

Trefftz 法と計算点解析法を用いたポアソン方程式の解法

SOLUTION OF POISSON EQUATION BY USING
TREFFTZ METHOD AND COMPUTING POINT ANALYSIS SCHEME北 英輔¹⁾, 池田洋一²⁾, 安藤孝彦³⁾, 神谷紀生⁴⁾

Eisuke KITA, Yoichi IKEDA, Takahiko ANDOH and Norio KAMIYA

- 1) 名古屋大学情報文化学部 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町, E-mail: kita@info.human.nagoya-u.ac.jp)
 2) 大同工業大学 (〒457-8530 名古屋市南区滝春町, E-mail: ikeda@daidoh-it.ac.jp)
 3) 名古屋大学情報文化学部 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町, E-mail: andoh@info.human.nagoya-u.ac.jp)
 4) 名古屋大学人間情報学研究所 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町, E-mail: b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp)

This paper describes the application of the Trefftz method to the solution of the non-linear Poisson equation. The inhomogeneous term containing the unknown function is approximated by a polynomial in the Cartesian coordinates to determine the particular solution for the Poisson equation. The solution of the problem is approximated with the superposition of the Trefftz functions of the Laplace equation and the particular solution. Unknown parameters included in the approximate solution are determined so that the solution satisfies the boundary conditions. The present scheme is applied to some examples in order to study the numerical properties.

Key Words: Trefftz Method, Computing Point Analysis Scheme, Poisson Equation

1. はじめに

Trefftz 法は、支配方程式を満足する Trefftz 関数を用いた境界型数値解析法であり、1926年に Trefftzにより初めて提案された⁽¹⁾。その後、Cheungら^(2,3)、Herreraら⁽⁴⁾、神谷ら⁽⁵⁾、Zielinskiら⁽⁶⁾などによって研究が進められている。これまで Trefftz 法の適用対象は、ポテンシャル問題^(2,6)や2次元弾性問題⁽³⁾など、主として同次方程式に支配される問題に限られていた。これに対して、本論文ではポアソン方程式の解析に Trefftz 法を適用する方法について述べる。

これまで Trefftz 法の解析対象が主として同次方程式を支配方程式とする境界値問題に限られていたのは、ポアソン方程式など非同次項を有する支配方程式に対する Trefftz 関数を導出することが困難だったためである。この問題を解決するために、真鍋ら⁽⁸⁾は境界要素法で用いられる二重相反法(Dual Reciprocity Method, DRM)を Trefftz 法に適用した手法を提案している。これに対して、本研究では神谷ら⁽⁷⁾が提案している計算点法を適用した方法を提案する。二重相反法では Radial Bases Function を用いて特解を近似するのに対して、計算点法では領域全体についての完全多項式を用いる点が異なる。また、真鍋らは解析対象として非同次項が座標のみの関数である場合を扱っているが、本論文では非同次項にポテンシャルを含む場合の定式化についても述べる。

本論文で提案する方法は以下のものである。まず、非線形ポアソン方程式の非同次項を、未知関数を含んだままで完全多項式で近似し、それに対応する特解を導出する。特解を用いてポアソン方程式の境界値問題をラプラス方程式の境界値問題に変換する。ラプラス方程式の境界値問題は Trefftz 法で容易に解かれるので、その結果と特解より元の問題の解を評価する。最後に、提案する方法を非同次項が未知関数を含むポアソン方程式の数値解法に適用し、解析結果を厳密解と比較することで有効性を検討する。

2. 選点法による Trefftz 法の定式化

本論文で提案する方法では、2次元ポアソン方程式の境界値問題が2次元ラプラス方程式の境界値問題に帰着されて解析される。そこで、最初に、2次元ラプラス方程式の境界値問題に対する Trefftz 法の定式化について述べる。

2.1. 2次元ラプラス方程式の境界値問題と Trefftz 関数

2次元ラプラス方程式の境界値問題は次のようになる。

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q &= \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで $q \equiv \partial u / \partial n$ であり、 $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2$ は解析対象領域、ポテ

ンシャル u とフラックス q の指定境界である。 \mathbf{n} は境界単位法線ベクトル、 (\cdot) は既定値を示す。

Trefftz 法では定式化に Trefftz 関数 (T-complete function) とよばれる非特異な関数群を用いる。 Trefftz 関数は支配方程式を満足するように決定されており、この場合次のように与えられる (4)。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{*T} &= \{u_1^*, \dots, u_{2\mu-1}^*, u_{2\mu}^*, \dots\} \\ &= \{1, \dots, \Re[r^\mu e^{j\mu\theta}], \Im[r^\mu e^{j\mu\theta}], \dots\} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで r, θ は平面極座標であり、原点は任意にとられる。

2.2. 選点法による定式化

ポテンシャル u を Trefftz 関数 u_j^* の線形結合で次のように近似する。

$$\begin{aligned} u &\simeq \tilde{u} = a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \dots + a_N u_N^* \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* \end{aligned} \quad (4)$$

ここで N は Trefftz 関数の総数を、 $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_N\}^T$ は未知係数ベクトルを示す。この式を境界の法線方向に偏微分すれば境界でのフラックスの近似式を得る。

$$\begin{aligned} q &\simeq \tilde{q} \equiv \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = a_1 q_1^* + a_2 q_2^* + \dots + a_N q_N^* \\ &= \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* \end{aligned} \quad (5)$$

これらを式 (2) に代入すると境界条件は完全には満足されないので残差が生じる。つまり、

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv \tilde{u} - \bar{u} = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* - \bar{u} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \\ R_2 &\equiv \tilde{q} - \bar{q} = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* - \bar{q} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \end{aligned}$$

Trefftz 法では境界条件を満足するように係数ベクトル \mathbf{a} を定める。選点法による定式化では境界選点 P_i で、上式の残差を 0 とおく。つまり、

$$\begin{aligned} R_1(P_i) &= \mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(P_i) - \bar{u}(P_i) = 0 \quad (P_i \in \Gamma_1) \\ R_2(P_i) &= \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*(P_i) - \bar{q}(P_i) = 0 \quad (P_i \in \Gamma_2) \end{aligned}$$

上式を整理すると、

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (6)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} u_{11}^* & \dots & u_{1N}^* \\ \vdots & & \vdots \\ u_{M_1 1}^* & \dots & u_{M_1 N}^* \\ q_{11}^* & \dots & q_{1N}^* \\ \vdots & & \vdots \\ q_{M_2 1}^* & \dots & q_{M_2 N}^* \end{bmatrix} \\ \mathbf{f} &= \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{M_1}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{M_2}\}^T \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、 $u_j^*(P_i) \equiv u_{ij}^*$, $q_j^*(P_i) \equiv q_{ij}^*$, $\bar{u}(P_i) \equiv \bar{u}_i$, $\bar{q}(P_i) \equiv \bar{q}_i$ である。また、 M_1, M_2 はそれぞれ Γ_1, Γ_2 上にとられた選点の総数である。係数マトリックス \mathbf{K} において、行数は選点総

数に等しく、列数は Trefftz 関数の総数に等しいので、選点総数を Trefftz 関数の総数以上に取り、特異値分解を適用して連立方程式を解く (9)。

2.3. 2次元ポアソン方程式の境界値問題

2次元ポアソン方程式の境界値問題における支配方程式と境界条件は次式で与えられる。

$$\nabla^2 u + b(x, y, u) = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q &= \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで、 $b(x, y, u)$ はポアソン方程式の非同次項であり、以下では非同次項が u を含む場合と含まない場合において、提案する方法の定式化を説明する。

3. 非同次項が座標のみの関数である場合

3.1. 境界値問題

ここでは、ポアソン方程式の非同次項が、座標のみの関数で与えられる場合を考える。このとき、境界値問題の支配方程式と境界条件は次式で与えられる。

$$\nabla^2 u + b(x, y) = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q &= \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3.2. 支配方程式の変換

最初に、非同次項 $b(x, y)$ を直交座標系 x, y の5次完全多項式を用いて近似する。つまり、

$$\begin{aligned} b(x, y) &= c_1 + c_2 x + c_3 y + \dots + c_{20} x y^4 + c_{21} y^5 \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{r} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 \mathbf{c} と \mathbf{r} は未知パラメータベクトルと完全多項式の各項から成るベクトルであり、それぞれ次式で与えられる。

$$\mathbf{c}^T = \{c_1, c_2, \dots, c_{21}\} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T &= \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, \\ & y^3, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, \\ & x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5\} \end{aligned} \quad (15)$$

未知パラメータ \mathbf{c} を決定するために、境界上と領域内いくつかの評価点をとる。これらの評価点を、ここでは計算点と呼ぶ。全ての計算点 Q_i において、式 (13) を選点法的に満足させることを考えると次の連立方程式を得る。

$$\mathbf{c}^T \mathbf{r}(Q_1) - b(Q_1) = 0$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{r}(Q_2) - b(Q_2) = 0$$

\vdots

$$\mathbf{c}^T \mathbf{r}(Q_{M_c}) - b(Q_{M_c}) = 0$$

ここで、 M_c は計算点の総数である。この連立方程式は、行数 M_c 、列数 21 なので、 $M_c \geq 21$ として特異値分解を用いて解析する⁽⁹⁾。

ひとたび係数 \mathbf{c} が定まれば、解くべき支配微分方程式は次式で近似される。

$$\nabla^2 u + \mathbf{c}^T \mathbf{r} = 0 \quad (16)$$

式 (16) の同次解を u^h 、 r_i に対応する特解を u_i^p とすれば、境界値問題の解 u は次式で近似される。

$$\begin{aligned} u &= u^h + c_1 u_1^p + c_2 u_2^p + \cdots + c_{21} u_{21}^p \\ &= u^h + \mathbf{c}^T \mathbf{u}^p \end{aligned} \quad (17)$$

ここで $\mathbf{c}^p = \{c_1, c_2, \dots, c_{21}\}^T$ である。また、 r_i は多項式であるから、 u_i^p を容易に求めることができる。

式 (17) を支配方程式と境界条件式に代入すると、境界値問題は次式に変形できる。

$$\nabla^2 u^h = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} u^h &= \bar{u} - \mathbf{c}^T \mathbf{u}^p \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q^h &= \bar{q} - \mathbf{c}^T \mathbf{q}^p \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、

$$\mathbf{q}^p = \{q_1^p, q_2^p, \dots, q_{21}^p\}^T$$

そして、 $q^h \equiv \partial u^h / \partial \mathbf{n}$ 、 $q_i^p \equiv \partial u_i^p / \partial \mathbf{n}$ である。

このように、最初の問題は同次解 u^h についてのラプラス方程式の境界値問題に変形されたので、先に述べた Trefftz 法の定式化に従って 2 次元ラプラス方程式の境界値問題を解析すれば u^h を決定することができる。そして、ひとたび u^h が決定されれば、解 u は式 (17) より決定される。

3.3. 解析アルゴリズム

アルゴリズムを示すと以下ようになる。

1. 非同次項 $b(x, y)$ を 5 次の完全多項式で近似して、パラメータ \mathbf{c} を決定する。
2. 式 (18) と式 (19) で与えられる境界値問題を解いて同次解 u^h を計算する。
3. 式 (17) より解 u を計算する。

4. 非同次項が u の関数である場合

4.1. 境界値問題

この場合、支配方程式と境界条件は次式で与えられる。

$$\nabla^2 u + b(x, y, u) = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q &= \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

4.2. 支配方程式の変換

先に述べた定式化に従って、式 (20) の左辺第 2 項を未知関数 u を含んだまま完全多項式で展開する。つまり、

$$b(x, y, u) = \mathbf{c}^T \mathbf{r} \quad (22)$$

上式を用いると支配方程式は次式に変換される。

$$\nabla^2 u + \mathbf{c}^T \mathbf{r} = 0 \quad (23)$$

式 (23) の同次解を u^h 、 r_i に対応する特解を u_i^p とすれば、境界値問題の解 u は式 (17) で近似される。式 (17) を用いれば、式 (20) と (21) で与えられる境界値問題は次式に変換される。

$$\nabla^2 u^h = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} u^h &= \bar{u} - \mathbf{c}^T \mathbf{u}^p \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ q^h &= \bar{q} - \mathbf{c}^T \mathbf{q}^p \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

この場合未知パラメータ \mathbf{c} は未知関数であるポテンシャル u の関数となり、あらかじめ定めることができないので収束計算が必要である。つまり、最初に \mathbf{c} を仮定して解析を行い、得られた u から非同次項を計算して、式 (22) を満足するように未知パラメータを変更することになる。この方法について説明する。

4.3. 未知パラメータの更新法

まず、式 (22) を繰り返し計算 (k) と ($k+1$) 回目について考えると次式となる。

$$\begin{aligned} b(x, y, u)^{(k+1)} &= \mathbf{r}^T \mathbf{c}^{(k+1)} \\ b(x, y, u)^{(k)} &= \mathbf{r}^T \mathbf{c}^{(k)} \end{aligned}$$

左辺と右辺をそれぞれ引き算すると次式となる。

$$\begin{aligned} b^{(k+1)} - b^{(k)} &= \mathbf{r}^T (\mathbf{c}^{(k+1)} - \mathbf{c}^{(k)}) \\ &\equiv \mathbf{r}^T \Delta \mathbf{c} \end{aligned} \quad (26)$$

そして、境界上と領域内に取られた計算点において式 (26) を選点法的に満足するように $\Delta \mathbf{c}$ を決定する。つまり、計算点 Q_i について式 (26) を考えると

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T(Q_i) \Delta \mathbf{c} &= b^{(k+1)} - b^{(k)} \\ &= b(u(Q_i^{(k)})) - \mathbf{r}^T \Delta \mathbf{c}^{(k)} \\ &\equiv \Delta b(Q_i) \end{aligned}$$

全ての計算点 Q_i で上式を考えて連立方程式とすると次式になる。

$$\mathbf{D} \Delta \mathbf{c} = \mathbf{f} \quad (27)$$

ここで \mathbf{D} と \mathbf{f} は、それぞれ完全多項式の項から成る行列と非同次項に関する係数ベクトルである。式 (27) を特異値分解⁽⁹⁾ によって解いて $\Delta \mathbf{c}$ を決定し、それを用いて \mathbf{c} を次式で更新する。

$$\mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{c}^{(k)} + \Delta \mathbf{c} \quad (28)$$

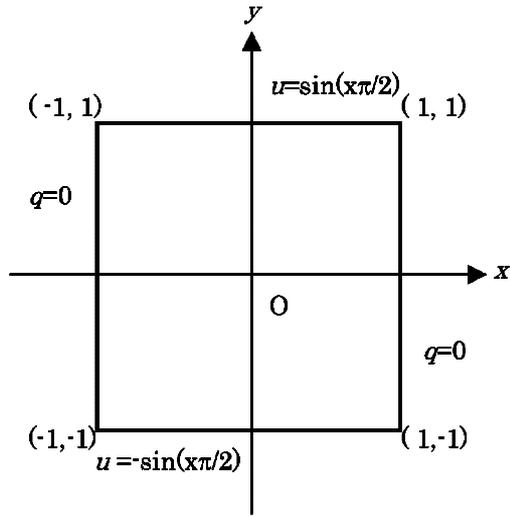


Fig. 1 Numerical example 1

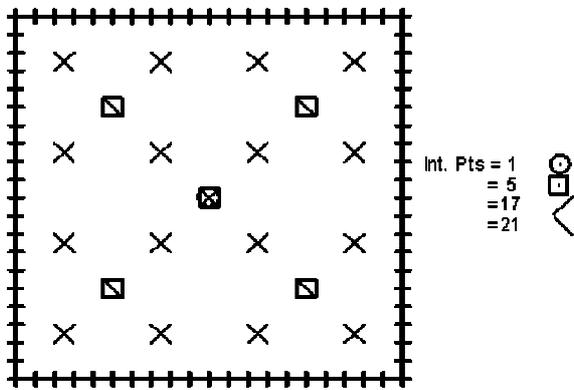


Fig. 2 Placement of collocation and computing points

収束判定条件を次式のように定義する。

$$\eta \equiv \frac{1}{M_c} \sum_{i=1}^{M_c} |\Delta b(Q_i)| < \eta_c \quad (29)$$

ここで、 η_c はユーザーによって定義された正の定数である。

4.4. 解析アルゴリズム

アルゴリズムを示すと以下のようになる。

1. $k \leftarrow 0$ として、 \mathbf{c}^0 を仮定する。
2. 式 (23) と式 (25) で与えられる境界値問題を解き、計算点での非同次項を計算する。
3. 収束判定を行う。条件を満足すれば結果を出力し、満足しなければ次へ進む。
4. 連立方程式 (27) を解いて $\Delta \mathbf{c}$ を決定する。
5. \mathbf{c} を更新して k をインクリメントし、(3) へ進む。

5. 解析例

5.1. 例題 1

最初の例題として、支配方程式が次式で与えられる場合を

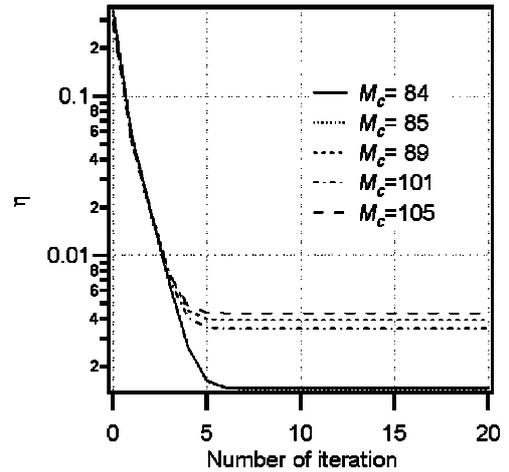


Fig. 3 Convergence property of η

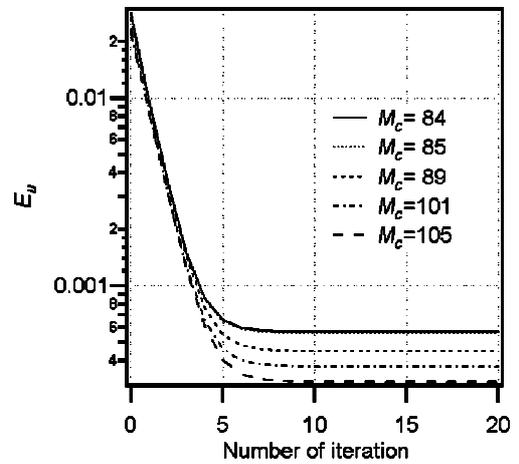


Fig. 4 Convergence property of E_u

考える。

$$\nabla^2 u + \frac{\pi^2}{2} u = 0$$

境界条件は図 1 に示されたように与える。この問題の解析解は次式で与えられる。

$$u^{ex} = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

解析のために、境界上に選点を 84 個等間隔に配置する。また、それ以外に内点をそれぞれ 0, 1, 5, 17, 21 個配置する場合を比較する。境界点と内点の配置を図 2 に示す。計算点としては全ての境界点と内点をとる。また、パラメータ c_i の初期値は全て 0 とする。

領域全体での計算精度を検討するために、25 個の精度評価点を境界と領域に均等に配置し、領域全体の計算精度を示す指標として次式を用いる。

$$E_u = \frac{1}{25} \sum |u - u^{ex}|$$

η の収束状況を図 3 に示す。 M_c は計算点の総数を示し、これは境界選点と内点の総数に等しい。横軸には繰り返し計算

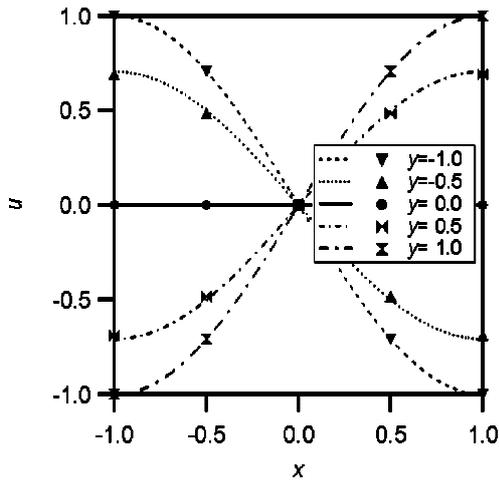


Fig. 5 Distribution of potential value ($M_c = 84$)

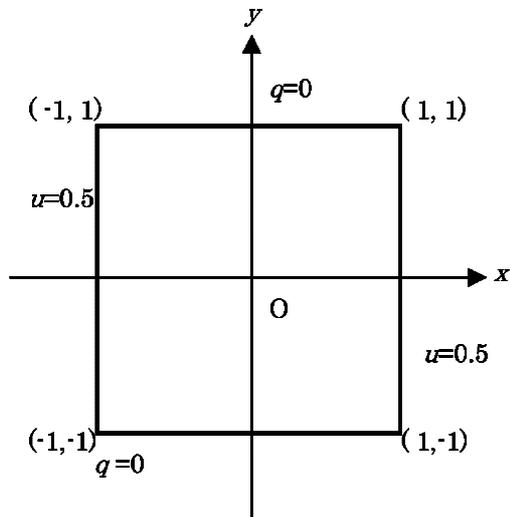


Fig. 6 Numerical example 2

の回数を、縦軸には η の値をとり、異なる内点数での収束特性の違いを比較する。これより、 η は内点数によらず 6 回程度の繰り返し計算で、それぞれ収束していることが分かる。また、内点数が少ないほど η の最終的な値は小さいことが分かる。次に、 E_u の収束状況を図 4 に示す。横軸には繰り返し計算の回数を、縦軸には E_u の値をとり、異なる内点数での収束特性の違いを比較する。この場合も η と同じく、 E_u は 6 回程度の繰り返し計算で収束しているが、この場合は内点数が多いほど最終的な精度が良いことが分かる。内点無しで解析を行い、十分に収束したときの u の分布を図 5 に示す。横軸には、精度評価点の x 座標を取り、縦軸には u の値を取る。線は理論解を、記号は提案した方法で求めた数値解を示す。このグラフより、数値解が理論解と良く一致していることが分かる。

5.2. 例題 2

次の例題として、支配方程式が次式で与えられる場合を考

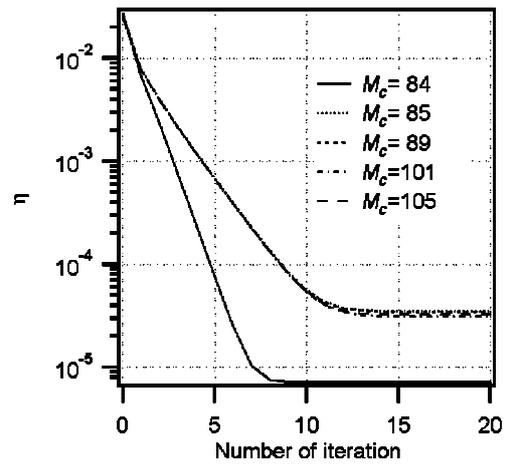


Fig. 7 Convergence property of η

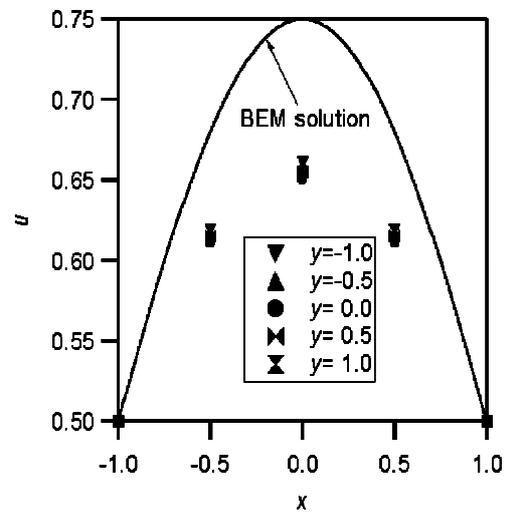


Fig. 8 Distribution of potential value ($M_c = 84$)

える。

$$\nabla^2 u + u^2 = 0$$

境界条件は図 6 に示されたように与える。解析のために、境界上に選点を 84 個等間隔に配置する。また、それ以外に内点をそれぞれ 0, 1, 5, 17, 21 個配置する場合を比較する。境界点と内点の配置を図 2 に示す。計算点としては全ての境界点と内点をとる。また、パラメータ c_i の初期値は全て 0 とする。

η の収束状況を図 7 に示す。 M_c は計算点の総数を示し、これは境界選点と内点の総数に等しい。横軸には繰り返し計算の回数を、縦軸には η の値をとり、異なる内点数での収束特性の違いを比較する。これより、 η は内点数によらず 10 回程度の繰り返し計算で収束しており、内点数が少ないほど η の最終的な値は小さいことが分かる。そこで、内点数 0 と 21 個で解析を行い、十分に収束した場合の関数値の分布を境界要素法による結果と比較する。比較した結果を、図 8 と図 9 に示す。これより、内点数が 0 の場合は境界から離れるに従って誤差が大きくなるのに対して、内点数が 21 個の場

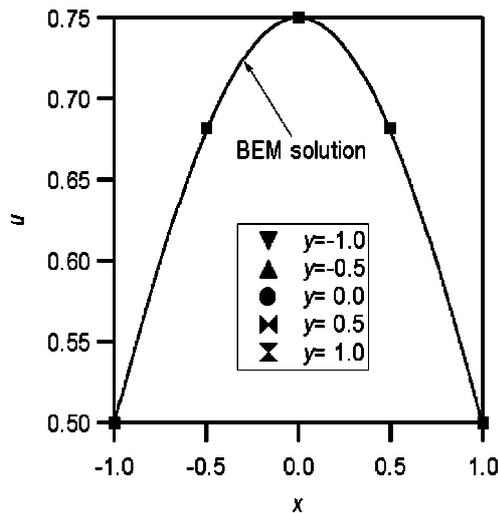


Fig. 9 Distribution of potential value ($M_c = 105$)

合は全体に良い精度を得ている事が分かる。

6. まとめ

本研究では、2次元ポアソン方程式の境界値問題に対する Trefftz 法の定式化法について提案した。Trefftz 法は支配方程式を満足する非特異な Trefftz 関数を用いる解析法である。Trefftz 法をポアソン方程式の数値解析に適用する場合、非同次項の形によって Trefftz 関数を導出することが一般的に困難であるため、適用が困難であった。この問題を解消するために、本研究では以下のような方法を提案した。まず、非同次項を5次までの完全多項式で近似した。そして、完全多項式の各項を非同次項とするポアソン方程式を考え、そのポアソン方程式に対する特解を用いて、最初のポアソン方程式をラプラス方程式に変換して解析した。

解析対象として、非同次項が未知ポテンシャルを含む場合を考え、解法の特長について検討した。内点数が増えるほど数値解の精度は高くなる事が確認できた。

参考文献

- (1) E. Trefftz. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. *Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech., Zurich*, pp. 131–137, 1926.
- (2) Y. K. Cheung, W. G. Jin, and O. C. Zienkiewicz. Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions. *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 5, pp. 159–169, 1989.
- (3) W. G. Jin, Y. K. Cheung, and O. C. Zienkiewicz. Application of the Trefftz method in plane elasticity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, pp. 1147–1161, 1990.
- (4) I. Herrera. Theory of connectivity: A systematic formulation of boundary element methods. In C. A. Brebbia, editor, *New Developments in Boundary Element Methods (Proc. 2nd Int. Seminar on Recent Advances in BEM, Southampton, England, 1980)*, pp. 45–58. Pentech Press, 1980.
- (5) N. Kamiya and S. T. Wu. Generalized eigenvalue formulation of the Helmholtz equation by the Trefftz method. *Engineering Computations*, Vol. 11, pp. 177–186, 1994.
- (6) A. P. Zielinski and O. C. Zienkiewicz. Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 509–528, 1985.
- (7) 神谷紀生, 許松青. 非同次・非線形問題に対する境界要素解析の一定式と解法. *Transactions of JSME*, Vol. A64, pp. 147–154, 1998.
- (8) 真鍋尚, 福本容子, 登坂宣好. Trefftz 法の2次元ポアソン方程式への適用. 計算工学会講演論文集, Vol. 5, pp. 289–292, 2000.
- (9) E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, S. Ostrouchov, and D. Sorensen. *LAPACK User's Manual*. SIAM, 2nd edition, 1995.