

境界要素法における計算点解析法の多領域問題への適用:第3報

APPLICATION OF COMPUTING POINT METHOD IN BEM TO MULTIPLE DOMAIN PROBLEMS: Third Report

神谷紀生¹⁾, 鈴木崇之²⁾, 安藤孝彦³⁾

Norio KAMIYA, Takayuki SUZUKI and Takahiko ANDOH

¹⁾名古屋大学大学院人間情報学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp)²⁾名古屋大学大学院人間情報学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:taksu@yd5.so-net.ne.jp)³⁾名古屋大学情報文化学部 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町 E-mail:andoh@info.human.nagoya-u.ac.jp)

As the third report of a series of study on the application of the computing point analysis method to multiple domain problems, we here consider computational accuracy in a combination of domains governed by linear and nonlinear equations (called linear domain and nonlinear domain, respectively). For the latter region alone, the computing point analysis method is applied. Various domain size ratios of the linear domain to the nonlinear domain are considered and compared. It will be found that the boundary discretization affects the accuracy of solution irrespective of the size of each region. Further, a problem with unknown internal boundary is considered as an extension of the present scheme. Two governing equations are employed in respective regions under a certain specified condition but their boundary is not known in advance. Iterative scheme from initially assumed internal boundary is used in an example.

Key Words: Boundary Element Method, Computing Point Method, Inhomogeneous/Nonlinear Problem, Multiple Domain

1 はじめに

境界だけの要素分割により非線形問題を解く方法である「計算点解析法」¹⁻³⁾は、非線形項を含め非同次項を座標に関する多項式で近似的に表示することから出発する。これと基本解の積の領域積分は相反定理を用いて境界積分に変換される。多項式の未知係数は、計算点と呼ばれる内部点と境界選点の一部である境界計算点において非同次項が満たす条件によって、最小2乗法を用いて決定される。解の決定にはあらかじめ仮定した未知関数の値から反復計算を行う必要がある。すでにいくつかの基本的問題でその有効性が示された。

この方法を多重領域に適用する方法を前報^{3,4)}で示した。それらは、同一非線形領域を分割した場合および線形領域と非線形領域が結合された場合である。内部境界では外部境界と違って具体的に境界条件が指定されないため、上記の問題はいずれも内部境界での値が未知の問題となる。適当に仮定した値から始め、収束値を得るまで計算を繰り返さなければならない。これらは適切に作動することが例題の解析によって実証された。もちろん非線形領域では、計算点法による反復計算が別個に行われている。

本研究では、これらの研究に引き続いて、多領域解析における計算精度を、線形領域と非線形領域の大きさの違いおよび、その際の境界離散化の方法の違いから検討する。これはさらに引き続いて示される、未知内部境界問題に計算点解析法を適用するための元になるものである。最後に、ある条件のもとで支配方程式が異なる2つの領域の境界が決まる、未知内部領域の例題の解析を行うことにする。

2 多領域問題における計算点解析法

多領域問題の境界要素法による解析は、内部境界における条件が未知関数の値で直接与えられないので、未知関

数とその境界導関数を全体の離散化代数方程式から消去する方法がもっともプリミティブである。しかしながら、領域が多数ある場合や、内部境界が複雑に配置された場合には上記のような消去をするよりも、個々の部分領域における解析を独立に行って、内部境界での条件すなわち、適合条件と連続条件を満足させるほうが一般性を持つといえる。この場合には、内部境界での関数をあらかじめ仮定した反復計算を行うことになる。

2領域からなる場合にはこの解析法は次のようになる (Fig. 1)。部分領域 Ω^1 および Ω^2 における支配微分方程式をそれぞれ

$$\begin{aligned} F_1(u) &= 0 \\ F_2(v) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

とする。なおこれらの支配方程式は線形あるいは非線形であってもかまわない。非線形であればその部分領域での解析には、計算点解析法が用いられる。 u, v はそれぞれの領域での未知関数である。内部境界での条件は次のように与えられる。

$$u = v, \quad q = -p \quad (2)$$

ここで、

$$q = \partial u / \partial n, \quad p = \partial v / \partial n \quad (3)$$

は未知関数 u, v の外向き法線 n 方向の導関数である。

はじめに部分領域 Ω^1 側の内部境界で u を仮定する。この領域についての解析を行えば q が求められる。適合条件によって部分領域 Ω^2 側の内部境界で p がわかるから、こ

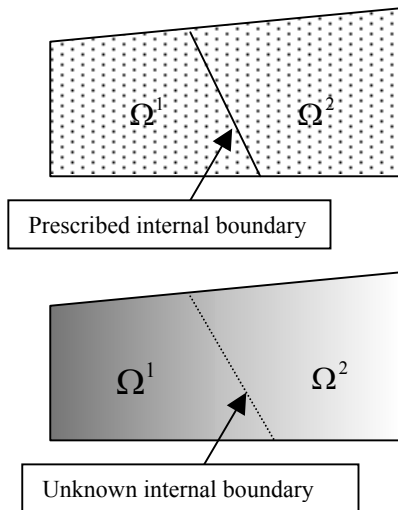


Fig. 1 Two-subregion problem.

れを用いてその領域での解析を行う。その結果，内部領域での v が求められる。この v とあらかじめ仮定した u は内部境界で等しくならなければならない。しかしながら，これは満足されないで，新たに求められた v によって，仮定する u の更新を行う。そこで v を直接用いずに， $(u - v)$ にある係数 α (加速係数あるいは減速係数) をかけた量を先の u に加える方法が一般的であるので，以下ではこれを用いることにする。この計算プロセスを繰り返して，収束値が得られるまで続ける。

以上の説明は，内部境界があらかじめ決められている場合の計算であるが，内部境界が未知関数の分布あるいはその他の条件によって決められる未知境界問題では，適当に仮定された内部境界から計算を開始し，この位置を変えながら指定条件を満たす位置を探索しなければならない。その方法についてはあとで示すことにする。

3 2領域問題の解の精度検討

線形領域 Ω^1 と非線形領域 Ω^2 が結合された 2 次元問題として，Fig. 2 に示される場合を考える。それぞれの部分領域における支配方程式は次のように与えられる：

$$\Omega^1 : \nabla^2 u(x, y) = 0 \quad (4)$$

$$\Omega^2 : \nabla^2 v(x, y) + 12\sqrt{v} = 0 \quad (5)$$

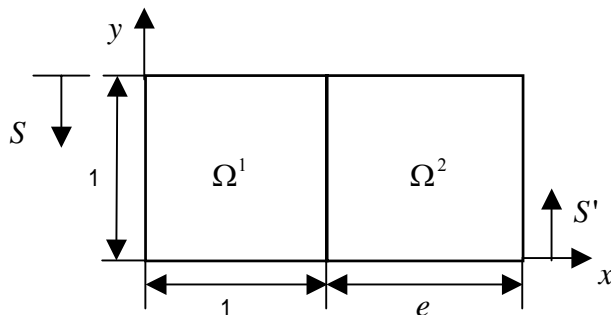


Fig. 2 Example problem 1.

式 (5) の左辺第 2 項が未知関数を含む非同次項であり，この場合非線形である。非線形領域の横幅 e として 0.5, 1, 2 の 3 種類を考える。境界条件は，

上下の境界辺では $q = 0$ or $p = 0$

領域の左側面で $u = -3$

領域の右側面で $v = (1+e)^4$

のように与えられるものとする。横幅 e を変えた場合の解析を行って，これが解の精度，収束性に及ぼす影響を検討する。

境界要素としては直線で表される線形要素を用い，各辺の要素分割数 10 として，離散化する。境界計算点 (BCP) は等間隔に 20 点 ($\bar{n} = 20$) とし，非線形領域 Ω^2 の内部計算点 (ICP) は 4, 9 点 ($m = 4, 9$) とした。Fig. 3 に境界節点および内部境界の配置を示す。この条件で計算すると， $e = 0.5, 1$ の場合は精度の高い解が得られるが， $e = 2$ のとき厳密解との誤差が約 8% になる。これは非線形領域が大きいため境界要素数が十分でないと考えられる。また要素分割数が 20 のときには誤差が約 2% になった。そこで，さらに要素分割数を 30 にすると，誤差は 1% 未満になった。このように，非線形領域が大きいために境界要素数を増やすことが必要であることがわかった。各辺の要素分割数を $e = 0.5, 1$ のとき 10， $e = 2$ のとき 30 として，得られた結果を Fig. 4, 5 に示す。ただし，Fig. 4, 5 の横軸は (a), (a') では，領域 Ω^1 における矢印の向きの周長 (S) であり，(b), (b') では，領域 Ω^2 における矢印の向きの周長 (S') である。図に厳密解と比較されているように，境界要素数を十分とすれば，妥当な結果を得ることがわかる。

さらに計算条件として，領域 Ω^2 の内部計算点数 m ，内部境界上であらかじめ仮定する u の値，加速係数 α の値などのとり方を変えることが考えられる。その検討例を Fig. 6 に反復計算前後の u の変化量として示した。この図に示すように，収束回数は違うが， e の値によらず m, u の初期仮定値は大きな影響を与えないことがわかる。一方， α は複雑に影響していることがわかる。なお，これらのとり方は計算精度には本質的な影響を与えないようであるが，解の収束性に大きく関連する。

以上により，非線形領域が線形領域に比べて大きい場合，要素分割数が計算精度に最も大きな影響を与えることが示された。

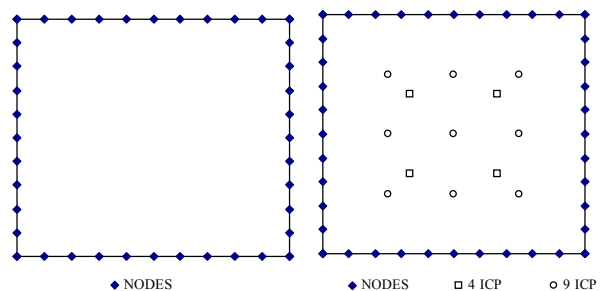
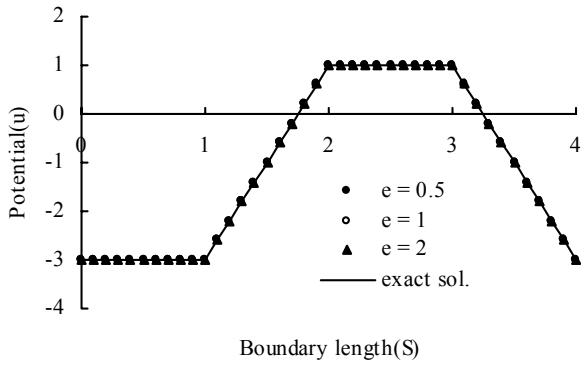


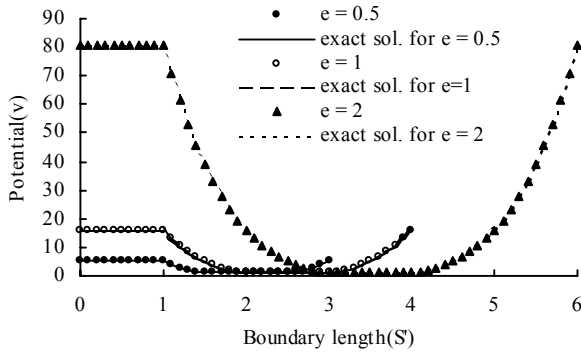
Fig. 3 Boundary discretization and internal computing points.

4 未知内部境界問題

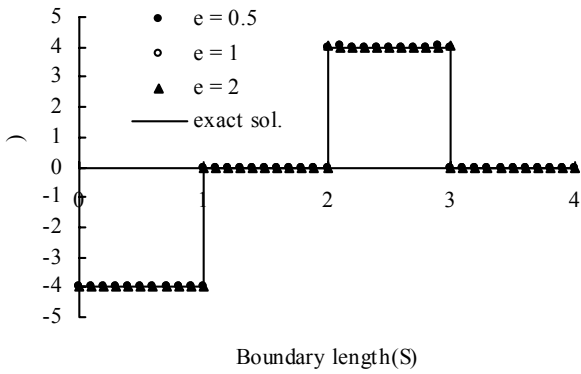
前節では，部分領域があらかじめ決められている 2 領域結合問題考えた。本節では，部分領域の境界があらかじめ知られておらず，関数に関する条件によってそれが決まる未知内部境界問題を扱う。支配方程式は前節と同じものとするが，両者を区別する条件として次のような場合を想定する。すなわち未知関数の大きさが 1 より大きいかわるいは小さいかによって，支配方程式が変わるものとする。



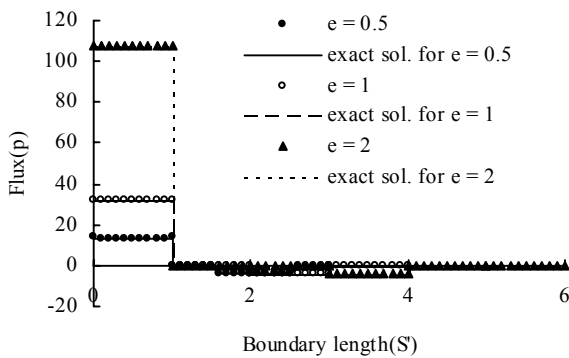
(a)



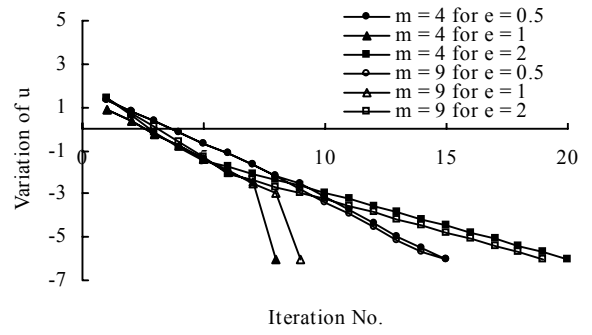
(b)

Fig. 4 Results of (a) u and (b) v 

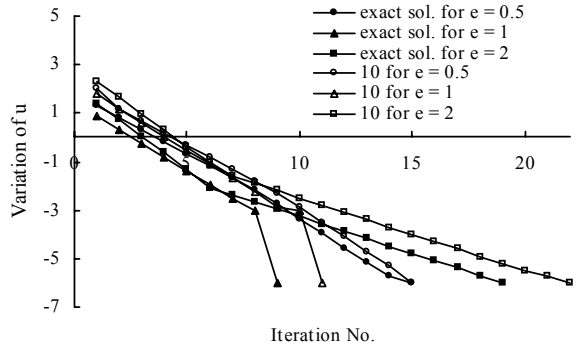
(a')



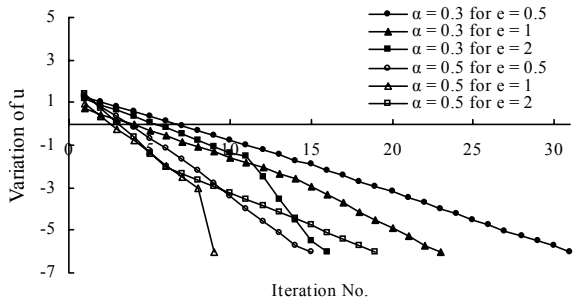
(b')

Fig. 5 Results of (a') q and (b') p .

(a'')



(b'')



(c'')

Fig. 6 Iterations (a'') for different numbers of ICP, (b'') for different initial assumptions and (c'') for different α .

$$\Omega^1 : \nabla^2 u(x, y) = 0 \quad (u \leq 1) \quad (6)$$

$$\Omega^2 : \nabla^2 v(x, y) + 12\sqrt{v} = 0 \quad (v \geq 1) \quad (7)$$

外部境界における指定境界条件は,

上下の境界辺では $q = 0$ or $p = 0$

領域の左側面で $u = -3$

領域の右側面で $v = 16$

とする.

この問題は次の2通りの方法で取り扱う:

<方法1>

1) あらかじめ適当に領域を分割する.

2) 領域 Ω^1 の内部境界で指定される条件(ここでは $u = 1$)のもとで解析を行い, 領域 Ω^2 の内部境界上の v を求める.

- 3) つづいて, 内部境界の位置を変えて, 2)と同様にして v を求める.
- 4) 上記の結果から, 領域 Ω^2 の内部境界の条件(ここでは $v=1$)を満たす位置を, 線形内挿によって決定する. この位置が仮定された(反復時は変更前の)内部境界に十分近ければ, 目的とする結果が得られたと解釈する. そうでなければ, 次に進む.
- 5) 新たに決定された内部境界について解を求め, 2)に戻り, 計算を繰り返す.

<方法2>

- 1) あらかじめ適当に領域を分割して解を求める.
- 2) つづいて, わずかに内部境界の位置を変えて解を求める.
- 3) 上記の2つの結果から, 内部境界の条件を満たす位置を, 線形内挿によって決定する. この位置が仮定された(反復時は変更前の)内部境界に十分近ければ, 目的とする結果が得られたと解釈する. そうでなければ, 次に進む.
- 4) 新たに決定された内部境界について解を求め, 2)に戻り, 計算を繰り返す.

ここで考える問題は簡単のために, y 方向に関数が変化しないように仮定されているので, 内部境界は x 方向にだけ移動する. すなわち, Fig. 7 の $2-e$ あるいは e をあらかじめ仮定して, 上記の計算スキームを用いる. あらかじめ仮定する内部境界を種々にとり, 方法1で計算を行った結果を Fig. 8 (a''') , 方法2で計算を行った結果を Fig. 8 (b''') に示す. 図に示されるように, 仮定する e の値によらず, 妥当な結果を得ることができる. なお, 方法1では線形領域 Ω^1 の内部境界では常に $u=1$ と仮定しているので, 非線形領域 Ω^2 の計算が完了すれば1度の反復スキームが終わる. 他方, 方法2では, あらかじめ仮定した内部境界上の u あるいは v を収束計算するので, 1度の反復スキームにサブ反復スキームが必要となる. この結果, 計算時間は方法1の方が大幅に軽減される.

5 まとめ

本研究では, 多領域問題に対する計算点解析法の適用において, 解析対象の全体領域が線形部分領域と非線形部分領域で結合され, それらの領域の大きさの違う場合について, 解の精度に及ぼす計算条件を検討した. その結果, 境界要素数の影響が顕著であることがわかった. さらに, 内部境界があらかじめ決められていない未知内部境界問題に, 計算点解析法を含めた非線形解析のための計算スキームの試行を行った.

文献

- (1) 神谷・許, 非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法, 日本機械学会論文集 (A), **64** (1998), pp. 147-154
- (2) 許・神谷, 非同次・非線形問題に対する境界要素の一定式と解法(続報: 未知関数の導関数を含む非同次項の場合), 日本機械学会論文集(A), **64** (1998), pp. 1341-1347
- (3) 許・神谷, 計算点解析法による境界要素法のためのアダプティブ境界要素, 日本機械学会論文集 (A), **64** (1998), pp. 1598-1595

- (4) 神谷・許・鈴木, 境界要素法における計算点解析法の多重領域問題への応用, BEM テクノロジーコンファレンス論文集, **10** (2000), pp. 23-28
- (5) 神谷・許・鈴木, 境界要素法における計算点解析法の多重領域問題への応用: 第2報, 境界要素法論文集, **17** (2000), pp. 77-80

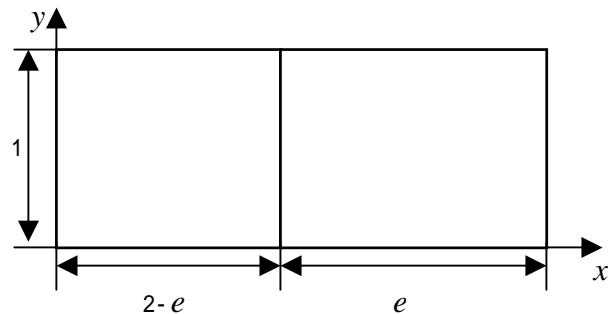
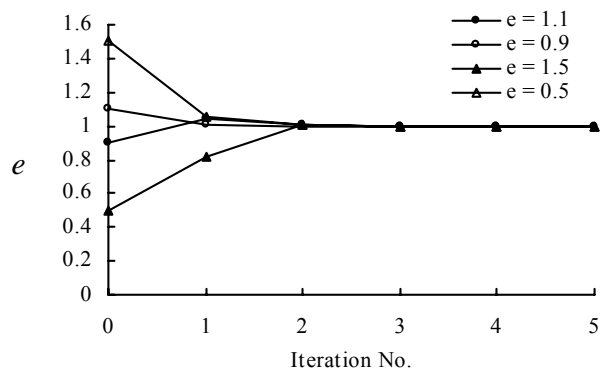
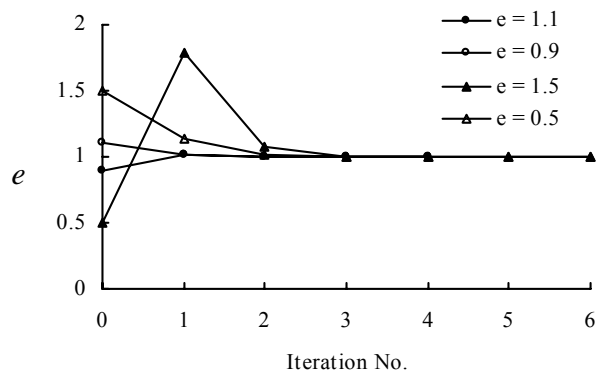


Fig. 7 Example problem 2.



(a''')



(b''')

Fig. 8 Iterations (a'''), (b''') for different e .