

# 摩擦を伴うすべりを許した楕円介在物を有する 半無限板の非線形解析 (続報)

## NONLINEAR ANALYSIS OF THE STRESSES IN AN ELASTIC SEMI-INFINITE PLATE CONTAINING A SLIDING ELLIPTIC INCLUSION WITH FRICTIONAL INTERFACE (CONTINUED REPORT)

土田 栄一郎<sup>1)</sup>, 荒居 善雄<sup>2)</sup>, 高窪 豊<sup>3)</sup>

Eiichiro TSUCHIDA, Yoshio ARAI and Yutaka TAKAKUBO

- 1) 埼玉大学工学部機械工学科 (〒 338-8570 埼玉県さいたま市下大久保 255, E-mail: tsuchida@mech.saitama-u.ac.jp)  
 2) 埼玉大学工学部機械工学科 (〒 338-8570 埼玉県さいたま市下大久保 255, E-mail: yarai@mech.saitama-u.ac.jp)  
 3) 旭光学工業株式会社 (〒 174-8639 東京都板橋区前野町 2-36-9)

In the previous paper, we presented the stress field in an elastic semi-infinite plate containing an elliptic inclusion, which is subjected to uniaxial tension or compression at infinity. The interface between the inhomogeneity and the surrounding matrix is assumed frictional sliding according to the Coulomb's law with no gap. The initial stress state is assumed as pure sliding, and the iteration method is used to satisfy the boundary conditions. In the present paper, we studied the similar problem, assuming that the initial state is perfect contact. We formulated equations by the components of displacement and stress in the elliptic coordinates and domain decomposition method. The tangential surface force is given by the friction rule as a frictional force. Numerical results are given for different values of stiffness ratio and coefficient of friction. The stress distributions around inclusion are shown graphically, and are compared with the previous results.

**Key Words:** Nonlinear Problem, Friction, Elliptic Inclusion, Boundary Element Method

### 1. はじめに

FRP, 傾斜機能材料, セラミックスなど種々の先端複合材料が開発された。このような複合材料の強度は母材と介在物の境界面の性質に大きく依存するのでその応力場を明らかにすることは重要である。著者らは介在物界面の力学的挙動を明らかにするために、楕円介在物を有する半無限板が一軸引張り、圧縮を受ける場合について、母材と介在物の境界面が完全接着<sup>(1)</sup>、完全すべり<sup>(2)</sup>、摩擦を伴うすべり<sup>(3)</sup>の応力場を明らかにしてきた。

介在物が界面ですべりを有し、界面において摩擦力が作用することを考慮した研究は殆んど無い<sup>(4)</sup>。これは摩擦則が経験則のため現象が非線形になるためである。Furuhashiら<sup>(5)</sup>は一定せん断 eigen 歪を与えた摩擦を伴う介在物問題について解析を行っている。

摩擦を伴うすべりを許した介在物問題の計算は、摩擦作用領域をあらかじめ定めることができないため、最初に母材と

介在物の境界面をある状態に仮定し、その後、反復計算により摩擦作用領域がある一定領域に収束するまで繰り返し計算を行う必要がある。前報<sup>(3)</sup>では、摩擦作用領域を決定するのに、最初に母材と介在物の境界面が完全すべりの状態であると仮定し、その完全すべりとして解いた解をもとにして摩擦の生じる節点を決定した。この場合、母材と介在物の境界面は最初から自由にすべるものと考え、すべる方向と逆方向に摩擦力を作用させた。

本論文では、摩擦作用領域を決定するのに境界面の初期状態が完全密着であると仮定し、その完全密着としてといた解をもとにして摩擦の生じる節点を決定した。この場合は、母材と介在物の境界面はすぐにはすべらずに、接線方向表面力がある程度大きくなって初めてすべるものとする。ここで完全密着としたのは、完全接着にすると剥離の条件が必要だがここでは考えていないためである。

以上2つの考え方の違いは、完全すべりから始める場合

は、境界面は自由にすべり、動摩擦力のみが作用するのに対し、完全接着から始める場合は、接線方向表面力が最大静止摩擦力より大きくなった場合に初めてすべり、すべっている箇所に動摩擦力が働くものとするににある。

そして、境界面で摩擦を伴うすべりを許した楕円介在物を有する半無限板が一軸一様引張り、および圧縮を受ける問題を母材と介在物の境界要素法を用いて解析した。

前報<sup>(3)</sup>と同様に、摩擦の法則として Coulomb の摩擦則を用い、接触を保ったまますべるとした。ギャップやオーバーラッピングは生じない。楕円座標を用いて介在物界面の変位、表面力成分をそれぞれ界面に対して法線方向と接線方向に分け、摩擦力として接線方向の表面力を摩擦則に従って与えた。そして、完全すべりから始めた場合<sup>(3)</sup>との比較を行った。

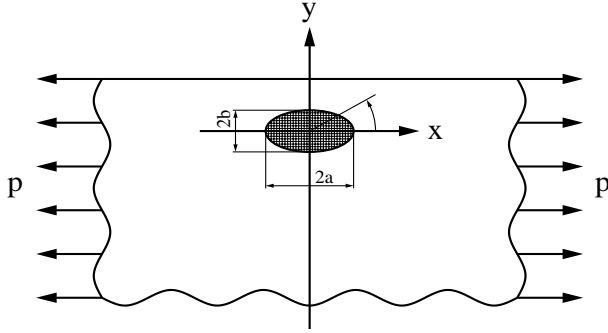


Fig.1 Coordinate system

## 2. 解析方法

### 2.1. 定式化

Fig.1 に示すような半無限板内に摩擦を伴うすべりを許した楕円形介在物が存在し、一軸引張荷重を受けている問題を考える。

ここで用いる楕円座標  $(\alpha, \beta)$  は直角座標  $(x, y)$  と以下の関係がある。

$$x = c \cosh \alpha \cos \beta, \quad y = c \sinh \alpha \sin \beta \quad (1)$$

ここで、 $c$  は楕円の焦点間距離の半分であり、楕円介在物の長軸および短軸をそれぞれ  $2a$ 、 $2b$  とする。

境界要素法の基礎式である境界積分方程式は次式で与えられる<sup>(6)</sup>。

$$C_{ij}u_j(P) = \int_S \{U_{ij}(P, Q)t_j(Q) - T_{ij}(P, Q)u_j(Q)\} ds(Q) \quad (2)$$

ここで、 $u_j(P)$  は境界上の任意の点  $P$  における変位を表す。また、 $C_{ij}$  は点  $P$  における境界の形状により決まる係数である。 $U_{ij}(P, Q)$ 、 $T_{ij}(P, Q)$  はそれぞれ既知の変位と表面力であり、ここでは Kelvin の解を用いた。

境界を有限個の要素に分割し、Gauss の数値積分公式を用いて式 (2) の離散化を行うことにより、各未知節点値に関する

連立方程式を組み立てると次のようにまとめられる。

$$HU = GT \quad (3)$$

ここで  $U$ 、 $T$  はそれぞれ解析対象全体の変位、表面力を表すベクトルであり、 $H$ 、 $G$  はその係数マトリックスである。

次に、領域分割法を用いて、母材側を領域 1、介在物側を領域 2 に分割して考える。それぞれの領域に対する離散化方程式は次式のように表される。

$$\begin{bmatrix} H_o^1 & H_I^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o^1 \\ u_I^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o^1 & G_I^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_o^1 \\ t_I^1 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} H_o^2 & H_I^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o^2 \\ u_I^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o^2 & G_I^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_o^2 \\ t_I^2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで、 $u$ 、 $t$  はそれぞれ変位と表面力のベクトルであり、上添字は領域番号を、下添字の  $o$ 、 $I$  はそれぞれ外表面、ならびに領域間の共通境界を表す。

共通境界における変位と表面力のベクトルを法線方向(下添字  $\alpha$ )と接線方向(下添字  $\beta$ )に分離すると、式 (4)、(5) はそれぞれ以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} H_o^1 & H_{I\alpha}^1 & H_{I\beta}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o^1 \\ u_{I\alpha}^1 \\ u_{I\beta}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o^1 & G_{I\alpha}^1 & G_{I\beta}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_o^1 \\ t_{I\alpha}^1 \\ t_{I\beta}^1 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} H_o^2 & H_{I\alpha}^2 & H_{I\beta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o^2 \\ u_{I\alpha}^2 \\ u_{I\beta}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o^2 & G_{I\alpha}^2 & G_{I\beta}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_o^2 \\ t_{I\alpha}^2 \\ t_{I\beta}^2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

(i) 介在物界面が完全密着の場合、次の接続条件が成立する。

$$u_{I\alpha}^1 = u_{I\alpha}^2, \quad u_{I\beta}^1 = u_{I\beta}^2 \quad (8)$$

$$t_{I\alpha}^1 = -t_{I\alpha}^2, \quad t_{I\beta}^1 = -t_{I\beta}^2 \quad (9)$$

式 (8) は変位が連続であること、式 (9) は表面力が連続であることを示す。各領域の外表面の表面力  $t_o^1$ 、 $t_o^2$  が既知であるとし、未知成分を左辺に、既知成分を右辺にまとめると、式 (6)、(7) はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{bmatrix} H_o^1 & H_{I\alpha}^1 & H_{I\beta}^1 & -G_{I\alpha}^1 & -G_{I\beta}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o^1 \\ u_{I\alpha}^1 \\ u_{I\beta}^1 \\ t_{I\alpha}^1 \\ t_{I\beta}^1 \end{Bmatrix} = [G_o^1] \{t_o^1\} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} H_{I\alpha}^2 & H_{I\beta}^2 & G_{I\alpha}^2 & G_{I\beta}^2 & H_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{I\alpha}^2 \\ u_{I\beta}^2 \\ -t_{I\alpha}^2 \\ -t_{I\beta}^2 \\ u_o^2 \end{Bmatrix} = [G_o^2] \{t_o^2\} \quad (11)$$

接続条件より，

$$\begin{Bmatrix} u_{I\alpha}^2 \\ u_{I\beta}^2 \\ -t_{I\alpha}^2 \\ -t_{I\beta}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{I\alpha}^1 \\ u_{I\beta}^1 \\ t_{I\alpha}^1 \\ t_{I\beta}^1 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

であるから，式(10)，(11)は次式にまとめられる．

$$\begin{bmatrix} H_o^1 & H_{I\alpha}^1 & H_{I\beta}^1 & -G_{I\alpha}^1 & -G_{I\beta}^1 & 0 \\ 0 & H_{I\alpha}^2 & H_{I\beta}^2 & G_{I\alpha}^2 & G_{I\beta}^2 & H_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o^1 \\ u_{I\alpha}^1 \\ u_{I\beta}^1 \\ t_{I\alpha}^1 \\ t_{I\beta}^1 \\ u_o^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o^1 & 0 \\ 0 & G_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_o^1 \\ t_o^2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

この連立方程式を解くことにより，完全密着の場合の解析ができる．

(ii) 介在物界面が完全すべりの場合，次の接続条件が成立する<sup>(2)</sup>．

$$u_{I\alpha}^1 = u_{I\alpha}^2, t_{I\alpha}^1 = -t_{I\alpha}^2 \quad (14)$$

式(14)は法線方向の変位と表面力が連続であることを示す．また，摩擦力は作用しないので次式が成り立つ．

$$t_{I\beta}^1 = t_{I\beta}^2 = 0 \quad (15)$$

各領域の外表面の表面力 $t_o^1, t_o^2$ が既知であるとし，未知成分を左辺に，既知成分を右辺にまとめると，式(6)，(7)はそれぞれ次のようになる．

$$\begin{bmatrix} H_o^1 & H_{I\beta}^1 & H_{I\alpha}^1 & -G_{I\alpha}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o^1 \\ u_{I\beta}^1 \\ u_{I\alpha}^1 \\ t_{I\alpha}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o^1 & G_{I\beta}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_o^1 \\ t_{I\beta}^1 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} H_{I\alpha}^2 & G_{I\alpha}^2 & H_{I\beta}^2 & H_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{I\alpha}^2 \\ -t_{I\alpha}^2 \\ u_{I\beta}^2 \\ u_o^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{I\beta}^2 & G_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{I\beta}^2 \\ t_o^2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

接続条件より，

$$\begin{Bmatrix} u_{I\alpha}^2 \\ -t_{I\alpha}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{I\alpha}^1 \\ t_{I\alpha}^1 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

であるから，式(16)，(17)は次式にまとめられる．

$$\begin{bmatrix} H_o^1 & H_{I\beta}^1 & H_{I\alpha}^1 & -G_{I\alpha}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{I\alpha}^2 & G_{I\alpha}^2 & H_{I\beta}^2 & H_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o^1 \\ u_{I\beta}^1 \\ u_{I\alpha}^1 \\ t_{I\alpha}^1 \\ u_{I\beta}^2 \\ u_o^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o^1 & G_{I\beta}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{I\beta}^2 & G_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_o^1 \\ t_{I\beta}^1 \\ t_{I\beta}^2 \\ t_o^2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

この連立方程式を解くことにより，完全すべりの場合の解析ができる．

(iii) 介在物界面が摩擦を伴うすべりの場合，次の接続条件が成立する．

$$u_{I\alpha}^1 = u_{I\alpha}^2, t_{I\alpha}^1 = -t_{I\alpha}^2 \quad (20)$$

式(20)は法線方向の変位と表面力が連続であることを示す．また，摩擦力として次式が成り立つ．

$$t_{I\beta}^1 = -t_{I\beta}^2 = s t_{I\alpha}^1 \quad (21)$$

ここで， $s$ は摩擦係数に相当し，次のように決める．マトリックスを組み立てる段階で完全密着とした節点の場合は次の条件により決める．

$$t_{I\beta}^1 < 0 \text{ のとき } s = \mu \quad (22)$$

$$t_{I\beta}^1 > 0 \text{ のとき } s = -\mu \quad (23)$$

完全すべり，摩擦を伴うすべりとした節点に関しては次の条件に従って決める．

$$[u_{\beta}] < 0 \text{ のとき } s = \mu \quad (24)$$

$$[u_{\beta}] > 0 \text{ のとき } s = -\mu \quad (25)$$

ここで， $[u_{\beta}]$ は介在物に対する母材の相対変位であり $[u_{\beta}] = u_{I\beta}^1 - \bar{u}_{I\beta}^2$ ， $\mu$ はCoulombの摩擦係数である．

各領域の外表面の表面力 $t_o^1, t_o^2$ が既知であるとし，未知成分を左辺に，既知成分を右辺にまとめると，式(6)，(7)はそれぞれ次のようになる．

$$\begin{bmatrix} H_o^1 & H_{I\beta}^1 & H_{I\alpha}^1 & -G_{I\alpha}^1 & -G_{I\beta}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o^1 \\ u_{I\beta}^1 \\ u_{I\alpha}^1 \\ t_{I\alpha}^1 \\ t_{I\beta}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_o^1 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} H_{I\alpha}^2 & G_{I\alpha}^2 & G_{I\beta}^2 & H_{I\beta}^2 & H_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{I\alpha}^2 \\ -t_{I\alpha}^2 \\ -t_{I\beta}^2 \\ u_{I\beta}^2 \\ u_o^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_o^2 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

接続条件より,

$$\begin{Bmatrix} u_{I\alpha}^2 \\ -t_{I\alpha}^2 \\ -t_{I\beta}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{I\alpha}^1 \\ t_{I\alpha}^1 \\ t_{I\beta}^1 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

であるから, 式 (26), (27) は次式にまとめられる.

$$\begin{bmatrix} H_o^1 & H_{I\beta}^1 & H_{I\alpha}^1 & -G_{I\alpha}^1 & -G_{I\beta}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{I\alpha}^2 & G_{I\alpha}^2 & G_{I\beta}^2 & H_{I\beta}^2 & H_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o^1 \\ u_{I\beta}^1 \\ u_{I\alpha}^1 \\ t_{I\alpha}^1 \\ t_{I\beta}^1 \\ u_{I\beta}^2 \\ u_o^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o^1 & 0 \\ 0 & G_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_o^1 \\ t_o^2 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

ここで,  $t_{I\beta}^1 = st_{I\alpha}^1$  であるから, 上式は次のようになる.

$$\begin{bmatrix} H_o^1 & H_{I\beta}^1 & H_{I\alpha}^1 & -G_{I\alpha}^1 - sG_{I\beta}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{I\alpha}^2 & G_{I\alpha}^2 + sG_{I\beta}^2 & H_{I\beta}^2 & H_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o^1 \\ u_{I\beta}^1 \\ u_{I\alpha}^1 \\ t_{I\alpha}^1 \\ u_{I\beta}^2 \\ u_o^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o^1 & 0 \\ 0 & G_o^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_o^1 \\ t_o^2 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

この連立方程式を解くことにより, 摩擦を伴うすべりの場合の解析ができる.

ここで  $H_{I\alpha}$ ,  $H_{I\beta}$ ,  $G_{I\alpha}$ ,  $G_{I\beta}$  はそれぞれ次のように表される<sup>(2)</sup>.

$$H_{I\alpha} = \begin{pmatrix} lH_{xx} + mH_{xy} \\ lH_{yx} + mH_{yy} \end{pmatrix}, H_{I\beta} = \begin{pmatrix} -mH_{xx} + lH_{xy} \\ -mH_{yx} + lH_{yy} \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$G_{I\alpha} = \begin{pmatrix} lG_{xx} + mG_{xy} \\ lG_{yx} + mG_{yy} \end{pmatrix}, G_{I\beta} = \begin{pmatrix} -mG_{xx} + lG_{xy} \\ -mG_{yx} + lG_{yy} \end{pmatrix} \quad (32)$$

$l, m$  は楕円座標  $(\alpha, \beta)$  の方向余弦,  $h$  は局所因子であり, 次式で表される.

$$l = ch \sinh \alpha \cos \beta, \quad m = ch \cosh \alpha \sin \beta \quad (33)$$

$$h = \frac{1}{c\sqrt{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \beta}} \quad (34)$$

## 2.2. 完全密着から始めた場合の摩擦を伴うすべりの解析

完全密着から始めた場合の摩擦を伴うすべりの解析は次のように行う. まず最初に母材と介在物が完全密着であるとして式 (13) を解く. この結果, 共通境界の表面力と変位がすべて求まる. この解をもとにして母材と介在物の境界面の状態を決定する. 介在物境界面は完全密着, 完全すべり, 摩擦を伴うすべりの3種類に分類することができる. そして, 各節点が上記の3つのいずれに属するかは, 以下の判定条件により決める.

### i. 完全密着

$$|t_{I\beta}^1| \leq \mu |t_{I\alpha}^1| \quad (35)$$

### ii. 完全すべり

$$|t_{I\beta}^1| > \mu |t_{I\alpha}^1| \quad (36)$$

$$t_{I\alpha}^1 \leq 0 \quad (37)$$

### iii. 摩擦を伴うすべり

$$|t_{I\beta}^1| > \mu |t_{I\alpha}^1| \quad (38)$$

$$t_{I\alpha}^1 > 0 \quad (39)$$

式 (35) はすべりが生じない条件: 接線方向表面力が最大静止摩擦力より小さい, 式 (36), (37) はすべりが生じる条件: 接線方向表面力が最大静止摩擦力より大きい, 式 (38) は母材と介在物が離れようとしている条件, 式 (39) は母材と介在物が圧着している条件を示す.

上記の条件を用いて, 共通境界の各節点が完全密着, 完全すべり, 摩擦を伴うすべりのどれなのかを判定し, 完全密着ならば式 (13), 完全すべりならば式 (19), 摩擦を伴うすべりならば式 (30) のマトリックスを組み立て再計算する.

この結果得られた解をもとにして再び判定を行う. 上のマトリックスを組み立てる段階で完全密着とした節点は式 (35) ~ (39) より判定を行う. 完全すべり, 摩擦を伴うすべりとした節点は以下の式 (40) ~ (44) から判定を行う.

### i. 完全密着

$$[u_\beta] = 0 \quad (40)$$

### ii. 完全すべり

$$[u_\beta] \neq 0 \quad (41)$$

$$t_{I\alpha}^1 \leq 0 \quad (42)$$

### iii. 摩擦を伴うすべり

$$[u_\beta] \neq 0 \quad (43)$$

$$t_{I\alpha}^1 > 0 \quad (44)$$

式 (40) は母材と介在物との間にすべりが生じていないことを、式 (41), (42) は母材と介在物との間にすべりが生じていることを示す。この判定に基づいて再びマトリックスを組み立てる。以下同様の操作を行い、摩擦領域が一定領域に収束するまで繰り返し計算を行う。

### 3. 数値計算結果

解析においては平面応力状態の場合を計算した。

#### 3.1. 一軸引張りの場合

Fig.2 に示すような寸法 (単位 mm) をもつモデルについて数値計算を行った。楕円介在物の中心を座標の原点にとり、物体の形状や荷重の対称性を考慮することにより、板全体の 1/2 を解析領域とした。楕円介在物の形状比を  $s = b/a = 0.5$ ,  $x$  軸

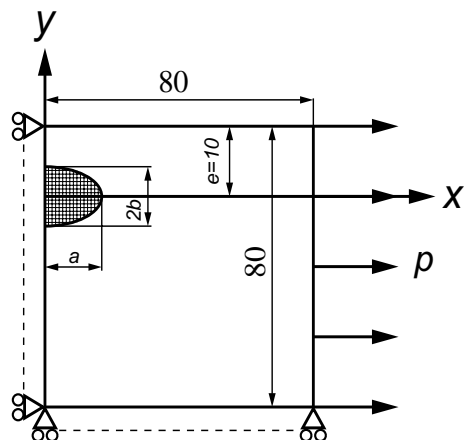


Fig.2 The model for calculation

と自由境界との距離を  $e = 10\text{mm}$ , ポアソン比を  $\nu = \bar{\nu} = 0.3$ , 荷重を  $p$  とした。そして, 介在物の大きさを  $b/e = 0.8$ , 横弾性係数比を  $\Gamma = \bar{G}/G = 0.5$  とした時に, Coulomb の摩擦係数  $\mu$  を変化させて数値計算を行った。ここでは静止摩擦係数と動摩擦係数とは同じ値を使用した。  $E$  は  $E = 206\text{GPa}$  として計算した。楕円境界面では  $\beta$  の代わりに  $\theta$  を用いた。(楕円境界面では  $\theta = \tan^{-1}(\frac{b}{a} \tan \beta)$  の関係がある (Fig.1))

ここで,  $\bar{\quad}$  の記号は介在物側の諸量を示し,  $E$  は縦弾性係数,  $G$  は横弾性係数である。

境界要素は 2 次要素を用いた。楕円介在物境界面の要素分割は前報<sup>(3)</sup>と同じにとった。

すべての結果を荷重  $p$ , 長さ  $e$  で無次元化して表す。計算は埼玉大学情報処理センターの日立 SR2201 を使用した。まず, 引張荷重  $p = 98\text{MPa}$  を受ける場合の数値計算を行った。完全すべりから始めた場合は繰り返し計算は 2~4 回で終了したが, 完全密着から始めた場合は 5~6 回の繰り返し計算を要した。

Figs.3, 4 に  $y$  軸上の  $\sigma_x, \sigma_y, \bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  の分布を示す。Fig.3 は完全すべりから始めた場合の結果<sup>(3)</sup>であり, Fig.4 は完全密着から始めた本解析の結果である。図中の点線に囲まれた部分は楕円介在物領域である。

Fig.3 と Fig.4 を比較すると, 母材の応力分布はほぼ同じ

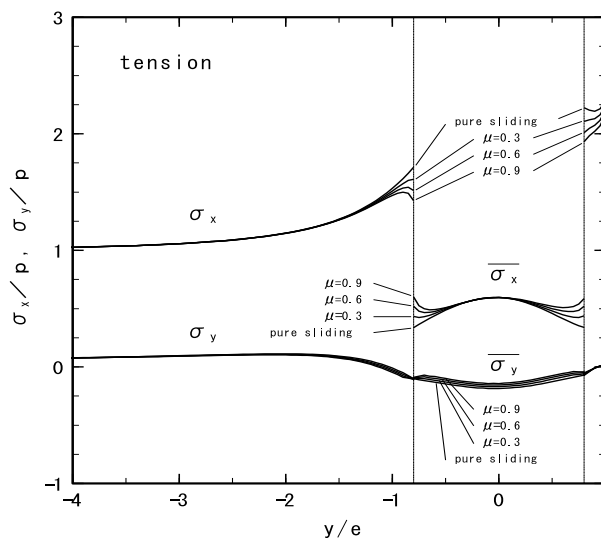


Fig.3 Variation of  $\sigma_x, \sigma_y, \bar{\sigma}_x$  and  $\bar{\sigma}_y$  with  $y$  along the  $y$ -axis ( $b/e = 0.8, \Gamma = 0.5$ , pure sliding)

である。介在物の応力分布も全体として似ている。しかし, 介在物境界面近傍における  $\sigma_x, \bar{\sigma}_x$  の分布に違いが見られる。本結果の方が  $\bar{\sigma}_x$  の値が大きくなり, 母材側の  $\sigma_x$  もその影響から小さくなっている。その影響は摩擦係数が大きいほど大きい。すなわち, 完全密着から始めた方が介在物の挙動が完全密着に近い場合に影響が大きい。Fig.4 より以下の結果が

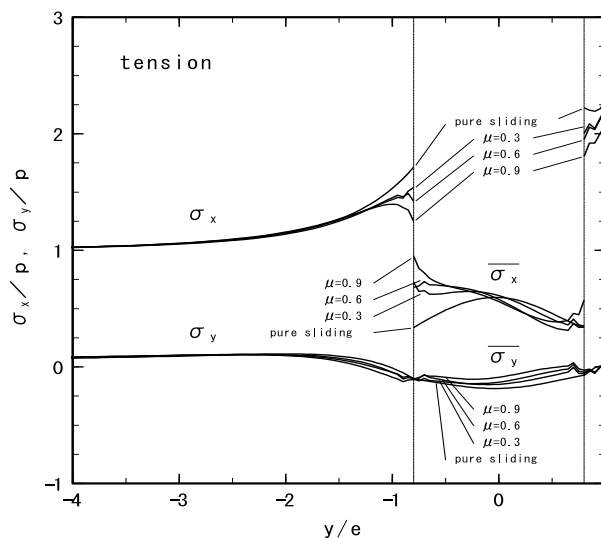


Fig.4 Variation of  $\sigma_x, \sigma_y, \bar{\sigma}_x$  and  $\bar{\sigma}_y$  with  $y$  along the  $y$ -axis ( $b/e = 0.8, \Gamma = 0.5$ , perfect contact)

えられる。摩擦を加えることにより母材側の応力は緩和され, 摩擦係数が大きいほどその効果も大きい。介在物から離れた位置における応力分布には摩擦の影響はほとんどない。摩擦領域に関しては, 完全すべりから始めた場合の摩擦領域とほぼ同じ領域 ( $\theta = 30^\circ \sim 90^\circ, \theta = -90^\circ \sim -40^\circ$ ) となった。

#### 3.2. 一軸圧縮の場合

次に, 圧縮荷重  $p = -98\text{MPa}$  を受ける場合の数値計算を行った。弾性問題では圧縮荷重の結果は引張荷重を受ける場

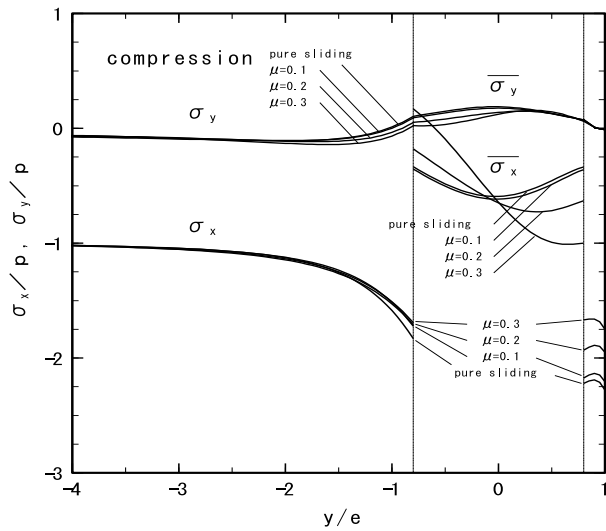


Fig.5 Variation of  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\bar{\sigma}_x$  and  $\bar{\sigma}_y$  with  $y$  along the  $y$ -axis ( $b/e = 0.8$ ,  $\Gamma = 0.5$ , pure sliding)

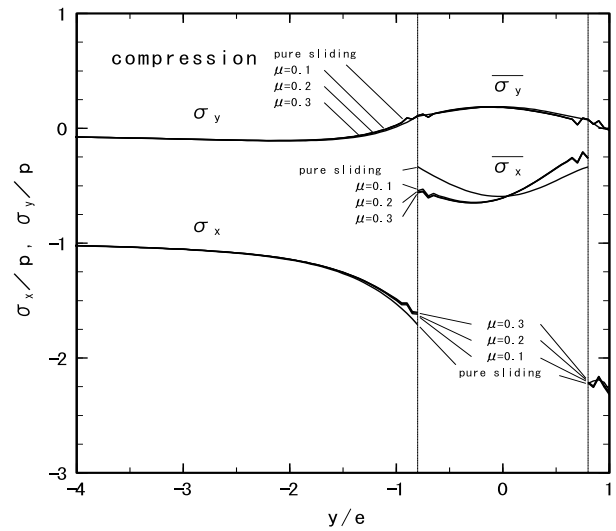


Fig.6 Variation of  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\bar{\sigma}_x$  and  $\bar{\sigma}_y$  with  $y$  along the  $y$ -axis ( $b/e = 0.8$ ,  $\Gamma = 0.5$ , perfect contact)

合の結果で  $p$  を  $-p$  として得られる。しかし、本問題のように摩擦を伴う非線形の場合は同じにはならない。

完全すべりから始めた場合は摩擦係数を大きくすると繰り返し計算の収束性の悪化が見られたが、完全密着から始めた場合は3回で摩擦領域が一定になった。この摩擦領域に関しては圧縮の場合も、完全すべりから始めた場合の摩擦領域とほぼ同じ領域 ( $\theta = -40^\circ \sim 30^\circ$ ) となった。Figs.5, 6 に  $y$  軸上の  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  の分布を示す。Fig.5 は完全すべりから始めた場合の結果<sup>(3)</sup> であり、Fig.6 は完全密着から始めた本解析の結果である。図中の点線に囲まれた部分は楕円介在物領域である。

Fig.5 と Fig.6 を比較すると、完全すべりから始めた場合の結果は介在物の  $\bar{\sigma}_x$  の分布が摩擦係数の影響を受け、摩擦係数が大きくなるにつれ、圧縮応力が大きくなり、そのため直線縁に近い母材の応力  $\sigma_x$  が減少する。これに対して完全密着から始めた本解析の結果では摩擦係数の影響は少ない。

#### 4. 結言

本研究は、介在物境界面における摩擦の影響を求めめるために、完全密着から始めた摩擦を伴うすべりを許した楕円介在物を有する半無限板の解析を行った。解析結果から以下の結論を得た。

(1) 楕円介在物の境界面が完全すべりから始めた摩擦を伴う場合と完全密着から始めた摩擦を伴う場合を比較すると母材の応力分布はほぼ同じである。介在物の応力分布も類似しているが、介在物境界面近傍における  $\sigma_x$ ,  $\bar{\sigma}_x$  の分布に相違が見られる。本解析では、一軸引張りでは摩擦係数の影響が大きいが一軸圧縮では逆に摩擦係数の影響が小さい。

(2) 摩擦を伴うすべりの応力分布は完全すべりと完全密着の間にある。摩擦力が加わると母材側の応力は緩和され、摩擦係数が大きいほどその効果も大きい。介在物から離れた

位置における応力分布には摩擦の影響はほとんどない。

(3) 最大応力は、介在物が軟らかい場合 ( $\Gamma = 0.5$ ) で、介在物の大きさが  $b/e = 0.8$  のとき、介在物に最も近い自由境界における  $\sigma_x$  である。

(4) 一軸引張りで一軸圧縮の場合では介在物内の応力分布に大きな差異が生じる。

(5) 初期状態が完全すべりからはじめた場合と完全密着から始めた場合とでは摩擦領域は同じになった。

#### 5. 謝辞

本研究を遂行するにあたり、本学学生田中信幸氏(現京セラ(株))および黒畑友秀氏にご協力いただいたことを記し、謝意を表す。

#### 参考文献

- (1) E. Tsuchida, Y. Arai, M. Yoshino and K. Ishiwata, Theor. and Appl. Mech, Vol.46 (1997), pp.97-109.
- (2) 土田栄一郎, 荒居善雄, 田中信幸, すべりを許した楕円介在物を有する半無限板の引張りの境界要素法解析, 境界要素法論文集14 (1997). pp. 111-116.
- (3) 土田栄一郎, 荒居善雄, 高窪豊, 摩擦を伴うすべりを許した楕円介在物を有する半無限板の非線形解析, 境界要素法論文集, 16 (1999), pp.19-24.
- (4) T. Mura, Micromechanics of Defects in Solids Second Revised Edition, MARTINUS NIJHOFF PUBLISHERS, (1987).
- (5) R. Furuhashi, Jin H.Huang and T. Mura, Journal of Applied Mechanics, Journal of Applied Mechanics, Vol.59 (1992), pp.783-788.
- (6) 結城良治, 木須博行, 境界要素法による弾性解析, 培風館, (1987).