

# 温度依存性材料の定常熱伝導問題に対する二重相反 BEM

## DUAL RECIPROCITY BOUNDARY ELEMENT METHOD APPLIED TO THE STEADY-STATE HEAT CONDUCTION PROBLEM OF TEMPERATURE-DEPENDENT MATERIALS

田中 正隆<sup>1)</sup>, 松本 敏郎<sup>2)</sup>, 須田 裕輔<sup>3)</sup>

Masataka TANAKA, Toshiro MATSUMOTO and Yusuke SUDA

- 1) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: dtanaka@gipwc.shinsu-u.ac.jp)  
 2) 信州大学工学部機械システム工学科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: toshiro@gipwc.shinsu-u.ac.jp)  
 3) 信州大学大学院工学系研究科 (〒 380-8553 長野市若里 4-17-1, E-mail: yusuke@artist.shinsu-u.ac.jp)

This paper presents a dual reciprocity boundary element method (DRBEM) for solving the steady-state heat conduction problem of temperature-dependent materials. The integral equation formulation uses the fundamental solution of the Laplace equation for homogeneous materials, and due to this fact a domain integral arises in the boundary integral equation. This domain integral is transformed into boundary integrals based on the dual reciprocity introducing a new set of radial basis functions. An iterative solution procedure is used because the material constant is temperature-dependent and hence nonlinear. The details of the proposed DRBEM are presented, and a computer code is developed for two-dimensional and three-dimensional problems. Through discussion of the results obtained by the computer code, the usefulness of the proposed DRBEM is demonstrated.

**Key Words:** Boundary Element Method, Dual Reciprocity Method, Temperature Dependent Materials, Steady-State Heat Conduction

### 1. はじめに

熱伝導問題では普通、熱伝導率などの材料定数を一定と仮定して解析を行うが、高温状態では熱伝導率は温度に依存するため温度依存材料というより正確なモデル化をしなければならない<sup>(1)(2)</sup>。この場合には非線形熱伝導問題となり熱伝導率一定と仮定した場合に比べて解析は容易ではない。このような温度依存材料は、熱伝導率が温度に依存して連続的に変化するとモデル化することができる。最も単純なモデル化は熱伝導率が温度の線形関数であると仮定するものである。

境界要素法を用いてこのような温度依存材料の熱伝導問題を解析する際、温度依存性を考慮した基本解を求められる場合は限られていて、均質媒体に対する基本解を用いて定式化を行わなければならない<sup>(3)</sup>。このとき、積分方程式の中に温度依存性由来する領域積分項が現れる。この領域積分項は、領域内部を要素またはセルに区切ることにより計算することができるが、この作業には手間がかかる。熱伝導率が温度の関数であるために起こる非線形性は多くの場合 Kirchhoff 変換を用いて線形の問題に変換して解析することができる<sup>(4)</sup>。この変換操作により、自然境界条件や基本境界条件だけが現れるような問題については、線形の連立方程式が得られる。しかしながら、一般の境界条件や領域の接続条件の取り

扱いには困難が伴い、Kirchhoff 変換を施しても計算はかなり面倒になる。

本研究では、この温度依存性由来する領域積分項に対して二重相反法 (DRM) を適用し、領域積分項を境界積分に変換して近似的に評価する<sup>(5)(6)</sup>。DRM を用いると、比較的簡単な近似関数と線形微分作用素の特解を用いて領域積分項を境界積分に変換することができる。したがって最終的に境界のみの離散化と評価点を領域内部に配置するだけで効率的な解析が可能となる。熱伝導率の温度依存性由来する非線形性は繰り返し計算により計算する。本報では、2 次元および 3 次元問題に対する定式化の詳細と例題解析により本手法の有効性を示す。

### 2. 理論

#### 2.1. 支配微分方程式

熱伝導率が温度に依存して連続的に変化する定常熱伝導問題に対する支配微分方程式は内部発熱がない場合次式となる<sup>(2)</sup>。

$$\nabla\{\lambda(u)\nabla u(x)\} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $u$  は温度、 $\lambda$  は熱伝導率を表す。また、境界条件は

次式で与えられるものとする．

$$\begin{aligned} u(x) &= \bar{u}, & x \in \Gamma_u \\ q(x) &= \frac{\partial u(x)}{\partial n} = \bar{q}, & x \in \Gamma_q \end{aligned} \quad (2)$$

上式において  $\bar{u}$ ,  $\bar{q}$  はそれぞれ与えられた境界上において既知の境界値であり  $n$  は境界上の単位外向き法線ベクトル,  $\partial u(x)/\partial n$  は温度の法線方向勾配を表す．ここで, 式 (1) は次式のように展開することができる．

$$\nabla^2 u(x) = -\frac{1}{\lambda(u)} \{ \nabla \lambda(u) \nabla u(x) \} \quad (3)$$

上式において左辺は均質性を表し右辺は温度依存性に由来する項である．

## 2.2. 積分方程式

本研究では近似基本解として Laplace 方程式の基本解を使用する．式 (1) に対する厳密基本解を求めることは困難であり, 表示の容易な Laplace 方程式の基本解を使用する．Laplace 方程式の基本解は次式となる (3)．

$$\begin{aligned} u^*(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r} \right), & (2 \text{次元}) \\ u^*(x, y) &= \frac{1}{4\pi r}, & (3 \text{次元}) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで,  $x, y$  は空間内の点であり,  $r$  はソース点  $y$  と観測点  $x$  との距離を表す．式 (3) の両辺に基本解  $u^*(x, y)$  をかけ考察領域全体で積分し, 部分積分を行うことにより次式を得る．

$$\begin{aligned} c(y)u(y) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x, y)q(x)d\Gamma \\ = - \int_{\Omega} u^*(x, y) \left\{ -\frac{1}{\lambda(u)} \nabla \lambda(u) \nabla u(x) \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

ここで,  $q^*(x, y)$  は基本解  $u^*(x, y)$  の法線方向勾配を意味し, 次式となる．

$$\begin{aligned} q^*(x, y) &= \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}, & (2 \text{次元}) \\ q^*(x, y) &= \frac{-1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n}, & (3 \text{次元}) \end{aligned} \quad (6)$$

式 (5) からわかるように, 左辺についてはすべて境界積分に変換することができるが右辺の領域積分項はそのまま残る．この領域積分項は領域内部を要素またはセルに区切ることにより計算することができるがこの作業にはたいへん手間がかかる．そこで, 本研究では右辺の領域積分項を境界積分に変換して評価するために二重相反法を適用する．

## 2.3. DRM

式 (5) の右辺に現れる領域積分項を境界積分に変換するために DRM を適用する (5)(6)．まず, 式 (3) の右辺を次式で近似する．

$$-\frac{1}{\lambda(u)} \{ \nabla \lambda(u) \nabla u(x) \} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f(x, z^j) \quad (7)$$

ここで,  $N$  は境界節点数,  $L$  は内部選点数,  $\alpha_j$  は未知係数,

$f(x, z^j)$  は近似関数,  $z^j$  は DRM 選点を表す．さらに次式を満たす特解を  $\hat{u}(x, z^j)$  とする．

$$\nabla^2 \hat{u}(x, z^j) = f(x, z^j) \quad (8)$$

上式を満たす特解を式 (7) に代入することにより式 (3) は次式のように変形される．

$$\nabla^2 u(x) = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \nabla^2 \hat{u}(x, z^j) \quad (9)$$

ここで, 上式の両辺に基本解  $u^*(x, y)$  をかけ, 考察領域全体で積分することにより次の積分方程式を得る．

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^*(x, y) \nabla^2 u(x) d\Omega \\ = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} u^*(x, y) \nabla^2 \hat{u}(x, z^j) d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

部分積分を 2 回行うことにより次の境界積分のみの式を得る．

$$\begin{aligned} c(y)u(y) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)u(x)d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(x, y)q(x)d\Gamma \\ = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left\{ c(y)\hat{u}(x, z^j) + \int_{\Gamma} q^*(x, y)\hat{u}(x, z^j)d\Gamma \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} u^*(x, y)\hat{q}(x, z^j)d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし, 上式において  $c(y)$  はソース点の置かれている境界のなす角度により決まる係数であり  $\hat{q}(x, z^j)$  は特解  $\hat{u}(x, z^j)$  の法線方向勾配を表す．温度依存性に由来する項を未知係数と近似関数を用いて評価することにより温度依存性に由来する領域積分項を境界積分に変換して評価することができる．ソース点  $y$  を境界上のすべての節点および領域内部の選点にとることにより式 (11) は離散化された形で次式のようにまとめて書き表すことができる．

$$Hu - Gq = [H\hat{U} - G\hat{Q}] \alpha \quad (12)$$

上式において未知係数は温度に依存する項と近似関数により評価する．

DRM を用いた定式化の際, 近似関数  $f(x, z^j)$  の選択が解析精度に影響する (7)(8)．多くの場合この近似関数を各節点間の距離の関数で定義しており, 本研究においても同様の近似関数を使用する．その中でも, Compactly Supported Radial Basis Function (7) と呼ばれる次式に示す特徴を持つ近似関数を使用する．

$$f(x, z^j) = \begin{cases} F(r^j), & 0 \leq r^j \leq a \\ 0, & r^j > a \end{cases} \quad (13)$$

上式において  $r^j$  は観測点  $x$  と DRM 選点  $z^j$  との距離を表し, 近似関数  $f(x, z^j)$  は影響半径  $a$  を越えるような場合 0 となる．つまり, 観測点  $x$  から距離  $a$  の範囲内にある選点だけが影響する関数である．DRM や MRM (9) で用いられる近似関数に

については多くの研究がなされており、上式のような近似関数のほかに線形な Radial Basis Function や Thin Plate Spline などが知られているが、本研究の定式化では近似関数の座標微分が  $r^j = 0$  において連続であることが望ましい。これは、温度依存性由来する項に存在する温度の座標微分を評価する際、近似関数を用いた評価を行うためである。式 (8) を満たす特解  $\hat{u}(x, z^j)$  は距離  $r^j$  の関数として求めることができるが、式 (13) のように  $r^j = a$  において使用する関数が異なる。そのため特解  $\hat{u}(x, z^j)$  が  $r^j = a$  において連続となるように  $r^j > a$  の場合については特別な計算が必要となる<sup>(7)</sup>。

$$\hat{u}(x, z^j) = \begin{cases} \int_0^{r^j} \frac{1}{s^{M-1}} \int_0^s t^{M-1} F(t) dt ds, & 0 \leq r^j \leq a \\ \int_0^a \frac{1}{s^{M-1}} \int_0^s t^{M-1} F(t) dt ds \\ + \int_a^{r^j} \frac{1}{s^{M-1}} \int_0^a t^{M-1} F(t) dt ds, & r^j > a \end{cases} \quad (14)$$

ただし、 $M$  は取り扱う次元を表す。上式より、特解を求めることができ、特解の法線方向勾配  $\hat{q}(x, z^j)$  も上式から求めることができる。

#### 2.4. 未知係数

前節までの理論により式 (12) 中の未知係数  $\alpha_j$  以外の係数については計算することができる。以降は未知係数の評価について述べる。式 (3) の右辺を未知係数と近似関数を用いて次式のように近似していた。

$$-\frac{1}{\lambda(u)} \sum_{m=1}^M \frac{\partial \lambda(u)}{\partial x_m} \frac{\partial u(x)}{\partial x_m} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f(x, z^j) \quad (15)$$

ただし、 $M$  は次元を表し 2 次元の場合  $M = 2$ 、3 次元の場合  $M = 3$  である。ここで、近似関数  $f(x, z^j)$  は全選点に対して既知となるため未知係数はマトリックス形式で次式のように書き表すことができる。

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1} \sum_{m=1}^M [\mathbf{K}_m \mathbf{u}_{x_m}] \quad (16)$$

ただし、

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x^1, z^1) & \dots & f(x^1, z^{N+L}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x^{N+L}, z^1) & \dots & f(x^{N+L}, z^{N+L}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

であり、 $\mathbf{F}^{-1}$  は  $\mathbf{F}$  の逆行列を表す。また、

$$\mathbf{K}_m = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\lambda(u^1)} \frac{\partial \lambda(u^1)}{\partial x_m} \\ \vdots \\ -\frac{1}{\lambda(u^{N+L})} \frac{\partial \lambda(u^{N+L})}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{u}_{x_m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x^1)}{\partial x_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial u(x^{N+L})}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (19)$$

である。

ここで、式 (19) の温度の座標微分について評価する。温度の座標微分の評価には差分近似を用いる手法、各節点における状態量を内挿して数値微分する手法、近似関数を用いる手法などが考えられる。本研究では一貫して近似関数を用いてこの評価を行う。まず、温度  $u(x)$  を次式で近似する。

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j f(x, z^j) \quad (20)$$

ただし、 $\beta_j$  は未知係数である。上式を  $x_m$  で微分することにより次式を得る。

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_m} = \sum_{j=1}^{N+L} \beta_j \frac{\partial f(x, z^j)}{\partial x_m} \quad (21)$$

式 (20), (21) をすべての選点に対して適用し未知係数  $\beta_j$  を消去することにより  $\partial u(x)/\partial x_m$  は次式のように評価することができる。

$$\mathbf{u}_{x_m} = \mathbf{F}_{x_m} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (22)$$

ただし、

$$\mathbf{F}_{x_m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^1, z^1)}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial f(x^1, z^{N+L})}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x^{N+L}, z^1)}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial f(x^{N+L}, z^{N+L})}{\partial x_m} \end{bmatrix} \quad (23)$$

である。近似関数  $f(x, z^j)$  の  $x_m$  による微分は次式より計算する。

$$\frac{\partial f(x, z^j)}{\partial x_m} = \frac{\partial f(x, z^j)}{\partial r^j} \frac{\partial r^j}{\partial x_m} \quad (24)$$

このとき、上式が  $r^j = 0$  において連続である必要がある。この条件を満たす近似関数の選択が必要であり、そうではない場合温度の座標微分を近似関数を用いて評価することはできない。式 (13) の近似関数を決定するときには上記の条件を満たす必要がある。

さらに、 $\mathbf{K}_m$  の成分の中にも温度の座標微分が含まれており、同様に近似関数による評価を行う。式 (18) より

$$-\frac{1}{\lambda(u)} \frac{\partial \lambda(u)}{\partial x_m} = -\frac{1}{\lambda(u)} \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \frac{\partial u(x)}{\partial x_m} \quad (25)$$

であり、近似関数による微分の評価を行うことにより  $\mathbf{K}_m$  は次式で書き表すことができる。

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{J} \mathbf{F}_{x_m} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} \quad (26)$$

ただし,

$$J = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{\lambda(u^1)} \frac{\partial \lambda(u^1)}{\partial u} \\ \vdots \\ -\frac{1}{\lambda(u^{N+L})} \frac{\partial \lambda(u^{N+L})}{\partial u} \end{array} \right\} \quad (27)$$

である.したがって,未知係数  $\alpha$  は次式のように書き表すことができる.

$$\alpha = F^{-1} \sum_{m=1}^M [K_m F_{x_m}] F^{-1} u \quad (28)$$

上式を式 (12) へ代入し整理すると次式のようにまとめることができる.

$$Hu - Gq = Ru \quad (29)$$

ただし,

$$R = [H\hat{U} - G\hat{Q}]F^{-1} \sum_{m=1}^M [K_m F_{x_m}] F^{-1} \quad (30)$$

である.ここで,式 (29) の係数  $R$  は未知温度  $u(x)$  を含む係数であり非線形問題となる.本研究では,繰り返し計算により計算を行う.式 (29) において  $R = 0$  と仮定し計算を行う.その結果得られた温度を仮定の温度として式 (30) を計算する.その結果得られた  $R$  を用いて再び式 (29) を解く.式 (30) の中で仮定された温度と式 (29) の計算で得られた温度の差が十分小さくなるまで計算を繰り返す.

以上の理論を用いて計算を行うことにより  $N$  個の境界上の未知量と  $L$  個の領域内部の未知温度を求めることができる.

### 3. 例題

#### 3.1. 例題 1

本手法の有効性を示すために Fig. 1 に示す 2 次元問題に対する例題解析を行う.このモデルにおいて解析対象は ABCD からなる正方形である.境界節点を 32, 内部選点を 25, 図示のように配置する.熱伝導率は温度に依存して連続的に変化するものとし,次式で仮定する<sup>(1)</sup>.

$$\lambda(u) = A + Bu + Cu^2 \quad (31)$$

本例題では熱伝導率が温度に依存して 2 次曲線的に変化すると仮定し上式の各係数を  $A = 75.3403$ ,  $B = -0.0776$ ,  $C = 2.554 \times 10^{-5}$  とする.境界条件は辺 BC および AD において温度既知, 辺 AB および CD において熱流束既知の境界条件を与える.その境界条件は, 1/4 円筒 abcd において円筒内面で温度 500 [°C], 円筒外面で温度 100 [°C],  $x_1$  軸および  $x_2$  軸上で解析モデルの対称性から断熱境界条件 ( $q = 0$ ) を与えた場合の厳密解に従うものとする. また, 本例題では近

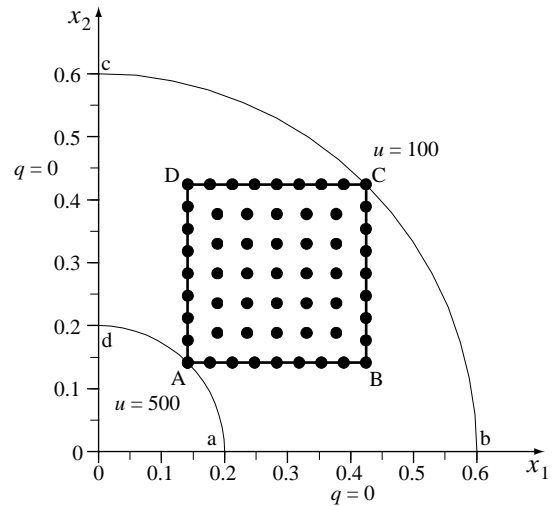


Fig. 1 Analysis model

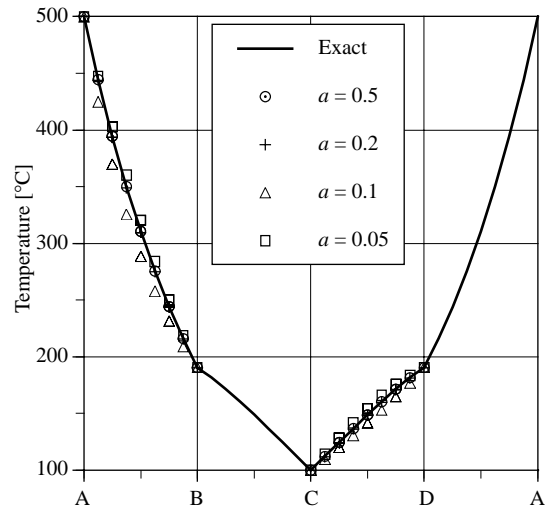


Fig. 2 Result on temperature

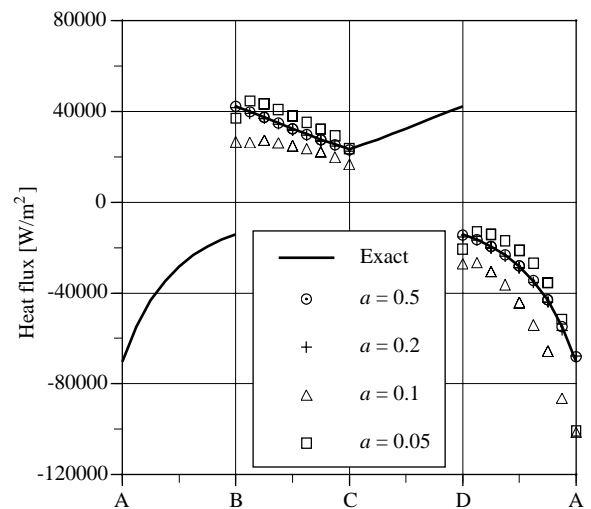


Fig. 3 Result of heat flux

似関数として次式を使用する<sup>(7)</sup> .

$$f(x, z^j) = \begin{cases} (1 - r^j/a)^3(3r^j/a + 1), & 0 \leq r^j \leq a \\ 0, & r^j > a \end{cases} \quad (32)$$

ただし,  $a$  は近似関数の影響半径を表す. 解析はこの影響半径を変化させて行い, 影響半径が解析結果に与える影響について示す. 各辺上における温度と熱流束の解析結果を厳密解と比較したものを以下に示す.

ここで, 厳密解は支配微分方程式を Kirchhoff 変換することにより求めることができる. 支配微分方程式に Kirchhoff 変換を施し, 式を整理すると次式を得る<sup>(4)</sup> .

$$C_1 \ln(r) + C_2 = \int_{u_0}^u \lambda(u) du \quad (33)$$

ただし,  $C_1, C_2$  は境界条件より求められる積分定数であり  $u_0$  は基準温度を表す. 上式を温度  $u$  について解くことにより厳密解を求めることができる.

Fig. 2 は温度の解析結果を厳密解と比較したものを示す. 影響半径  $a$  が 0.5 の時はすべての選点を考慮し計算を行っているため精度のよい結果が得られている. しかし, 影響半径を 0.1 および 0.05 とした場合, 精度は急激に低下している. これは, 定式化の際に領域積分項を近似関数と未知係数を用いて近似しており, 近似関数の値を決定する DRM 選点の数と配置が解析精度に影響するためである. また, Fig. 3 に熱流束の解析結果を厳密解と比較したものを示す. 温度に対する結果と同様に影響半径  $a$  が小さくなるにつれて精度は低下する. この精度の低下は温度に対する精度の低下よりも大きく, 熱流束は影響半径に大きく影響されることがわかる. 影響半径の選択によりすべての選点の影響を考慮しなくても解析は可能であるが, 影響半径を小さくしすぎると解析精度は極端に低下してしまう. 本例題では,  $a = 0.2$  が最小の値である. 各選点間の距離を小さく取ることにより解析精度は向上するが, 小さすぎる影響半径では高精度の解を得ることはできない. 本例題により, 各辺において一定の境界条件が与えられない問題に対しても本手法の有効性が確認されたと言える. ただし, 影響半径の選択には注意が必要であると思われる.

### 3.2. 例題 2

先に 2 次元問題における本手法の有効性を確認したが, 3 次元問題への拡張も容易であり Fig. 4 に示す 3 次元モデルに対する例題解析を行い有効性を確認する. このモデルにおいて解析対象は ABCDEFGH からなる直方体である. 境界節点を 242 取り, 境界を四角形 2 次要素を用いて図示のように 80 要素に分割する. 内部選点を 147 取り, 領域内部に均等に配置する. 境界条件は, 面 ABFE および面 DCGH において温度既知, その他の面においては熱流束既知の境界条件を与えるものとする. その境界条件は直方体 abcdoefg において面 abeo で温度 500 [°C], 面 dcfg で温度 100 [°C], その他の面では断熱境界条件 ( $q = 0$ ) を与えた場合の厳密解に従うものとする.

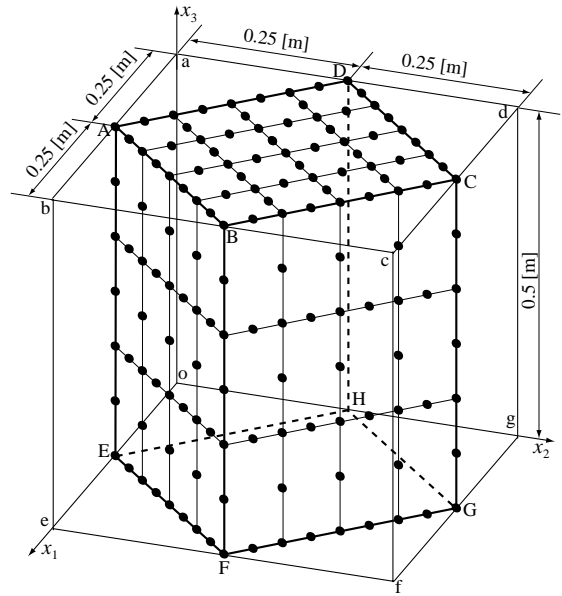


Fig. 4 Analysis model

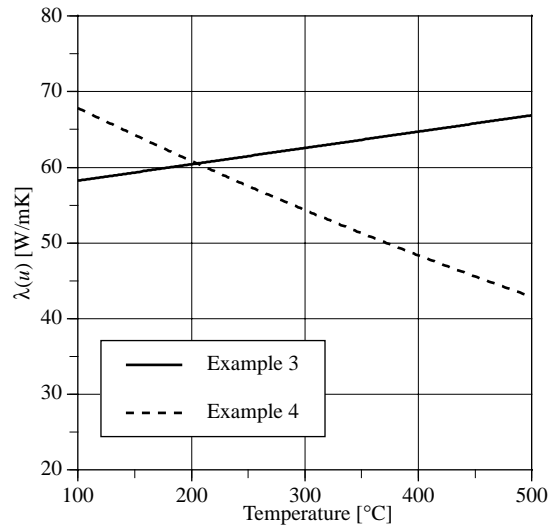


Fig. 5 Distribution of thermal conductivity

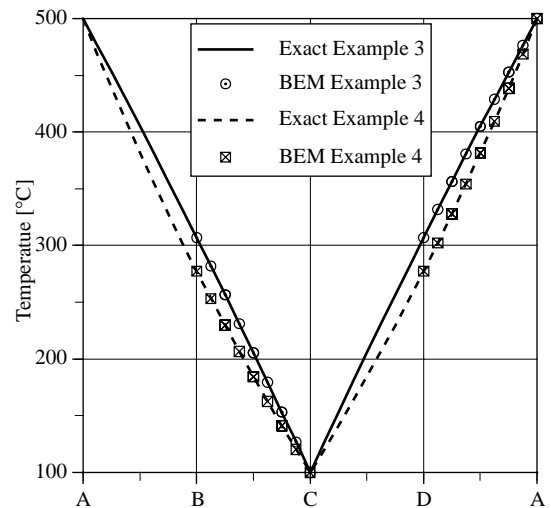


Fig. 6 Result on temperature

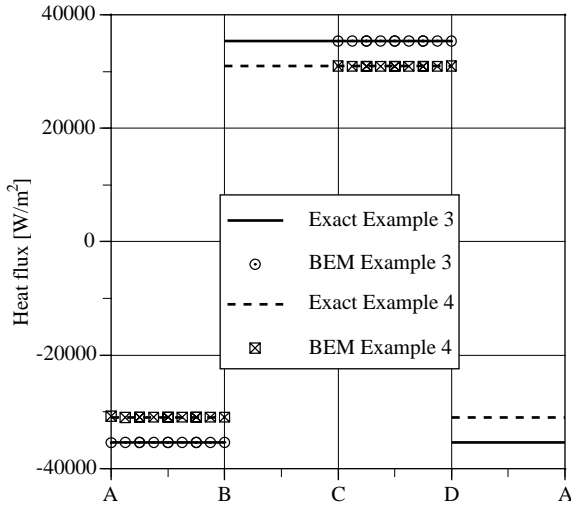


Fig.7 Result on heat flux

また，熱伝導率の変化を Fig. 5 に示し，具体的に熱伝導率の変化を次式で仮定する<sup>(1)</sup>．

$$\lambda(u) = A + Bu + Cu^2 \quad (34)$$

Example 3 では熱伝導率の線形変化を仮定し， $A = 56.0832$ ， $B = 0.0216$ ， $C = 0$  とする．また Example 4 では熱伝導率の 2 次曲線的な変化を仮定し  $A = 75.3403$ ， $B = -0.0776$ ， $C = 2.544 \times 10^{-5}$  とする．また，本例題において近似関数は次式を使用する<sup>(7)</sup>．

$$f(x, z^j) = \begin{cases} (1 - r^j/a)^4(4r^j/a + 1), & 0 \leq r^j \leq a \\ 0, & r^j > a \end{cases} \quad (35)$$

ただし， $a$  は近似関数の影響半径であるが，本例題ではすべての選点を考慮して計算を行う影響半径 ( $a = 1$ ) を使用した．Figs. 6, 7 に辺 ABCD に沿った解析結果と厳密解との比較を示す．なお，厳密解は 2 次元問題での例題のときと同様に Kirchhoff 変換を用いて求めることができる<sup>(4)</sup>．各面において一定の境界条件が与えられる問題についても精度のよい結果が得られているが，本例題のように変化のある境界条件を与えた場合にも精度のよい結果が得られている．熱伝導率の変化が大きい場合や，場の温度変化が大きい場合には要素分割を細かくしなければならない．また，内部選点を領域内

部に均等に配置する必要があると思われる．これは内部選点の配置が解析精度に影響するためであり，均等に配置した場合の精度が最もよいということを確認している．

#### 4. 結言

本研究では，熱伝導率が温度に依存する温度依存材料における熱伝導問題への二重相反法の適用について検討した．開発した解析プログラムにより本手法の有効性を確認した．2 次元および 3 次元問題での例題から，本手法の解析精度が近似関数や内部選点の配置に影響されることが分かる．特に近似関数の選択には注意が必要であると思われる．

#### 参考文献

- (1) 竹内洋一郎，野田直剛：熱応力，(1989)，日新出版株式会社．
- (2) S. J. Liao, A. T. Chwang : General Boundary Element Method for Unsteady Nonlinear Heat Transfer Problems, *Numerical Heat Transfer, Part B*, **35** (1999), pp. 225–242.
- (3) 田中正隆，松本敏郎，中村正行：境界要素法，(1991)，培風館．
- (4) C. A. Brebbia (編)，田中正隆 (訳)：境界要素法の応用・2，(1983)，企画センター．
- (5) P. W. Partridge, C. A. Brebbia and L. C. Wrobel : The Dual Reciprocity Boundary Element Method, (1992), *Computational Mechanics Publications*.
- (6) B. Šarler : DRBEM for Heat Transfer and Fluid Flow Problems, *Advances in Boundary Element Techniques II*, (2001), pp. 147–154.
- (7) C. S. Chen, C. A. Brebbia and H. Power : Dual Reciprocity Method Using Compactly Supported Radial Basis Functions, *Commun. Numer. Meth. Engng.*, **15** (1989), pp. 137–150.
- (8) P. W. Partridge : Towards Criteria for Selecting Approximation Functions in the Dual Reciprocity Method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **24** (2000), pp. 519–529.
- (9) A. J. Nowak, A. C. Neves : The Multiple Reciprocity Boundary Element Method, (1991), *Computational Mechanics Publications*.