

間接 Trefftz 法による自由表面波解析について

ANALYSIS OF FREE SURFACE WAVE BY INDIRECT TREFFTZ METHOD

池田洋一¹⁾, 桂田純一²⁾, 北 英輔³⁾, 神谷紀生⁴⁾

Yoichi IKEDA, Jun'ichi KATSURAGAWA, Eisuke KITA and Norio KAMIYA

- 1) 大同工業大学 (〒 457-8530 名古屋市南区滝春町, E-mail: ikeda@daidoh-it.ac.jp)
 2) 名古屋大学工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: jk@mech.nagoya-u.ac.jp)
 3) 名古屋大学情報文化学部 (〒 464-8601 名古屋市千種区不老町, E-mail: kita@info.human.nagoya-u.ac.jp)
 4) 名古屋大学情報文化学部 (〒 464-8601 名古屋市千種区不老町, E-mail: b41861a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp)

This paper describes the application of the Trefftz-type boundary element method to the simulation of the sloshing phenomenon. The phenomenon is governed by the Laplace equation with respect to the velocity potential. The governing equation is firstly solved with the boundary conditions to determine the velocity components on the fluid surface. The surface is moved according to the surface velocity at each time step. One of the most important part of this process is to accurately estimate the velocity components on the surface. In this study, the Trefftz-type boundary element method is applied for this analysis. Finally, the present scheme is applied to the simulation of the sloshing phenomenon on the fluid in a rectangular vessel.

Key Words: Indirect Trefftz Method, Free Surface Wave, Derivative Estimation

1. はじめに

自由表面に発生する波動現象のうち、本研究ではスロッシング現象の解析に Trefftz 型境界要素法を適用する方法について述べる。スロッシング現象は、液体を入れた容器を水平方向に加振すると、液体表面に波が発生する現象である。同様の現象は、原油を満載して航行しているタンカーの原油タンクや地震動を受ける原子炉の容器内でも見られる。タンカーでは、原油の表面に発生した波による衝撃力で容器が損傷される可能性がある。また、原子炉容器では、スロッシング現象のために容器内の冷却水が漏れる可能性がある。これらのことより、スロッシング現象の解析はこれら設備の設計において重要と考えられている。

スロッシング現象のシミュレーションは以下ようになる。液体が非圧縮・非粘性で渦無しの流れであると仮定すると、スロッシング現象の支配方程式は速度ポテンシャルに関するラプラス方程式となる。支配方程式を適切な境界条件の下で解いて、液面における速度ポテンシャルの導関数を求める。続いて、求めた導関数を用いて液面形状と液面での境界条件値を更新する。上記のプロセスを繰り返すことにより、液面上の波形をシミュレートすることができる。

この現象の解析には、これまで有限要素法や境界要素法などが適用されてきた^(1, 2, 3, 4, 5)。有限要素法は非常に強力な数値解析法であるが、スロッシング現象のシミュレーション

に適用する場合、解析領域の変動に伴って有限要素メッシュがゆがんで計算精度が低下する可能性があるため、形状変更ごとにメッシュを再構成する必要がある。最近の自動メッシュ生成技術の進歩により、メッシュ生成はかなり容易となっているが、自動メッシュ生成にかかる計算コストは比較的大きい。これに対して、境界要素法では解析対象の境界要素分割だけで問題を解析できるので、形状変更ごとにメッシュを再構成するための計算コストは有限要素法に比べて小さくなる。しかし、境界要素法では別の問題が生じる。スロッシング現象のシミュレーションでは、水面の変動を表現するために水面での速度成分を評価しなければならないが、境界要素法ではこの操作が複雑となることである。そこで、これらの問題を改善するために、本研究では間接型 Trefftz 法を利用する。境界要素法と同じく Trefftz 法は境界型解法なので、解析対象の形状変更によりメッシュがゆがんで精度が低下する可能性は少ない。また、ポテンシャルは T-complete 関数という正則な関数の線形結合で近似されるので、これを座標系について直接微分することで液面での速度ポテンシャルの導関数を直接評価できる。確かに、境界要素法においても超特異積分方程式の評価に関する最近の研究の進展により、液面での導関数を直接求めることが可能となっている⁽⁶⁾。しかし、Trefftz 法を用いれば超特異積分方程式の評価は不要なので、定式化は境界要素法の場合よりもかなり簡単となる。

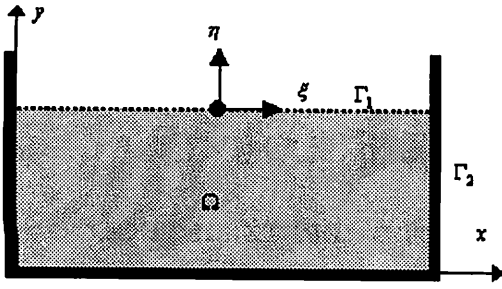


Fig. 1 Problem Statement

以上のような観点から、本研究では Trefftz 法に基づくスロッシング現象のシミュレーション・プログラムを開発し、矩形容器内の液体に生じるスロッシング現象のシミュレーションに適用する。

2. スロッシング現象のシミュレーション

2.1. 初期値境界値問題

矩形容器内に満たされた液体の液面にラグランジェ座標系 $\xi - \eta$ を考える (図 1)。液体領域を Ω 、液体の自由表面境界を Γ_1 、液体の壁境界を Γ_2 とする。液体は非粘性・非圧縮流体であるとし、渦なし流れであるとする。このような流れの場に対しては速度ポテンシャル $u(x, y, t)$ が存在する。さらに、自由表面上の点に対してラグランジェ座標 $\xi - \eta$ を用いる。このとき、スロッシング現象についての初期値・境界値問題と初期条件は次式で与えられる (3, 4)。

境界値問題

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 & (\text{in } \Omega) \\ u &= \bar{u} & (\text{on } \Gamma_1) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= q = 0 & (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

初期値問題

$$\left. \begin{aligned} Du/Dt &= \frac{1}{2} \nabla u \cdot \nabla u - g\xi + A(t)\eta \\ D\xi/Dt &= \partial u / \partial x \\ D\eta/Dt &= \partial u / \partial y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで $g, A(t)$ は重力加速度と加振加速度を示す。

初期条件 時刻 $t = 0$ において液体は静止しているものとする、液面 Γ_1 での初期条件は次式となる。

$$\xi = \bar{\xi}, \quad \eta = 0, \quad \phi = 0 \quad (3)$$

2.2. 境界値問題の解法

本研究では、式 (1) で与えられた境界値問題を解くために Trefftz 型境界要素法を適用する。Trefftz 法では、支配方程式を満足する正則な T-complete 関数を用いて解析を行う。

2次元ラプラス方程式に対する T-complete 関数 u_j^* は次式で与えられる (7)。

$$\begin{aligned} u^* &= \{u_1^*, \dots, u_{2\mu}^*, u_{2\mu+1}^*, \dots\}^T \\ &= \{1, \dots, \Re[r^\mu e^{j\mu\theta}], \Im[r^\mu e^{j\mu\theta}], \dots\}^T \end{aligned} \quad (4)$$

ここで (r, θ) は平面極座標であり、 μ は正の整数である。また $j = \sqrt{-1}$ であり、 \Re, \Im は複素関数の実部と虚部を示す。解析において、T-complete 関数は上式に示されるような順番で選択して用いられる。

式 (4) を用いて、ポテンシャル u を次式で近似する。

$$u \simeq \bar{u} = a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \dots + a_N u_N^* = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* \quad (5)$$

ここで、 \mathbf{u}^*, \mathbf{a} はそれぞれ T-complete 関数ベクトルと未知係数ベクトルを示し、 N はそれらの総数である。つまり、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*\}^T \\ \mathbf{a} &= \{a_1, a_2, \dots, a_N\}^T \end{aligned}$$

式 (5) を境界の法線方向に偏微分すれば境界でのフラックスの近似式を得る。

$$q \simeq \bar{q} \equiv \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = a_1 q_1^* + a_2 q_2^* + \dots + a_N q_N^* = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{q}^* はポテンシャルについての T-coccomplete 関数の境界法線方向導関数を示す。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^* &= \{q_1^*, \dots, q_{2\mu}^*, q_{2\mu+1}^*, \dots\}^T \\ &= \{0, \dots, \Re[\mu r^{\mu-1} e^{j\mu\theta} (r_n + jr\theta_n)], \\ &\quad \Im[\mu r^{\mu-1} e^{j\mu\theta} (r_n + jr\theta_n)], \dots\}^T \end{aligned} \quad (7)$$

ここで r_n, θ_n は次式で定義される。

$$r_n \equiv \frac{\partial r}{\partial n}, \quad \theta_n \equiv \frac{\partial \theta}{\partial n} \quad (8)$$

T-complete 関数は支配方程式を満足するように決定されているので、式 (5) と (6) は境界条件式を満足していないので、これらを境界条件式に代入すると残差が生じる。つまり、

$$\left. \begin{aligned} R_1 &\equiv \bar{u} - \bar{u} = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* - \bar{u} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \\ R_2 &\equiv \bar{q} - \bar{q} = \mathbf{a}^T \mathbf{q}^* - \bar{q} \neq 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式 (9) に含まれる未知係数を決定するために、本研究では選点法を用いる。選点法による定式化では、境界上にとった選点 P_i で式 (9) の残差を 0 とおく。つまり、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{u}^*(P_i) &= \bar{u}(P_i) \quad (P_i \in \Gamma_1) \\ \mathbf{a}^T \mathbf{q}^*(P_i) &= \bar{q}(P_i) \quad (P_i \in \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

これをマトリックス表示すると、

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (11)$$

2.3. 初期値問題の解法

初期値問題を解くために、本研究では最も単純な Euler 法を用いることにする (4)。この場合、時間ステップ幅を Δt とすれば、 k 時間ステップの値より、 $k+1$ 時間ステップでの値は次式から計算される。

$$u^{k+1} = u^k + \Delta t \left[\frac{1}{2} \nabla u^k \cdot \nabla u^k - g\xi^k + A(t)\eta^k \right] \quad (12)$$

$$\xi^{k+1} = \xi^k + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^k \quad (13)$$

$$\eta^{k+1} = \eta^k + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^k \quad (14)$$

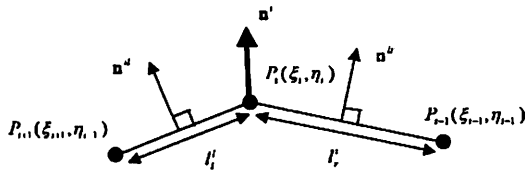


Fig. 2 Normal vector on free surface

ここで、上添え字は時間ステップを示す。

上式を適用するためには、右辺に含まれるポテンシャルの導関数 $\partial u / \partial x, \partial u / \partial y$ を評価する必要がある。Trefftz 法では、これら導関数を式 (5) から直接評価できる。つまり、式 (5) を x, y について微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{a}^T \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial x} \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \mathbf{a}^T \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial y} \quad (16)$$

3. 計算技法

上記のような数値計算手法によって数値計算を実行するとき、移動境界 Γ_1 上の点をラグランジュ的に移動させるために選点が集中して数値計算上の問題が生じ、計算が続行できなくなることがある。この問題に改善するために、本研究では登坂ら (4) によって提案された以下のような計算技法を用いる。

3.1. 選点再配置技法

自由表面の変形が大きくなりその形状が複雑になるにしたがって自由表面 Γ_1 上に配置した選点が集中するようになる。それによる計算精度の低下を改善するために、本研究では各タイムステップ毎に選点を均等に再配置する。自由表面長に対して、再配置後に選点距離がほぼ均等となるように再配置する。再配置後の選点に与える境界条件値は、再配置前の値から内挿することで求める。

3.2. 法線ベクトルの評価

ラグランジュ法では自由表面上の配置した選点を追跡することで時々刻々変化する自由表面の形状をシミュレートする。ところで、各タイムステップにおいて、自由表面の形状は選点を結んだ折れ線形状で表現されることになる。従って、選点では複数の法線が定義できるため、速度ベクトルの計算などの計算に必要な場合は、次式で定義する平均法線を用いる。選点 i における平均法線 \mathbf{n}^i は、次式で定義される。

$$\mathbf{n}^i = \frac{l_i^-}{l_i^- + l_i^+} \mathbf{n}^{i-1} + \frac{l_i^+}{l_i^- + l_i^+} \mathbf{n}^{i+1} \quad (17)$$

ここで、 l_i^-, l_i^+ は選点 i と選点 $i-1$ の距離、選点 i と選点 $i+1$ の距離を示す。そして、 $\mathbf{n}^{i-1}, \mathbf{n}^{i+1}$ はそれらの選点を結ぶ線分の法線ベクトルを示す (Fig.2)。

4. 解析例

図 3 に示される幅 $L=0.9(\text{m})$ の 2 次元の矩形容器に高さ $H=0.6(\text{m})$ のところまで液体を満たして水平加振を与える。

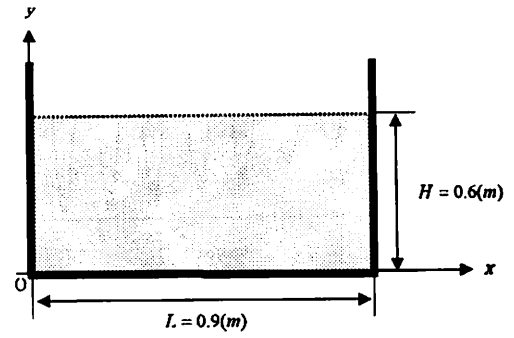


Fig. 3 Object under consideration

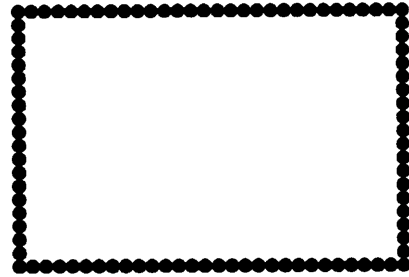


Fig. 4 Initial placement of collocation points

振幅 d と加振加速度 ω とすると、2 次元容器の水平加振加速度 $A(t)$ は次式で与えられる。

$$A(t) = d\omega^2 \sin(\omega t) \quad (t \geq 0) \quad (18)$$

ここで、 $d = 2.0 \times 10^{-3}(\text{m}), \omega = 5.5(\text{rad/sec})$ としてシミュレーションする。

解析には T-complete 関数を 41 個、境界選点を 100 個用いる。初期選点配置を図 4 に示す。境界選点は境界上に均等に配置し、かどにあたる所には 2 重選点を配置する。2 重選点では、同一座標の点に 2 つの選点が配置されており、それらで異なる法線ベクトルが定義される。時間積分スキームにはオイラー法を採用し、自由表面上の選点は毎回均等になるように再配置する。

時間積分のタイムステップを $\Delta t = 0.01, 0.001, 0.0001$ と変化させたときの、タイム $t = 9.5(\text{s})$ における液面右端における隆起量の変化の比較を図 5 に示す。この結果からタ

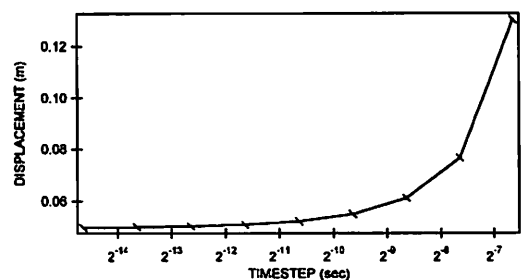


Fig. 5 Elevation at the right-end of free surface

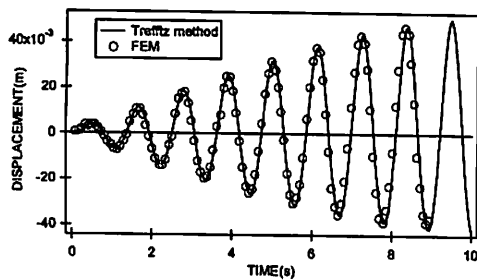


Fig. 6 Comparison with finite element solutions

タイムステップの大きさによって解析結果に大きな違いが生じていることがわかる。そこで、タイムステップが最も小さい $\Delta t = 0.0001$ の結果を有限要素法による結果⁽⁵⁾と比較したものを図6に示す。この結果より、本研究で得られた結果は有限要素法による結果とよく一致していることがわかる。

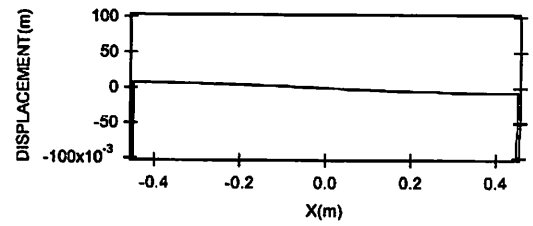
タイム $T = 0.54, 1.12, 1.68, 2.24, 2.81$ (s) における自由表面の波形を図7に示す。横軸は容器の長さ方向の軸を示し、縦軸は初期状態の水面の上下10cmの範囲を示す。

5. 結言

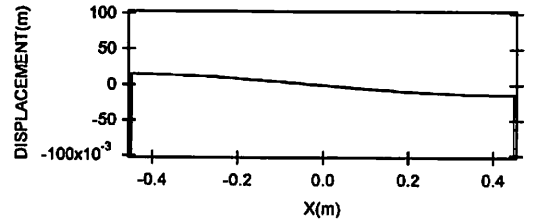
本研究では、2次元容器内のスロッシング現象のシミュレーションに Trefftz 法を適用した。プログラムを開発し、そのシミュレーション結果を有限要素法による結果と比較・検討した。その結果、両者はよく一致したので、スロッシング現象のシミュレーションに Trefftz 法を適用することの可能性が確認された。

参考文献

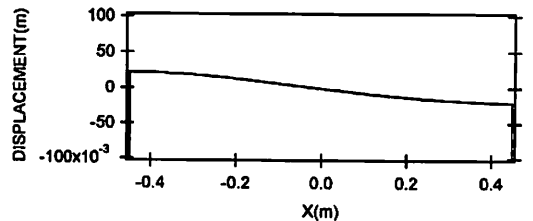
- (1) 数値流体力学編集委員会(編): 移動境界流れ解析. 東大出版会, 1995.
- (2) J. W. Dold and D. H. Peregrine: Steep unsteady water waves - an efficient computational scheme. In *Proc. 19.th Coastal Eng. Conf.*, Vol. 1, pp. 955-967, 1984.
- (3) T. Nakayama: A computational method for simulating transient motions of an incompressible inviscid fluid with a free-surface. *International Journal of Numerical Methods in Fluid*, Vol. 10, pp. 683-695, 1990.
- (4) 川端久善, 杉野隆三郎, 登坂宜好: 境界要素法による容器内のスロッシング現象の近似解析. 境界要素法論文集, Vol. 6, pp. 167-172, 1989.
- (5) K. Wasizu, T. Nakayama, M. Ikegawa, Y. Tanaka, and T. Adachi: *Some Finite Element for Techniques Analysis of Nonlinear Sloshing Problem*, Chapter 5, pp. 357-376. John Wiley & Sons Ltd., 1984.
- (6) 松本敏郎, 田中正隆: ポテンシャル問題における感度解析のための境界積分方程式の定式化. 日本機械学会論文集, Vol. A56, No. 525, pp. 1262-1268, 1990.



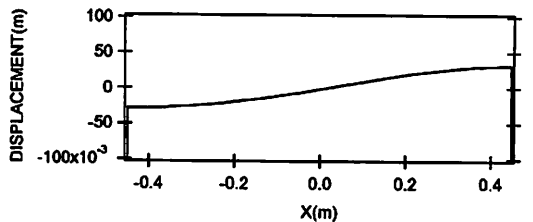
(a) $T=0.54$ (s)



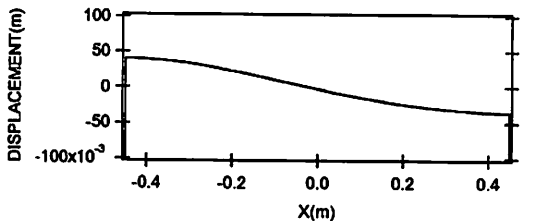
(b) $T=2.24$ (s)



(c) $T=3.37$ (s)



(d) $T=5.05$ (s)



(e) $T=6.75$ (s)

Fig. 7 Wave profiles

- (7) I. Herrera: *Boundary Methods : An Algebraic Theory*. Pitman, 1984.