

大振幅定在波の境界要素法による直接シミュレーション

THE DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF LARGE AMPLITUDE STANDING WAVES
USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD濱野 健二¹⁾, 村重 淳²⁾, 速水 謙³⁾

Kenji HAMANO, Sunao MURASHIGE and Ken HAYAMI

- 1) 東京大学大学院工学系研究科 (〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1, E-mail: hamano@simplex.t.u-tokyo.ac.jp)
 2) 東京大学大学院新領域創成科学研究科 (〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1, E-mail: sunao@sat.t.u-tokyo.ac.jp)
 3) 東京大学大学院工学系研究科 (〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1, E-mail: hayami@simplex.t.u-tokyo.ac.jp)

In this paper, two-dimensional large amplitude standing waves are simulated using the Boundary Element Method (BEM). We start from a very small amplitude standing wave. Then, the rectangular vessel containing the fluid is oscillated intermittently in the vertical direction in order to increase the amplitude of the wave. When the vessel stops to oscillate, standing waves are observed. Thus, a large amplitude standing wave whose peak crest acceleration is about 80% of that of the gravity is observed numerically. Also, it is found that regriding and a careful handling of the numerical differential scheme at the end of the free surface are necessary.

Key Words: Standing Wave, Free Boundary Problem, Boundary Element Method

1. はじめに

本研究では、著者ら⁽¹⁾が以前に触れた「大振幅定在波のBEMによる直接シミュレーションの試み」をより詳しく検討する。流体は完全流体の渦なし運動とし、表面張力は無視する。大振幅定在波を直接シミュレーションするために、まず、微小振幅の定在波を初期波形とし、鉛直方向に加振して定在波の振幅を大きくしていった。このアプローチ法をとったのは大振幅定在波の波形が未知であってもそれをシミュレーションできる可能性があるからである。また、それを通して振幅の大きな波をシミュレーションする際の注意点にも触れる。

2. シミュレーションの設定

2次元空間で考え、長方形の箱に入った完全流体を考える (Fig. 1)。水平方向に x 軸、鉛直方向上に向かって y 軸をとり、流体が大気と接する面を自由表面と呼ぶ。箱の中心を $x = 0$ [m]、箱の幅を $L = 2\pi$ [m]、箱の底から静水面 ($y = 0$ [m]) までの距離を $h = 10.0$ [m]、時間を t [s]、静水面から波の自由表面までの距離を $\eta = \eta(x, t)$ [m] とする。箱の底は $y = -h$ [m] にあり、箱の高さは $+\infty$ [m] とする。また、重力加速度は $g = 9.8$ [m/s²] とする。以後、本文やグラフでは $kx \rightarrow x$, $ky \rightarrow y$, $\omega t \rightarrow t$, $\frac{k^2}{\omega} \phi \rightarrow \phi$, $\frac{k}{\omega^2} g \rightarrow g$ のような無次元化を行なっている。ここで ϕ は速度ポテンシャル、 k は波数 ($= \frac{2\pi}{L}$)、 ω は波の角振動数を表す。

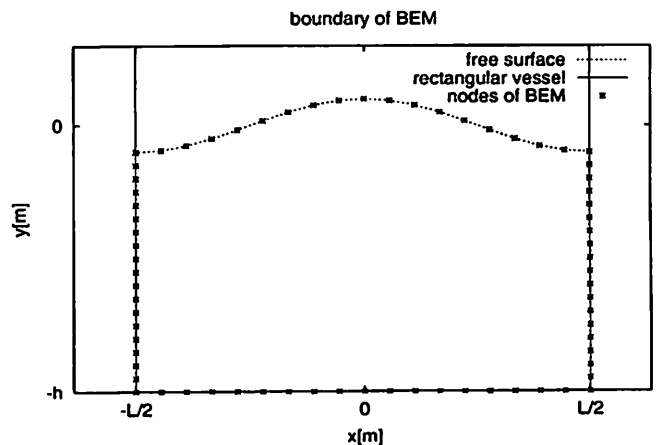


Fig. 1 Schematic illustration of the simulation.

3. 基礎方程式

基礎方程式は次の3式である。

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{in} \quad |x| < \frac{L}{2}, \quad -h < y < \eta(x, t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\nabla\phi\|^2 + g\eta(x, t) = 0 \quad \text{at} \quad y = \eta(x, t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm \frac{L}{2}, y = -h. \quad (3)$$

ここで $\|\cdot\|$ はベクトルの二乗ノルムを表し, $\frac{\partial}{\partial n}$ は外向き単位法線ベクトル n 方向の偏微分を表す. 式 (1) は完全流体の支配方程式, 式 (2) は自由表面におけるベルヌーイ方程式, 式 (3) は壁境界条件である.

4. 自由表面の追跡法

自由表面の時間発展は, 自由表面上に流体粒子を置き, その流体粒子の動きを追跡することによって求める (2). 自由表面上の流体粒子の x 方向の変位を ξ , y 方向の変位を η で表す. すると, 自由表面上での運動学的条件より,

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = u \quad \text{at} \quad y = \eta(x, t), \quad (4)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = v \quad \text{at} \quad y = \eta(x, t), \quad (5)$$

が成り立つ. ここで, $\frac{D}{Dt}$ は物質微分で, $u = (u, v)$ は流体の速度ベクトルを表す. よって自由表面での $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}$ が分かれば自由表面上の流体粒子を動かすことによって自由表面の時間発展が分かる. $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}$ は, 自由表面の単位接線ベクトルを s とおくと, 座標軸の回転によって $\frac{\partial \phi}{\partial s}, \frac{\partial \phi}{\partial n}$ から求められる. $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ は自由表面上の ϕ を数値微分して求める.

5. 境界要素法 (BEM) による定式化

自由表面上の $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ の値は BEM を用いて計算する. 流体の占める領域を Ω , その境界を Γ とし, $x = (x, y)$ を位置ベクトル, ラプラス方程式 (1) の基本解を $\phi^*(x, x_i)$ とする. また, $q(x)$ をフラックス $\frac{\partial \phi}{\partial n}(x)$, $q^*(x, x_i)$ を $\frac{\partial \phi^*}{\partial n}(x, x_i)$ とする. このとき境界積分方程式

$$\frac{\theta(x_i)}{2\pi} \phi(x_i) + \int_{\Gamma} \phi(x) q^*(x, x_i) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x) \phi^*(x, x_i) d\Gamma(x), \quad (6)$$

が成り立つ. ここで $\theta(x_i)$ は, 各節点の境界形状によって定まる定数である.

次に, 式 (6) の数値解を求めるため, Γ を離散近似し, Γ_j の代表節点を x_j ($1 \leq j \leq n$) とおく. 同時に Γ 上の ϕ, q も離散近似し, x_j 上の ϕ, q を ϕ_j, q_j ($1 \leq j \leq n$) とおく. 式 (6) を各 x_i ($1 \leq i \leq n$) について離散化し, ϕ_j, q_j についての n 本の連立方程式を作る. もし, 各 j で ϕ_j, q_j のうちのどちらかの値が分かっていたら, これは未知数が n 個で n 本の連立一次方程式になり, 解くことができる. 本研究では Γ_j と ϕ, q は 1 次関数で離散近似した.

本研究のシミュレーション設定では, 壁境界条件より壁面で $q_j = \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_j = 0$. また, 仮に自由表面上の ϕ_j の値が既知

とすると, 自由表面上の $q_j = \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_j$ の値を BEM を用いて上記のようにして求めることができる. ここで, 自由表面上の流体粒子と BEM の節点は一致させる. そこで自由表面上の流体粒子の ϕ の値が常に必要となるわけだが, それは式 (2) より,

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 - g \eta(x, t), \quad (7)$$

に対し何らかの時間積分法を用いて計算する. $t=0$ での自由表面上の流体粒子の ϕ の初期値は 0 とする. また, 節点の置き方は, 第 6 節, 第 7 節では BEM の節点は自由表面上に 19 個, 箱の左側に 19 個, 箱の底に 19 個, 箱の右側に 19 個置いた. また, 大振幅定在波のシミュレーションでは BEM の節点は自由表面上に 63 個, 箱の左側に 63 個, 箱の底に 63 個, 箱の右側に 63 個置いた.

5.1. 時間発展スキーム

自由表面上の流体粒子を移動するために, 式 (4) (5) (7) に対し何らかの時間発展スキームを適用する. 本研究では, Taylor 展開に基づく方法 (3) を用いた. すなわち,

$$\xi^{t+\Delta t} = \xi^t + \Delta t \frac{D\xi}{Dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{D^2\xi}{Dt^2} + \dots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} \frac{D^n\xi}{Dt^n}, \quad (8)$$

を使用して次の時間ステップの ξ を求める. η, ϕ についても同様である. また, 時間ステップ幅は, 許容誤差を決める定数 ϵ を設定してアダプティブに変えた. 詳細は Nakayama (3) を参照されたい. Taylor 展開の次数は 4 次, $\epsilon = 10^{-8}$ とした.

5.2. 節点の再配置

シミュレーション中の自由表面上の BEM の節点 (流体粒子) の間隔を均等にするため本研究では毎時間ステップ, 節点の再配置を行なった. 再配置の方法は Tanaka & Nakayama (6) の方法を使用した. その概略は節点の x 座標については等間隔に, y 座標についてはスプライン補間を, 速度ポテンシャルは $\phi(y + \Delta y, t + \Delta t)$ を y, t を中心に Taylor 展開して求めるというものである. このとき Taylor 展開の次数は 4 次とした. 節点の再配置の必要性については第 7 節でグラフを用いて説明する.

5.3. 自由表面上の数値微分

自由表面上で用いた数値微分スキームについて説明する. まず, 自由表面上の節点に対し右から左へ $1, \dots, n_f$ と番号を振る. ここで n_f は自由表面上の節点の数である. アルゴリズム上, 自由表面上の微分したい量は節点の x, y 座標と速度ポテンシャル ϕ 等であるが, それらをまとめて f_j ($j = 1, \dots, n_f$) とおく. 各 f_j を間隔が 1 の 1 次元座標 j 上の関数としたとき, $\frac{df}{dj} \Big|_j$ は以下の式で求められる.

$3 \leq j \leq n_f - 2$ のとき

$$\frac{f_{j-2} - 8f_{j-1} + 8f_{j+1} - f_{j+2}}{12}, \quad (9)$$

$j = 1$ のとき

$$\frac{-137f_j + 300f_{j+1} - 300f_{j+2} + 200f_{j+3} - 75f_{j+4} + 12f_{j+5}}{60}, \quad (10)$$

$j = 2$ のとき

$$\frac{-12f_{j-1} - 65f_j + 120f_{j+1} - 60f_{j+2} + 20f_{j+3} - 3f_{j+4}}{60}, \quad (11)$$

$j = n_f$ のとき

$$\frac{137f_j - 300f_{j-1} + 300f_{j-2} - 200f_{j-3} + 75f_{j-4} - 12f_{j-5}}{60}, \quad (12)$$

$j = n_f - 1$ のとき

$$\frac{12f_{j+1} + 65f_j - 120f_{j-1} + 60f_{j-2} - 20f_{j-3} + 3f_{j-4}}{60}. \quad (13)$$

式 (9) は f_j の表す関数が 4 次以下のとき、正確な微分スキームになり、式 (10) ~ (13) は f_j の表す関数が 5 次以下のとき、正確な微分スキームになっている。

当初、著者 (濱野) は $j = 2, n_f - 1$ に対しても式 (11) と式 (13) の代わりにそれぞれ式 (10)、式 (12) を使用していた。この場合、波の振幅が大きいとき、シミュレーションが波の両端の部分が突起状になって不安定になる。そのことについても第 7 節でグラフを用いて説明する。

6. 定在波とは?

ここでは定在波を腹の位置が水平方向に移動せず、時間に関して一周期後に自由表面上の各点での振幅が一周期前の振幅と等しくなる波と定義する。境界条件を線形化して $\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta(x, t) = 0$ とし、自由表面の時間発展を解くと、初期波形が $\eta(x, 0) = a_0 \cos x$ の場合、自由表面の時間発展は $\eta(x, t) = a_0 \cos x \cos t$ となる。これは定在波である。ここで、 a_0 は初期振幅であり、その大きさは無限小の量であるが、近似的には波の波長 L に対し十分小さい量と考えればよい。 a_0 が十分小さいときは、前節までに述べたシミュレーションをしても定在波を観察できる。しかし、 a_0 が大きくなるとシミュレーション結果は Fig. 2 のように定在波にならない。また、時間がたてば、波が定在波になるといったことも確認できない。波の初期振幅が少し大きくなったときの定在波の形は、Penny & Price⁽⁵⁾ が波の速度ポテンシャルと表面変位を 5 次まで振幅展開することで求めている。そうして導かれた定在波が最大の振幅になったときの波形を表す式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \eta(x, 0) &= (A + \frac{1}{32}A^3 - \frac{47}{1344}A^5) \cos(x) \\ &+ (\frac{1}{2}A^2 - \frac{79}{672}A^4) \cos(2x) \\ &+ (\frac{3}{8}A^3 - \frac{12563}{59136}A^5) \cos(3x) \\ &+ \frac{1}{3}A^4 \cos(4x) + \frac{295}{768}A^5 \cos(5x). \end{aligned} \quad (14)$$

ここで A は波の大きさを決めるパラメータである。 A を大きくしすぎなければ、シミュレーションをしても定在波を観

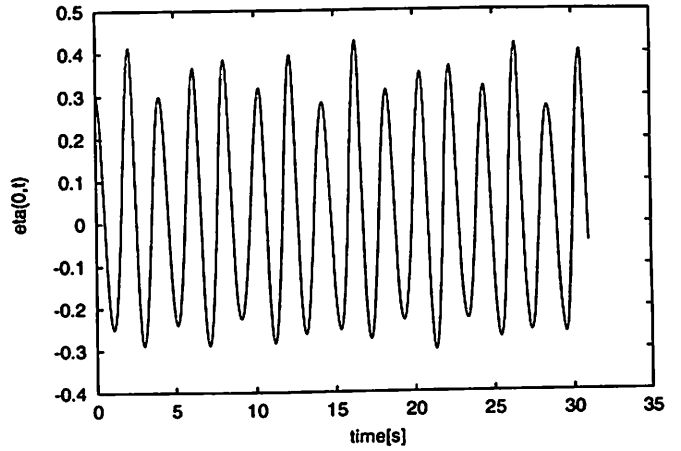


Fig. 2 Time history of the amplitude of the surface $\eta(0, t)$ for the initial amplitude of the surface $\eta(x, 0) = 0.3 \cos(x)$.

察できる。しかし、 A を大きくしすぎると式 (14) は定在波を表せなくなり、シミュレーション結果も Fig. 3 のように定在波にならない。ここで、記号 A_c (無次元量) は定在波の腹に位置する節点の鉛直方向加速度の重力加速度に対する比を表し、この値が 1. になったとき定在波は極限定在波になる。極限定在波に非常に近い波形⁽⁴⁾ を Fig. 4 に示す。ま

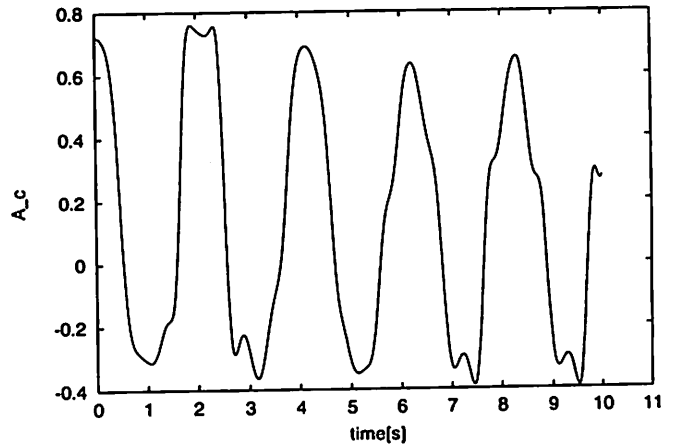


Fig. 3 Time history of A_c when the initial amplitude of the surface $\eta(x, 0)$ is equation (14) with $A = 0.5$.

た、Fig. 5 に比較のため、第 9 節で得られた $A_c \approx 0.8$ の定在波を示した。

7. 節点の再配置と自由表面上の数値微分の注意の必要性

波の振幅が大きくなったとき、自由表面の節点の再配置と数値微分の扱いに注意を要する。例えば式 (14) で $A = 0.53$ とした波形を初期波形としてシミュレーションしたとき、約 1 秒後の波形を Fig. 6 に示す。この図の 3 つの波形のうち、1 つは数値微分に式 (9) ~ (13) を使い、節点の再配置を行なったときの波形 (regrid) を、1 つは数値微分に式 (9) ~ (13) を使い、節点の再配置を行なわなかったときの波形 (noregrid) を、1 つは数値微分に式 (11)、(13) の代わりに

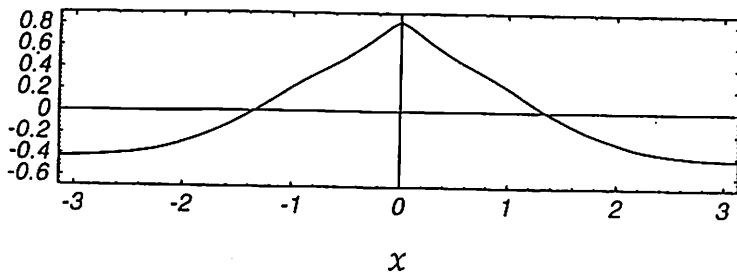


Fig. 4 Nearly limiting standing wave profile with $A_c = 0.9998^{(4)}$.

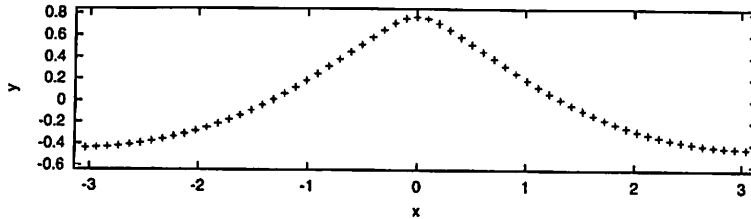


Fig. 5 Large amplitude standing wave profile with $A_c \approx 0.8$ observed in section 9.

式 (10), (12) を用い, 節点の再配置を行なったときの波形 (failure) を表す.

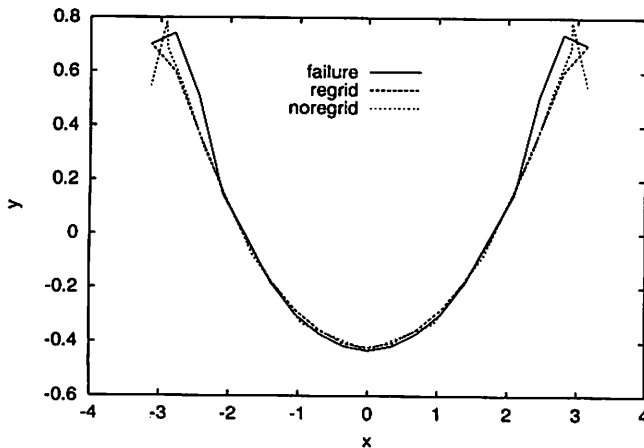


Fig. 6 Three wave profiles at $t \approx 1[s]$ when the initial amplitude of the surface $\eta(x, 0)$ is equation (14) with $A = 0.53$. They show three cases, namely when using the differential scheme (9)~(13) and the regridding method (regrid), when using the differential scheme (9)~(13) and not using the regridding method (noregrid), and when using equations (10), (12) instead of equations (11), (13) respectively in the differential scheme and the regridding method (failure).

regrid と noregrid とを比べると noregrid の方の波の両端に突起状のものが出ていることが分かる。また, noregrid の波形を見ると節点が波の両端に集中していることが分かる (グラフの屈折部が節点位置)。よって振幅が大きい波では, 節点の再配置が必要と分かる。また, regrid と failure とを比べると failure の方の波の両端に突起状のものが出ていることが分かる。これは節点 $j = 2, n_f - 1$ の数値微分でそれぞ

れ節点 $j = 1, n_f$ の情報を使用しなかったためにシミュレーションが不安定になったからである。以上より, 振幅が大きい波では, 特に波と箱が交わる近辺では数値計算に細かな注意をする必要がある。

ちなみに, 本研究で使用した Taylor 展開に基づく時間発展スキームは, 誤差が出やすいところでは Δt を小さくすることができる。それを示したのが Fig.7 である。グラフが右に傾くほど, 同じ時間幅に対してより多くの計算ステップを費やすことになるので, この図には本研究で使用した時間発展スキームの特徴がよく現れている。

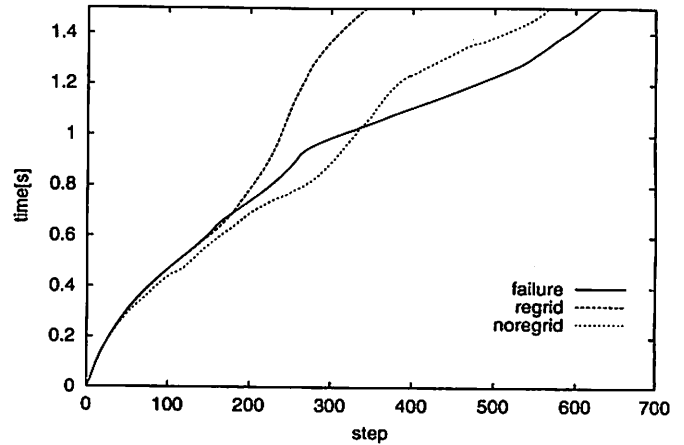


Fig. 7 Number of computational time steps vs time $t[s]$. The axis of abscissas represents computational time steps when simulating Fig. 6 and the axis of ordinates represents time $t[s]$. They show three cases, namely when using the differential scheme (9)~(13) and the regridding method (regrid), when using the differential scheme (9)~(13) and not using the regridding method (noregrid), and when using equations (10), (12) instead of equations (11), (13) respectively in the differential scheme and the regridding method (failure).

8. 大振幅定在波の直接シミュレーション法

BEM を使用した大振幅定在波の直接シミュレーションのための方法を説明する。まず, 静止した微小振幅の定在波を初期波形とする。次に一定時間, 箱を鉛直方向に加振する。次に, しばらく加振をやめる。その後再び一定時間加振を行ない, 次にまた加振をやめる。以上の断続的な加振を繰り返す。加振をすると波の振幅は大きくなる。こうして大振幅の定在波を観察した。

加振の方法について述べる。波の角振動数を $\omega[1/s]$ とおく。このとき角振動数 $2\omega[1/s]$ で鉛直方向に振動させると波の振幅が大きくなる。また, 加振をするということは, 箱とともに移動する座標系から見ると, 重力加速度 $g = 9.8[m/s^2]$ を時間変化させることと同値である。よって本研究では, 加振の間はベルヌーイ方程式中の重力加速度 $g[m/s^2]$ を正弦関数で

$$g(t) = g + d(2\omega)^2 \sin(2\omega t) \quad [m/s^2] \quad (15)$$

のようにして加振を表現した。ここで $d[m]$ は加振の振幅を表す。

9. シミュレーション結果

大振幅定在波を捉えるまでの過程を5段階に分けて Table. 1 にまとめる。ここで $d, 2\omega$ は加振のパラメータで、それぞれ加振の振幅、角振動数を表す。また、 A_c は定在波の腹に位置する節点の鉛直方向加速度の重力加速度に対する比、 ω は定在波の角振動数、energy は無次元化された定在波のエネルギーを表す。ここで次元付きのエネルギーを以下のように定義する。

$$\frac{g}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \eta^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \quad [\text{kg m}^2/\text{s}^2]. \quad (16)$$

無次元化されたエネルギーはこれを第2節の無次元化の手続きによって計算する。また、 ω は波の振幅が最大になった時刻を何回か記録し、その時間間隔 $T[s]$ をいくつか求め、それらの平均をとった上で $\omega = \frac{2\pi}{T}$ より求めている。第1段階では静止した $A = 0.005$ の Penny & Price の定在波を初期波形とした。第4段階で d が負になっているのは正にすると加振しているのに波が減衰するためである。これは加振と波の位相の問題と考えられる。第5段階で $|d|$ が小さくなっているのは、波の振幅が大きくなるにつれて加振を緩和するためである。

Table 1 Comparison of some physical values of the observed standing waves.

stage	1	2	3	4	5
time[s]	0-60	60-80	80-100	100-120	120-140
$d[m]$	0.03	0.03	0.03	-0.01	0.001
$2\omega[1/s]$	6.26099	6.25184	6.22972	6.12314	6.03012
A_c	0.12	0.24	0.58	0.80	—
$\omega[1/s]$	3.12898	3.11905	3.06249	3.00610	—
energy	0.017	0.064	0.29	0.53	—

大振幅定在波を観察するまでの以上の5段階の過程を Figs. 8, 9 に示す。第4段階までは、Fig. 8 を見ると非加振の間、定在波になっていることが分かる。また、Fig. 9 を見ても、同様に確かめられる。しかし、Fig. 10 の平均水位の変動は第5段階で大きくなっている。この変動の絶対的な大きさは波の大きさより十分小さいため波形の狂いは小さいが、体積保存が満たされない方向にあると分かる。また、Fig. 11 の次元付きのエネルギー変動を見ても第5段階の非加振の間でエネルギーが徐々に上昇していると分かる。

一方、Okamura⁽⁴⁾ に示された A_c 対 energy (無次元) のグラフを Fig.13 に示す。本研究で得られたエネルギーの値が Fig.13 のグラフからずれているが、これは非定常の問題

を直接シミュレーションしているために、数値誤差が入りやすいからである。

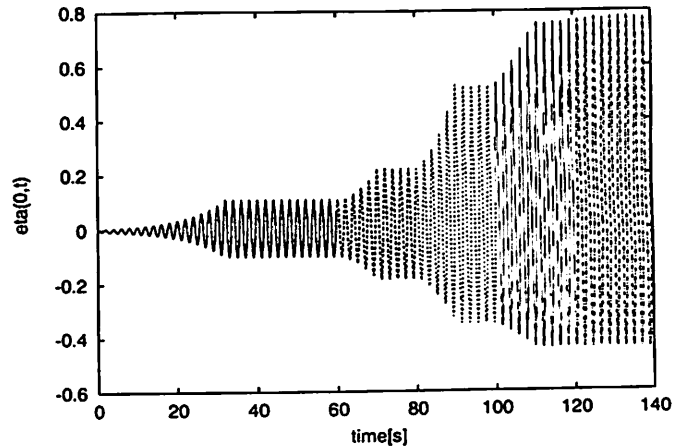


Fig. 8 Time history of the amplitude of the surface $\eta(0, t)$.

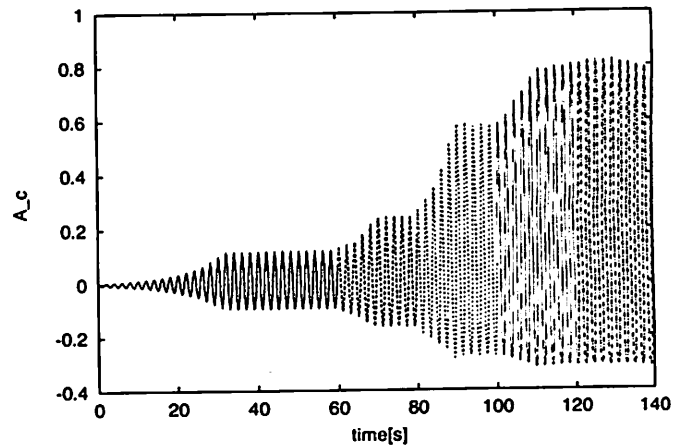


Fig. 9 Time history of the crest acceleration normalized by gravitational acceleration A_c .

10. 結論と今後の課題

波を鉛直方向に加振して、大振幅の定在波を BEM を使用してシミュレーションすることが出来た。その際に、4 次の Taylor 展開に基づく時間発展スキームを使用し Δt はアダプティブに変化させ、更に節点の再配置も行った。その結果、 $A_c \approx 0.8$ の定在波を観察できた。波の全体的な大きさは Figs.4, 5 より $A_c = 0.8 \sim 1.0$ であまり変わらない。よって $A_c = 0.8 \sim 1.0$ の定在波の微妙な波形を出すことが今後の課題である。しかし、アルゴリズム中に表面変位の空間微分を使用しているため、極限定在波を捉えることは困難とも考えられる。本アプローチを進めることでどこまで、極限に近い定在波を捉えることができるか調べてみたい。その際に、加振パラメータの決め方を検討したい。また、節点の再配置は節点の集中を防ぐ点で数値計算の安定性を向上させるが、一方、この再配置の方法では補間を使用するため精度を落す面もあるので、それらのバランスについて調べたい。更に、波

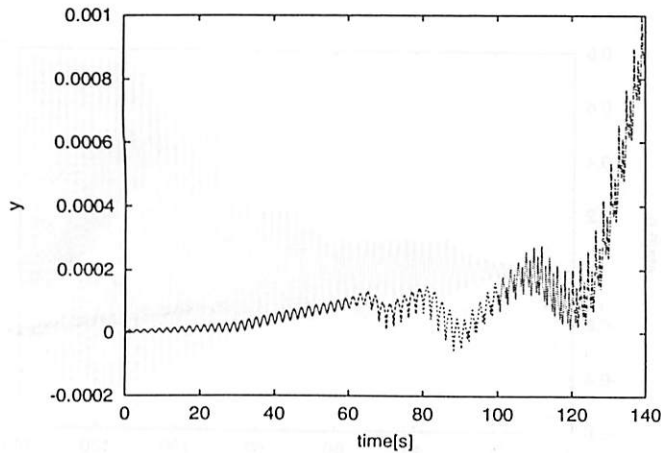


Fig. 10 Time history of the mean water level.

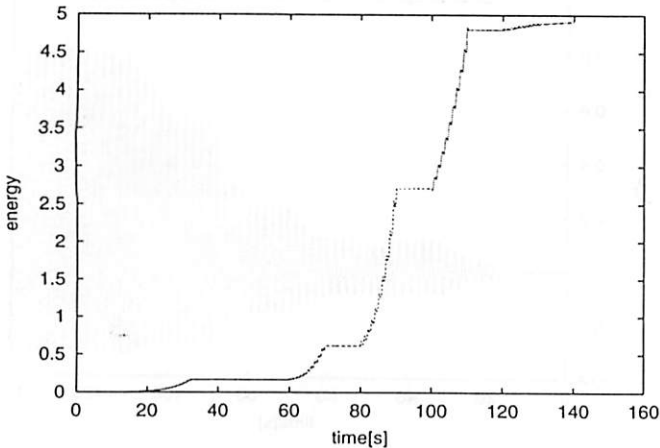


Fig. 11 Time history of the energy of the standing waves.

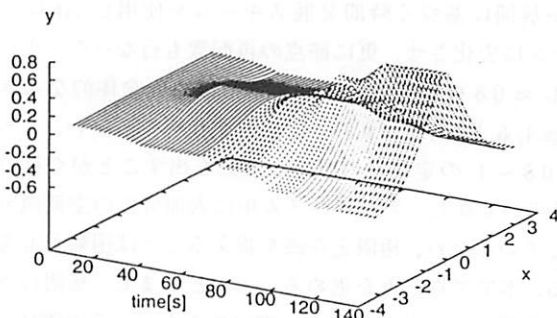


Fig. 12 Observed profiles of the standing waves.

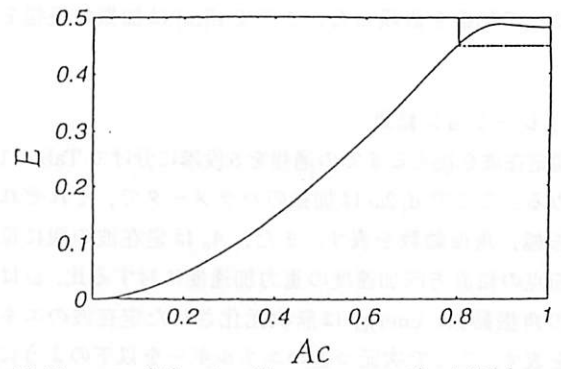


Fig. 13 Energy of the standing waves vs the initial crest acceleration normalized by gravitational acceleration A_c ⁽⁴⁾.

のエネルギーが A_c の単調増加関数ではない ⁽⁴⁾ ことを本アプローチでも示したい。

一方、第7節で、大振幅の波を安定にシミュレーションするには、自由表面上の数値微分を注意深く行ない、節点の再配置を行なうことが必要であると分かった。しかし、節点の再配置を行なったからといって、計算結果が信頼できるかどうかは別である。過去の研究では体積やエネルギー変動から数値計算の信頼性を示している。しかし、その変動が小さいからといって計算結果が正確であることは必ずしも保証できない。信頼性を明確に示す方法も今後の課題である。

謝辞

新潟大学の阿部和久先生には、プログラムに関してきめ細かなアドバイスをいただき、そのおかげで第7節の事項に気づくことができました。また、九州大学の岡村誠先生には Okamura ⁽⁴⁾ について詳しく教えていただいたり、また、定在波に関する貴重なデータをいただいたりしました。以上の先生方に感謝致します。

参考文献

- (1) 濱野 健二, 村重 淳, 速水 謙: 自由表面の定在波の境界要素解析, BTEC 論文集, 10(2000), pp. 43-48.
- (2) Longuet-Higgins, M. S. and Cokelet, E. D.: The deformation of steep surface waves on water: I. A numerical method of computation, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 350(1976), pp. 1-26.
- (3) Nakayama, T.: A computational method for simulating transient motions of an incompressible inviscid fluid with a free surface, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 10(1990), pp. 683-695.
- (4) 岡村 誠: 大振幅定在波の波形, 数理解析研究所講究録, 993(1997), pp. 134-143.
- (5) Penny, W. G. and Price, A. T.: Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 244(1952), pp. 254-284.
- (6) 田中 宏明, 中山 司: 三次元貯槽内の非線形スロッシングに対する境界要素解法, 日本機械学会論文集 (B編), 57-538(1991-6), pp. 8-14.