domain in d-dimension

清水 大輔 [1)]，大西 和榮 [2)]

Daisuke SHIMIZU and Kazuei ONISHI

1) 京都大学大学院情報学研究科 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: daisuke@acs.i.kyoto-u.ac.jp)
2) 茨城大学理学部数理科学学科 (〒310-8512 茨城県水戸市文京 2-1-1, E-mail: onishi@mito.ipc.ibaraki.ac.jp)

We deal with the boundary integral equation for the Laplace equation on a $(d-2)$-connected domain in d-dimension. We analyze the integral equation by the use of the spherical harmonic functions which are similar to the Fourier series in 2D. We show a mathematical structure of the solution to the boundary integral equation, and prove convergence of a numerical solution by the Galerkin method.

Key Words: Laplace Equation, Boundary Value Problem, Boundary Integral Equation, Spherical Harmonic Functions

1. 序

大西他 [(1)] は 2 次元の円環領域において, Laplace 方程式の境界値問題と初期値問題を汎用的に解くアルゴリズムの研究を行っている. この方法は境界積分方程式とその随伴方程式を利用し, 対象とする問題をある種の最小化問題に帰着させるものである. 論文 [(1)] では興味深い数値例が示されているものの, 数学的には未解決な部分を含んでいる. 本研究ではこの研究の中で境界値問題の部分にのみ限定し, 一般 d 次元での境界積分方程式の数学解析を論じ, その自然な応用として Galerkin 法による数値解析を論じる.

Ω を 2 次元の領域とし,E を 2 次元 Laplace 方程式の基本解とする:

$$E(x,y)=\frac{1}{2\pi}\log|x-y|.$$

Ω が有界で境界 $\partial\Omega$ が滑らかであるとき $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ が Laplace 方程式の Dirichlet 問題

$$\begin{aligned}\Delta u(x)&=0 && x\in\Omega,\\ u(x)&=f(x) && x\in\partial\Omega\end{aligned}$$

を満たすならば, $g=\dfrac{\partial u}{\partial n}$ とすると, $x\in\Omega$ に対しては

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)f(y)\mathrm{d}\sigma_y-\int_{\partial\Omega}E(x,y)g(y)\mathrm{d}\sigma_y \quad (1.1)$$

が成立することが知られており, $x\in\partial\Omega$ のときは

$$\frac{1}{2}f(x)=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)f(y)\mathrm{d}\sigma_y-\int_{\partial\Omega}E(x,y)g(y)\mathrm{d}\sigma_y \quad (1.2)$$

が成立する (例えば [(2)]). この境界積分方程式 (1.2) を未知関数 g の積分方程式として解けばよいが, 解が一意でない場合には Laplace 方程式の Neumann 境界値とはならないものが求まることが有り得る. Dirichlet 問題の一意的可解性と, g に対する積分方程式 (1.2) の一意的可解性は独立であることに注意する. 実際, 例えば Ω が円板の場合, その半径が 1 でない場合はこの境界積分方程式の解は一意であるが, 半径が 1 の場合には境界積分方程式の解は一意ではなく, 一般に Ω が単連結領域のときはその一意可解性は $\partial\Omega$ の解析的容量 (capacity) に依存することが知られている (木村 [(3)]). 一般次元における一般領域での (1.2) に相当する積分方程式の詳しい性質はあまり論じられておらず, 典型的な場合での結果を示すことが本研究の目的である.

2 次元の場合には, 調和函数が正則函数 (holomorphic function) の実部であるという事実を用い, 函数論を利用することも可能である. 特に円板領域の場合には正則函数の原点での巾級数展開と境界 S^1 上での Dirichlet data の Fourier 係数との関係を利用した精密な議論が可能となる. 円環領域の場合には一価性の問題があるが, 原点での Laurent 展開の係数と境界条件の Fourier 係数の関係から議論を行うことが可能である.

3 以上の次元では調和函数の議論を函数論に帰着させることはできないが, 球および同心球に囲まれた領域の場合には多次元の場合の Fourier 級数にあたる球面調和函数を利用することで 2 次元の場合と同様の精密な議論が行うことが可能である.

本研究では球面調和函数を利用して, 多次元の場合の境界積分方程式に対する考察を行う. 特殊な領域での成果ではあるが, その結果の大半は考察した領域と Laplacian を保存する微分同相な領域においては成立するものと考えられる.

2. 球面調和函数

本節では球面調和函数の諸性質を述べる.

$x \in \mathbb{R}^d$ に対して $r = |x|$, $\xi = x/|x|$ という極座標表示を導入すると, ユークリッド空間での Laplace 作用素 Δ は

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^{d-1}}\right) u$$

と表わされる. この $\Delta_{S^{d-1}}$ を $(d-1)$ 次元球面 S^{d-1} 上の Laplace-Beltrami 作用素という.

Definition 2.1 (球面調和函数)

$f \in C^\infty\left(S^{d-1}\right)$ が

$$\Delta_{S^{d-1}} f = -n(n+d-2)f$$

を満たすとき, f を n 次の球面調和函数という.

n 次の球面調和函数の全体を $L^2(S^{d-1})$ の内積で正規直交化したものを $\{Y_{nm}\}_{1 \le m \le M(n,d)}$ と表わすと, $\{Y_{nm} |\ 1 \le m \le M(n,d),\ n \ge 0\}$ は $L^2(S^{d-1})$ の完全正規直交系となることに注意する.

Definition 2.2 ($H^s(S^{d-1})$)

$(\mathscr{O}_\lambda,\ \varphi_\lambda,\ \chi_\lambda)$ をそれぞれ,S^{d-1} 上の局所座標近傍系, $\mathscr{O}_\lambda$ から $\mathbb{R}^{d-1}$ への座標変換, $\{\mathscr{O}_\lambda\}$ に付随する1の分解とする. $s \ge 0$ とするとき S^{d-1} 上の可測函数 f が *Sobolev* 空間 $H^s(S^{d-1})$ の元であるとは, 任意の λ に対し

$$(\chi_\lambda \cdot f) \circ \varphi_\lambda^{-1} \in H^s(\mathbb{R}^{d-1})$$

が成立することとする.

この定義と同値な条件として Lions-Magenes[(4)] では次の事実が示されている.

Proposition 2.3

$s \ge 0$ とする. $f \in L^2(S^{d-1})$ に対して, $f \in H^s(S^{d-1})$ であることと

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m}(1+n^2)^s \left|(f, Y_{nm})_{L^2(S^{d-1})}\right|^2 < \infty$$

が成立することは同値である.

また $L^2(S^{d-1})$ 上の斉次な核を持つ積分作用素について, 次の性質が成立することにも注意する.

Proposition 2.4

$p \in L^1(S^{d-1} \times S^{d-1})$ は, $\xi, \eta, \xi', \eta' \in S^{d-1}$ に対して $\xi \cdot \eta = \xi' \cdot \eta'$ が成立するとき $p(\xi,\eta) = p(\xi',\eta')$ を満たすとする. このとき積分作用素 P を

$$Pf(\xi) = \int_{S^{d-1}} p(\xi,\eta) f(\eta) \mathrm{d}\sigma_\eta$$

とするとき, ある $\{p_n\}$ が存在し

$$PY_{nm} = p_n Y_{nm}$$

が成立する.

3. d 次元 $(d-2)$ 連結領域での境界積分方程式

Ω は $\mathbb{R}^d$ の有界領域で境界 $\partial\Omega$ は滑らかであるとする. このとき $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ が Ω 上で調和ならば,Laplace 方程式の基本解

$$E(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log|x-y| & d=2, \\ \dfrac{1}{\omega_d(2-d)}|x-y|^{-d+2} & d \ge 3 \end{cases}$$

(但し ω_d は S^{d-1} の表面積) を用いると $x \in \partial\Omega$ に対しては

$$\frac{1}{2}u(x) - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)u(y)\mathrm{d}\sigma_y + \int_{\partial\Omega}E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\mathrm{d}\sigma_y = 0 \tag{3.1}$$

が成立する.

ここで,$\mathbb{R}^d$ の同心球領域 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d | r_1 < |x| < r_2\}$ での境界値問題を論じるため, 境界を $\Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^d |\, |x| = r_i\}$ $(i=1,2)$ と表わした場合, 次のように作用素 $\{A_{ij}\}, \{B_{ij}\}$ を導入する. すなわち $f_i = u|_{\Gamma_i}$, $g_i = \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_i}$ $(i=1,2)$ とおき, $x \in \Gamma_i$ に対して

$$A_{ij}f_j(x) = \int_{\Gamma_j}\frac{\partial E}{\partial n_y}(x,y)f_j(y)\mathrm{d}\sigma_y, \tag{3.2}$$

$$B_{ij}g_j(x) = \int_{\Gamma_j}E(x,y)g_j(y)\mathrm{d}\sigma_y \tag{3.3}$$

とする. これにより, 境界積分方程式は形式的には次のような作用素形の行列表示

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - A_{11} & -A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ -A_{21} & \frac{1}{2}I - A_{22} & B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

と同値になる. ここで I は恒等写像である.

この同心球領域 Ω 上で, 例えば以下のような Laplace 方程式の境界値問題について考える. すなわち $f_1 \in H^{3/2}(\Gamma_1)$, $g_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$ に対し,

$$\Delta u(x) = 0 \qquad x \in \Omega, \tag{3.5}$$

$$u(x) = f_1(x) \qquad x \in \Gamma_1, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g_2(x) \qquad x \in \Gamma_2 \tag{3.7}$$

を満たす $u \in H^2(\Omega)$ を求める境界値問題を考え, これに対して境界積分方程式 (3.1) を $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}$, $u|_{\Gamma_2}$ に対する境界積分方程式と考える. $u \in H^2(\Omega)$ がこの境界値問題 (3.5)–(3.7) の解であれば, そのトレースを $g_1 = \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}$, $f_2 = u|_{\Gamma_2}$ とすると (3.4) を満たすことは明らかであるが, f_1, g_2 に対し (3.4) を満たす g_1, f_2 を求めたものが (3.5)–(3.7) を満たす $u \in H^2(\Omega)$ の境界値になるかについては議論を要する. この問題は, 境界積分方程式 (3.1) の解の一意性の問題である.

その準備として,(3.2), (3.3) で定義される作用素 A_{ij}, B_{ij} の諸性質を調べる. $\xi \in S^{d-1}$ を用いて $x \in \Gamma_i$ を $x = r_i\xi$ の形で表わすと A_{ij}, B_{ij} の積分核は基本解から定まるある函数

$\{p_{ij}\}$, $\{q_{ij}\}$ を用いて

$$A_{ij}f_j(r_i\xi) = \int_{S^{d-1}} p_{ij}(\xi\cdot\eta)f_j(r_j\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta,$$
$$B_{ij}g_j(r_i\xi) = \int_{S^{d-1}} q_{ij}(\xi\cdot\eta)g_j(r_j\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta$$

の形で表わされる. この積分核は**Proposition 2.4** の仮定を満たしているので, ある実数列 $\{a_{ij,n}\}$, $\{b_{ij,n}\}$ が存在して

$$A_{ij}Y_{nm} = a_{ij,n}Y_{nm},$$
$$B_{ij}Y_{nm} = b_{ij,n}Y_{nm}$$

となる. この $\{a_{ij,n}\}$, $\{b_{ij,n}\}$ は具体的に書き下せるものであり, 例えば $(d,n) \neq (2,0)$ のときは

$$\begin{aligned}
a_{11,n} &= -\frac{d-2}{2(2n+d-2)},\\
b_{11,n} &= -\frac{r_1}{2n+d-2},\\
a_{12,n} &= \frac{n+d-2}{2n+d-2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n,\\
b_{12,n} &= -\frac{r_2}{2n+d-2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n,\\
a_{21,n} &= \frac{n}{2n+d-2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+d-2},\\
b_{21,n} &= -\frac{r_1}{2n+d-2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+d-2},\\
a_{22,n} &= \frac{d-2}{2(2n+d-2)},\\
b_{22,n} &= -\frac{r_2}{2n+d-2}
\end{aligned}$$

であり, $(d,n) = (2,0)$ のときは

$$\begin{aligned}
a_{11,0} &= -\frac{1}{2}, & b_{11,0} &= r_1\log r_1,\\
a_{12,0} &= 1, & b_{12,0} &= r_2\log r_2,\\
a_{21,0} &= 0, & b_{21,0} &= r_1\log r_2,\\
a_{22,0} &= \frac{1}{2}, & b_{22,0} &= r_2\log r_2
\end{aligned}$$

となる.

境界値問題 (3.5)–(3.7) に対して境界積分方程式 (3.4) を既知項と未知項に分離する. $L^2(\Gamma_1)\times L^2(\Gamma_2)$ で定義される作用素 $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ を

$$\mathscr{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - A_{11} & B_{12}\\ -A_{21} & B_{22}\end{pmatrix},\quad \mathscr{M} = \begin{pmatrix} B_{11} & -A_{12}\\ B_{21} & \frac{1}{2}I - A_{22}\end{pmatrix}$$

とする. ここで $\mathscr{L},\mathscr{M}$ は Laplace 方程式の境界値問題としてはそれぞれ, $H^{3/2}(\Gamma_1)\times H^{1/2}(\Gamma_2)$, $H^{1/2}(\Gamma_1)\times H^{3/2}(\Gamma_2)$ 上の作用素であるが, $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ を積分作用素として議論を行うために作用素の定義域をともに $L^2(\Gamma_1)\times L^2(\Gamma_2)$ としている点に注意する. 対象とする積分方程式は与えられた (f_1, g_2) $\in H^{3/2}(\Gamma_1)\times H^{1/2}(\Gamma_2)$ に対し,

$$\mathscr{L}\begin{pmatrix} f_1\\ g_2\end{pmatrix} + \mathscr{M}\begin{pmatrix} g_1\\ f_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{3.8}$$

を満たす $(g_1,\ f_2)\in L^2(\Gamma_1)\times L^2(\Gamma_2)$ を求める問題に帰着される. この連立境界積分方程式は, f_1, f_2, g_1, g_2 の球面調和函数展開を利用することにより, $d=2,\ r_2=1$ 以外のときは任意の $(f_1,g_2)\in H^1(\Gamma_1)\times L^2(\Gamma_2)$ に対して一意的な解 (g_1,f_2) を $L^2(\Gamma_1)\times H^1(\Gamma_2)$ に持つことがわかる. 一方,$d=2,\ r_2=1$ のときは連立積分方程式 (3.8) の解は一意に定まらず, 一意性を保証するには付帯条件

$$\int_{\Gamma_1} g_1(y)\mathrm{d}\sigma_y + \int_{\Gamma_2} g_2(y)\mathrm{d}\sigma_y = 0 \tag{3.9}$$

を課す必要があることがわかる. この付帯条件 (3.9) は積分方程式 (3.8) の解が一意なときは自動的に満たされていることにも注意する.

さらに解の正則性の議論から, $(f_1,g_2)\in H^{3/2}(\Gamma_1)\times H^{1/2}(\Gamma_2)$ のときは (3.8),(3.9) の解 (g_1,f_2) は境界値問題 (3.5)–(3.7) の未知境界値であることがわかる.

以下では $d\geq 3$ もしくは $r_2\neq 1$ を仮定して議論を進める. この場合は作用素 $\mathscr{M}$ の単射性は保証されるが, $L^2(\Gamma_1)\times L^2(\Gamma_2)$ 上の作用素としては有界な逆を持ち得ない.

$(f_1,g_2)\ \in\ L^2(\Gamma_1)\times L^2(\Gamma_2)$ を固定し, 正数 α に対して $L^2(\Gamma_1)\times L^2(\Gamma_2)$ 上の汎函数 J_α の最小化問題を考える:

$$\begin{aligned}
&J_\alpha(G_1,\ F_2)\\
&\quad = \left\|B_{11}G_1 - A_{12}F_2 + \left(\tfrac{1}{2}I - A_{11}\right)f_1 + B_{12}g_2\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\\
&\quad + \left\|B_{21}G_1 + \left(\tfrac{1}{2}I - A_{22}\right)F_2 - A_{21}f_1 + B_{22}g_2\right\|^2_{L^2(\Gamma_2)}\\
&\quad + \alpha\left(\|G_1\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \|F_2\|^2_{L^2(\Gamma_2)}\right),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

但し $(G_1,F_2)\ \in\ L^2(\Gamma_1)\times L^2(\Gamma_2)$. この最小化問題の解を (G_1^α, F_2^α) とすると, (G_1^α, F_2^α) は

$$(\alpha I + \mathscr{M}^*\mathscr{M})\begin{pmatrix} G_1^\alpha\\ F_2^\alpha\end{pmatrix} + \mathscr{M}^*\mathscr{L}\begin{pmatrix} f_1\\ g_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{3.11}$$

の解であることが容易にわかる.

再び球面調和函数を利用し, $1\leq m\leq M(n,d),\ n\geq 0$ に対して

$$f_{1,nm} = \int_{S^{d-1}} f_1(r_1\eta)Y_{nm}(\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta,$$
$$G_{1,nm}^\alpha = \int_{S^{d-1}} G_1^\alpha(r_1\eta)Y_{nm}(\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta$$

と展開係数を定め, $\{a_{ij,n}\}$, $\{b_{ij,n}\}$ を用いて成分毎の計算を行うと, α と n,m に依存しないある $C>0$ が存在して

$$\begin{aligned}
&\left|G_{1,nm}^\alpha\right|^2 + (1+n^2)\left|F_{2,nm}^\alpha\right|^2\\
&\qquad \leq C\left\{(1+n^2)\left|f_{1,nm}\right|^2 + \left|g_{2,nm}\right|^2\right\}
\end{aligned}$$

が成立する. さらに各 n,m ごとに

$$(G_{1,nm}^\alpha, F_{2,nm}^\alpha) \to (g_{1,nm}, f_{2,nm}) \qquad (\alpha\downarrow 0)$$

となることが示される. すなわち, (f_1,g_2) に滑らかさを課して $(f_1,g_2)\in H^1(\Gamma_1)\times L^2(\Gamma_2)$ とすると,
$(G_1^\alpha, F_2^\alpha)\in L^2(\Gamma_1)\times H^1(\Gamma_2)$ であり, $\alpha\to +0$ のとき

$$(G_1^\alpha, F_2^\alpha) \to (g_1, f_2) \qquad \text{in}\quad L^2(\Gamma_1)\times H^1(\Gamma_2)$$

が成立することがわかる.

以上のことをまとめると次の**Theorem** が得られる.

Theorem 3.1

$d \geq 3$ もしくは $r_2 \neq 1$ とし, $\alpha > 0$, $(f_1, g_2) \in H^1(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2)$ とする. このとき連立境界積分方程式 (3.8) の一意解を (g_1, f_2) と表わし, 正則化問題 (3.11) の解を (G_1^α, F_2^α) とする. このとき

$$\|(G_1^\alpha, F_2^\alpha) - (g_1, f_2)\|_{L^2(\Gamma_1)\times H^1(\Gamma_2)} \to 0 \qquad (\alpha \to +0)$$

が成立する. □

条件を一般化するため, 連結性に対する次の概念を導入する.

Definition 3.2 (l 連結)

S^l をユークリッド空間 $\mathbb{R}^{l+1}$ の中の l 次元単位球面とし, D^{l+1} を $(l+1)$ 次元単位球体とする. 位相空間 X が l 連結であるとは, $k = 0, 1, \ldots, l$ に対し, S^k から X への任意の連続写像 f が D^{k+1} から X への連続写像に拡張できることである.

$\mathbb{R}^3$ の同心球に挟まれた領域は 1-連結である. **Theorem 3.1** の証明は球面調和函数による展開を用いており, $\mathbb{R}^d$ の $(d-2)$-連結領域の境界値問題に対しては直ちに一般化することは不可能である. 但し,**Theorem 3.1** の結果は $\mathbb{R}^d$ の一般の $(d-2)$-連結領域の場合にも成立すると考えている. さらに本節では境界条件 (3.6),(3.7) のように内側で Dirichlet 条件, 外側で Neumann 条件を課した場合を扱っているが, 同心球領域であれば Dirichlet 条件と Neumann 条件の組合わせであれば本質的には本節の結果は同様の証明法により成立することがわかる.

4. Galerkin 法による数値解析

Galerkin 法を用いて正則化された問題 (3.11) を離散化して解くため, 次のような空間を考える. h を分割幅として, $L^2(\Gamma_i)$ の内近似 $\{X_{i,h},\ P_{i,h}\}(i = 1, 2)$ を次の性質を満たすように採る.

- $X_{i,h} \subset H^1(\Gamma_i)$,
- $\dim X_{i,h} < +\infty$,
- $P_{i,h} : L^2(\Gamma_i) \to X_{i,h}$ 　は直交射影,
- ある $C > 0$ と $\gamma > 0$ が存在し, 任意の $f_i \in H^1(\Gamma_i)$ に対して次が成立する:
$$\|P_{i,h} f_i - f_i\|_{L^2(\Gamma_i)} \leq C h^\gamma \|f_i\|_{H^1(\Gamma_i)},$$
- ある $C > 0$ が存在し, 任意の $f_i \in H^1(\Gamma_i)$ に対して次が成立する:
$$\|P_{i,h} f_i\|_{H^1(\Gamma_i)} \leq C \|f_i\|_{H^1(\Gamma_i)}.$$

この $\{X_{i,h}, P_{i,h}\}$ を用いて (3.11) を次のように離散化する. $\mathscr{L}_h = (P_{1,h}, P_{2,h})\mathscr{L}$, $\mathscr{M}_h = (P_{1,h}, P_{2,h})\mathscr{M}$, $\mathscr{M}_h^* = (P_{1,h}, P_{2,h})\mathscr{M}^*$ とおき, 離散化方程式を

$$(\alpha I + \mathscr{M}_h^* \mathscr{M}_h)\begin{pmatrix} G_{1,h}^\alpha \\ F_{2,h}^\alpha \end{pmatrix} + \mathscr{M}_h^* \mathscr{L}_h \begin{pmatrix} P_{1,h} f_1 \\ P_{2,h} g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

とする. この離散化方程式の解 $(G_{1,h}^\alpha, F_{2,h}^\alpha) \in X_{1,h} \times X_{2,h}$ に対し,$h \downarrow 0$ のとき次が成立することが容易にわかる.

$$(G_{1,h}^\alpha, F_{2,h}^\alpha) \to (G_1^\alpha, F_2^\alpha) \quad \text{in} \quad L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2) \qquad (4.2)$$

実際, A_{ij}, B_{ij} が compact 作用素であることから

$$\|A_{ij,h} - A_{ij}\|_{B(L^2(\Gamma_j), L^2(\Gamma_i))} \to 0,$$
$$\|A_{ij,h}^* - A_{ij}^*\|_{B(L^2(\Gamma_i), L^2(\Gamma_j))} \to 0$$

が成立し, また

$$\left\|(\alpha I + \mathscr{M}^* \mathscr{M})^{-1}\right\|_{B(L^2(\Gamma_1)\times L^2(\Gamma_2))} \leq \frac{1}{\alpha},$$
$$\left\|(\alpha I + \mathscr{M}_h^* \mathscr{M}_h)^{-1}\right\|_{B(X_{1,h}\times X_{2,h})} \leq \frac{1}{\alpha}$$

が成立することから通常の Galerkin 法の収束評価法を利用すれば (4.2) は示される.

参考文献

(1) 大西和榮, 大浦洋子: Laplace 方程式一般境界値問題の直接近似解法, 京都大学数理解析研究所講究録「偏微分方程式の数値解法とその周辺 II」, No.1198, (2000), pp.21-27.

(2) 境界要素法研究会編: 境界要素法の応用, (1987), コロナ社.

(3) Masato Kimura: *Asymptotic estimation for the condition numbers in BEM*, Numerische Mathematik **73**, (1996), No.2, pp.209-233.

(4) J.L.Lions, E.Magenes: *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications* **1**, (1972), Springer-Verlag.

(5) S.G.Mikhlin: *Integral equations and their applications to certain problems in mechanics, and technology.* 2nd rev. ed., (1964), Pergamon.