

# 境界要素法による多次元数値特異積分法

## NUMERICAL QUADRATURE FOR MULTIPLE SINGULAR INTEGRALS BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

落合 芳博<sup>1)</sup>

Yoshihiro OCHIAI

1) 近畿大学大学院総合理工学研究科 (〒577-8502 東大阪市小若江3-4-1 E-Mail:ochiai@me2.kindai.ac.jp)

This paper presents a numerical method for singular multiple integrations using the boundary integral equations and a polyharmonic function. In the method using the B-spline, points must be assigned in a gridiron layout. In the presented method using the polyharmonic function, arbitrary points can be assigned instead of using a gridiron layout, therefore it becomes easy to interpolate a bounded function. This method requires a boundary geometry of the region and arbitrary internal points. The integral value can be calculated after solving the discretized boundary integral equations. In order to investigate the efficiency of this method, several examples are given.

**Key Words:** Numerical Integration, Boundary Element Method

### 1. はじめに

特異性のある多次元数値積分を境界積分方程式を用いて計算する。多重調和関数を用いて任意形状の領域上で定義された分布の補間方法および、この補間法を用いた特異性のない数値積分法を既に示している[6, 7, 8]。本数値積分法では、任意境界形状の数値積分が可能であり、グリーン定理により二次元積分が一次元積分に、三次元積分が二次元積分に近似的に変換される。二次元の場合、境界上の値と領域内部のいくつかの任意点での値から積分値が得られる。従来の数値積分法では、積分点を基盤目状に与える必要があり、任意の境界形状の場合には、領域を分割する必要があった[3]。数値計算例により、調和関数を使用する本手法の有効性を示した[6]。

既に示した論文では、被積分関数に特異性はないとした。本論文では被積分関数は距離の関数で示される特異性のある関数と特異性のない任意の関数との積で表されるものとする。このような特異積分は境界要素法において特に重要な積分である。

### 2. 理論

#### 2.1 被積分関数

本論文では、一次元と二次元の場合の特異積分を扱う。領域 $\Omega$ を積分領域とし、多次元特異積分は次式の形式に

なっているものとする。

$$I = \int_{\Omega} F_1(p_0, q) W_1(q) d\Omega \quad (1)$$

ただし、関数 $F_1(p_0, q)$ は点 $p_0$ と $q$ の距離 $r$ で示される特異性のある関数であり、例えば、 $\ln(1/r)$ ,  $r^{-1}$ ,  $r^{-2}$ などの項を含むものである。なお、Fig. 1(a), (b)に示すように特異点は領域内または境界上にあるものとする。また関数 $W_1(q)$ は任意の関数であるが、特異性はないものとする。このような特異性のある数値積分は境界要素法において特に重要である。

特異点が領域外にある場合は、積分範囲に特異性がなくなるので本論文では扱わない。また、Fig. 1(c)のように特異点が複数点ある場合は、領域を部分領域に分割し、それぞれの部分領域において特異積分を行うものとし、他の部分領域に存在する特異点の影響を $W_1(q)$ に含めるものとする。

#### 2.2 多重調和関数による補間

多重調和関数を用いた補間法の概要を分かりやすく示す。一次元の場合、関数値 $W_1(x)$ は次式で近似することができる。

$$\nabla_{(n)}^2 W^s_1 = -W^s_2 \quad (1)$$

$$\nabla_{(n)}^2 W^s_2 = -W^p_3 \quad (2)$$

ただし、 $\nabla_{(n)}^2 = d^2/dx^2$ であり、 $W^s_2$ は $W^s_1$ の曲率に相当する。 $W^p_3$ は線分 $\Lambda$ に様に分布する $W^s_3$ が次式によって一点Pに集まったディラックのデルタ関数の強さとする。

$$W^p_3 = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} W^s_3 \Lambda \quad (3)$$

式(1)、(2)より次式が得られる。

$$\nabla_{(n)}^4 W^s_1 = W^p_3 \quad (4)$$

これは、Fig. 2に示すような点荷重 $W^p_3$ を伴う梁の変位 $W^s_1$ を求める式と同じものである。また、梁は単純支持されており、両端でモーメント $W^s_2$ を0と仮定する。つまり、自然スプラインの式と同じものであることがわかる[5, 11]。つまり、いくつかの点の梁の変位 $W^s_1$ が与えられており、

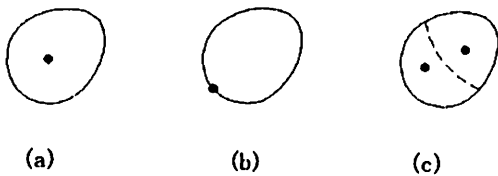


Fig. 1. Types of singularity points

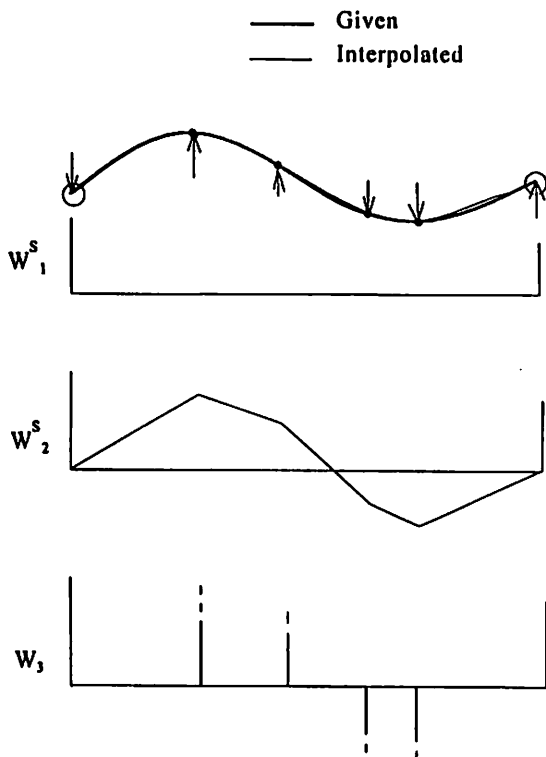


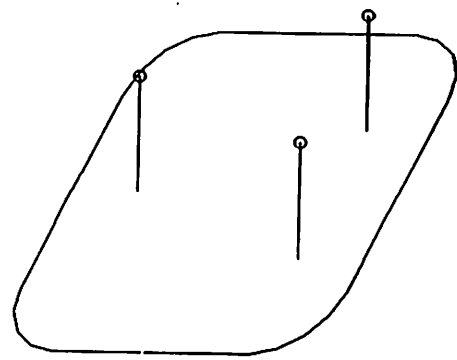
Fig. 2. Beam with unknown point load for interpolation

未知の点荷重の値 $W^p_3$ を逆に求めて補間が行われている。なお、一次元の場合の $f$ 重調和関数 $T_f$ およびその微分係数は次式で与えられる。

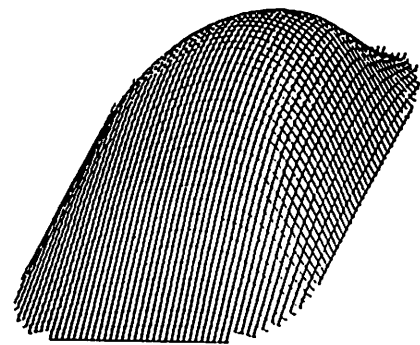
$$T_f = \frac{-r^{2f-1}}{2(2f-1)!} \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_f}{\partial n} = \frac{-r^{2f-2}}{2(2f-2)!} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (6)$$

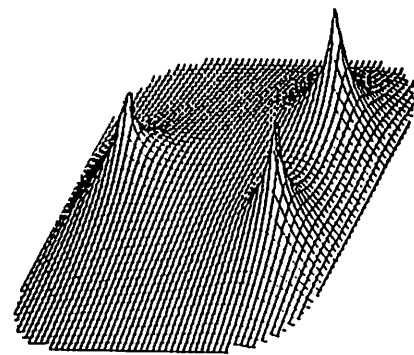
二次元の場合、従来の方で補間するには、一次元のスプライン関数を $x$ と $y$ 方向に掛けることが行われている。多重調和関数を用いる方法では、次式により補間を行う。



(a) Given line and points



(b) Obtained shape



(c) Sum of curvatures ( $W_2$ )

Fig. 3. Fictitious thin plate for interpolation

$$\nabla_{(x)}^2 W^{s_1} = -W^{s_2} \quad (7)$$

$$\nabla_{(x)}^2 W^{s_2} = -W^{s_3} \quad (8)$$

ただし、

$$\nabla_{(x)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (9)$$

$W^{s_3}$ は面積Aに一樣に分布する $W^A$ が次式によって一点Pに集まったディラックのデルタ関数の強さとする。

$$W^{s_3} = \lim_{A \rightarrow 0} W^A \delta_A \quad (10)$$

式(7), (8)より次式が得られる。

$$\nabla_{(x)}^2 W^{s_1} = W^{s_3} \quad (11)$$

これは、Fig. 3に示すような点荷重 $W^s$ を伴う薄板の変位 $W^{s_1}$ を求める式とほとんど同じものである。つまり、いくつかの点の薄板の変位 $W^{s_1}$ が与えられており、未知の点荷重の値 $W^{s_3}$ を逆に求めて、補間が行われている。ただし、薄板の縁でモーメントに相当する $W^{s_3}$ が0と置かれている。

式(7), (8)を境界積分方程式を用いて解く。その際、下記の調和関数および重調和関数を用いる。

$$T_1(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (12)$$

$$T_2(P, Q) = \frac{r^2}{8\pi} \left[ \ln\left(\frac{1}{r}\right) + 1 \right] \quad (13)$$

式(13)の重調和関数は、下記の薄板スプラインSと同等の関数である[2, 4]。

$$S(P, Q) = r^2 \ln(r) \quad (14)$$

既に示した論文[6, 9, 10]では、これらの事柄を一般化して示している。点荷重 $W^s$ の数をMとすると、式(7), (8)より次の境界積分方程式が得られる。

$$cW^{s_1}(P) = - \sum_{f=1}^2 (-1)^f \int_{\Gamma} \{T_f(P, Q) \frac{\partial W^{s_1}(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_f(P, Q)}{\partial n} W^{s_1}(Q)\} d\Gamma - \sum_{m=1}^M T_2(P, q) W^{s_3(m)} \quad (15)$$

同様に、式(8)より次式が得られる。

$$cW^{s_2}(P) = \int_{\Gamma} \{T_1(P, Q) \frac{\partial W^{s_2}(Q)}{\partial n} - \frac{\partial T_1(P, Q)}{\partial n} W^{s_2}(Q)\} d\Gamma + \sum_{m=1}^M T_1(P, q) W^{s_3(m)} \quad (16)$$

ただし、滑らかな境界上では $c=0.5$ 、領域内部では $c=1$ である。

### 2.3 特異数値積分法

任意境界形状内で定義された分布量の数値積分方法を示す。関数 $W^{s_1}$ を式(7), (8)で補間した後、数値積分する。数値積分のために次式で定義される関数を導入する。

$$\nabla^2 F_{i,n} = F_i \quad (17)$$

分布 $W^{s_1}$ を式(7), (8)で補間した場合、グリーンの定理を適用し、領域積分を境界積分に変換する。二次元の分布 $W^{s_1}$ が式(7), (8)を満足している場合、式(17)およびグリーンの定理より次式が得られる。

$$\int_{\Omega} F_i(r) W^{s_1}(q) d\Omega = \sum_{f=1}^2 (-1)^f \int_{\Gamma} \{F_{i,n}(p, Q) \frac{\partial W^{s_1}(Q)}{\partial n} - \frac{\partial F_{i,n}(p, Q)}{\partial n} W^{s_1}(Q)\} d\Gamma(Q) - \sum_{m=1}^M F_i(p, q) W^{s_3(m)} \quad (18)$$

ただし、pは特異点を示す。n次元問題の場合、次式により式(17)の関数 $F_i$ が求められる。

$$F_i = \int \frac{1}{r^{n-1}} \left[ \int r^{n-1} F_{i-1} dr \right] dr \quad (19)$$

二次元の場合で、特異性を含む関数 $F_i$ が次式で与えられる場合を考える。

$$F_i = \frac{1}{r^m} \quad (0 < m < 2) \quad (20)$$

式(20)を式(19)に代入すると、数値積分に必要な関数が以下のように得られる。

$$F_2 = \frac{1}{(m-2)^2 r^{(m-2)}} \quad (21)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{-1}{(m-2) r^{(m-1)}} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (22)$$

$$F_3 = \frac{1}{(m-2)^2 (m-4)^2 r^{(m-4)}} \quad (23)$$

二次元の場合で、特異性を含む関数が次式で与えられる場合を考える。

$$F_i = \frac{1}{r^m} \log\left(\frac{1}{r}\right) \quad (24)$$

式(24)を式(19)に代入すると、数値積分に必要な関数が次のように得られる。

$$F_2 = \frac{-1}{(m-2)^2 r^{(m-2)}} \left[ \log(r) - \frac{2}{2-m} \right] \quad (25)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{1}{(m-2) r^{(m-1)}} \frac{\partial r}{\partial n} \left[ \log(r) - \frac{1}{2-m} \right] \quad (26)$$

$$F_3 = \frac{-1}{(m-2)^2 (m-4)^2 r^{(m-4)}} \left[ \log(r) - \frac{4(3-m)}{(2-m)(4-m)} \right] \quad (27)$$

一次元の場合で、特異性を含む関数が次式で与えられる場合を考える。

$$F_1 = \frac{1}{r^m} \quad (0 < m < 1) \quad (28)$$

式(28)を式(19)に代入すると、数値積分に必要な関数が次のように得られる。

$$F_2 = \frac{1}{(m-1)(m-2)r^{m-2}} \quad (29)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{-1}{(m-1)r^{m-1}} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (30)$$

$$F_3 = \frac{1}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)r^{m-4}} \quad (31)$$

一次元の場合で、特異性を含む関数が次式で与えられる場合を考える。

$$F_1 = \frac{1}{r^m} \log(r) \quad (32)$$

同様に、次式が求められる。

$$F_2 = \frac{1}{(m-1)(m-2)r^{m-2}} \left[ \log(r) - \frac{3-2n}{(m-1)(m-2)} \right] \quad (33)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial n} = \frac{-1}{(m-1)r^{m-1}} \frac{\partial r}{\partial n} \left[ \log(r) - \frac{1}{1-m} \right] \quad (34)$$

$$F_3 = \frac{1}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)r^{m-4}} \left[ \log(r) - \frac{50-70m+24m^2-3m^3}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)} \right] \quad (35)$$

## 2.4 積分方程式の活用

実際の計算において、境界上および、いくつかの内点での $W^s_1$ は与えられているが、式(15)、(16)の $\partial W^s_1 / \partial n$ や $W^p_3$ は、与えられていない。そこで次に、これらの値を求める方法を示す。式(15)および(16)を離散化し、境界に対して一定要素を用いることにする。 $W^s_1(Q)$ を成分を持つベクトル $W_1$ 、 $\partial W^s_1(Q) / \partial n$ を成分を持つベクトルを $V_1$ 、 $W^p_3(m)$ を成分を持つベクトルを $W^p_3$ とし、式(15)を離散化すると次式が得られる[1]。

$$H_1 W_1 = G_1 V_1 + H_2 W_2 - G_2 V_2 - G^p_2 W^p_3 \quad (36)$$

ただし、 $p$ および $q$ は内点を示すものとする、 $H_1$ 、 $G_1$ 、 $H_2$ 、 $G_2$ および $G^p_2$ は、点 $i$ で離散化し、 $\Gamma_j$ で線積分を行った場合、次式の成分を持つマトリックスである。

$$H_{1ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_1(P_i, Q_j)}{\partial n} d\Gamma_j \quad (37)$$

$$G_{1ij} = \int_{\Gamma_j} T_1(P_i, Q_j) d\Gamma_j \quad (38)$$

$$H_{2ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_2(P_i, Q_j)}{\partial n} d\Gamma_j \quad (39)$$

$$G_{2ij} = \int_{\Gamma_j} T_2(P_i, Q_j) d\Gamma_j \quad (40)$$

$$G^p_{2ij} = T_{2k}(P_i, q^p_j) \quad (41)$$

ただし、上添え字 $P$ は $W^p_3$ を与える点であることを示す。 $W^s_2(P)$ に関して式(16)より次式が得られる。

$$H_1 W_2 = G_1 V_2 + G^p_1 W^p_3 \quad (42)$$

ただし、 $G^p_1$ は、次式の成分を持つマトリックスである。

$$G^p_{1ij} = T_{1k}(P_i, q^p_j) \quad (43)$$

また、式(15)において、値 $W(p^p)$ の内点を活用すると次式が得られる。

$$W(p^p) = -H_3 W_1 + G_3 V_1 + H_4 W_2 - G_4 V_2 - G^p_3 W^p_3 \quad (44)$$

ただし、 $H_3$ 、 $G_3$ 、 $H_4$ 、 $G_4$ および $G^p_3$ は、次式の成分を持つマトリックスである。

$$H_{3ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_1(p^p_i, Q_j)}{\partial n} d\Gamma_j \quad (45)$$

$$G_{3ij} = \int_{\Gamma_j} T_1(p^p_i, Q_j) d\Gamma_j \quad (46)$$

$$H_{4ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T_2(p^p_i, Q_j)}{\partial n} d\Gamma_j \quad (47)$$

$$G_{4ij} = \int_{\Gamma_j} T_2(p^p_i, Q_j) d\Gamma_j \quad (48)$$

$$G^p_{3ij} = T_{2k}(p^p_i, q^p_j) \quad (49)$$

$W_2 = 0$ と置くと、式(36)、(42)、(44)より次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_2 & -G^p_2 \\ 0 & G_1 & G^p_1 \\ G_3 & -G_4 & -G^p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ W^p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 W_1 \\ 0 \\ H_3 W_1 + W(p^p) \end{bmatrix} \quad (50)$$

上式より $V_1$ 、 $V_2$ および $W^p_3$ を求めることができる。つまり、境界上での値 $W_1$ と内点での値 $W(p^p)$ を与えると、 $W^s_1(Q)$ および $W^s_2(Q)$ の境界上での法線方向の傾きと $W^p_3$ の

強さが得られる。任意点の補間値は、式(50)より計算する。式(50)では $W_2=0$ と置いたが、面対称の所では $V_2=0$ と置いてもよい。一定要素を用い、境界を $N_0$ 分割し、内点を $N_1$ 点使用した場合、 $(2N_0+N_1)$ 次元の連立一次方程式を解かなければならない。

### 3. 適用例

一次元の場合の数値積分の例として、次式の数値特異積分を求めた。

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+|x|} \log\left(\frac{1}{|x|}\right) dx \quad (51)$$

厳密解は1.64493であり、0.1間隔に補間点を与えた場合の数値積分値は1.65093であった。

次に、次式の数値積分を求めた。

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+|x|)^{1/2}|x|^{1/2}} dx \quad (52)$$

厳密解<sup>[13]</sup>は3.52549であり、0.1間隔に補間点を与えた場合の数値積分値は3.53017であった。

二次元の場合の数値積分の例を示す。Fig. 4に示す半径Rの領域 $\Omega$ での次式の数値積分を求めた。

$$I = \int_{\Omega} \frac{1}{r} \cos\left(\frac{r\pi}{2R}\right) d\Omega \quad (53)$$

R=10とした場合の厳密解は40.0であり、数値積分値は40.00026であった。

次に、領域 $\Omega$ での次式の数値積分を求めた。

$$I = \int_{\Omega} \log\left(\frac{1}{r}\right) \frac{R^2-r^2}{R^2} d\Omega \quad (54)$$

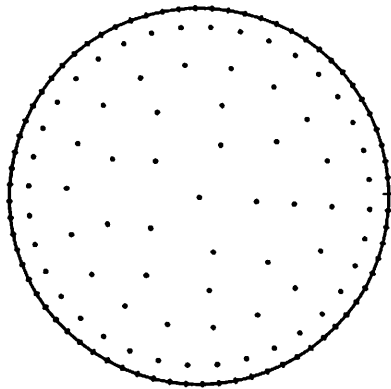


Fig. 4 Boundary discretization and internal points

R=10とした場合の厳密解は-243.88であり、数値積分値は-244.07であった。

### 4. 結言

数値特異積分を行うために任意の外形形状の領域内で定義された関数の補間方法を、多重調和関数および積分方程式を用いて示した。本補間法では任意の外形形状の領域内の分布が補間できるので、従来のスプライン関数を用いる場合に比べて適用しやすい。この補間法を用いた数値特異積分法は任意外形形状の領域の数値特異積分が可能であり、実用上の有効性を示唆した。

### 参考文献

- (1) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., Boundary Element Techniques—Theory and Applications in Engineering, Springer-Verlag, (1984), 境界要素解析-理論と応用, 田中正隆訳, (1984), pp. 46-70, pp. 274-276, 丸善.
- (2) Chales A. Micchelli, Interpolation of Scattered Data, Constructive Approximation, Vol. 2, pp. 12-22, (1986).
- (3) Davis, P. J. and Rabinowitz, P., Methods of Numerical Integration, Academic Press, (1983)
- (4) Dyn, N., Interpolation of Scattered Data by Radial Functions, in Topics in Multivariate Approximation, Eds. C. K Chui, L. L. Schumaker and F. I. Utreras, pp. 47-61, (1987), Academic Press, London.
- (5) 市田浩三, 吉本富士市, スプライン関数とその応用, 教育出版, (1979).
- (6) 落合芳博, 多重調和関数を用いた補間および数値積分法, 日本応用数学会論文誌, Vol. 8, No. 4, pp. 457-468, (1998).
- (7) 落合芳博, 多重調和関数を用いた軸対称数値積分法, 日本応用数学会論文誌, Vol. 10, No. 2, pp. 199-210, (2000).
- (8) 落合芳博, 体分布多重調和関数を用いた数値積分法, 日本応用数学会2000年度年会講演予稿集, pp. 458-459, (2000).
- (9) Ochiai, Y. and Sekiya, T., Generation of Free-Form Surface in CAD for Dies, Advances in Engineering Software, Vol. 22, pp. 113-118, (1995).
- (10) Ochiai, Y and Yasutomi, Z., Improved Method Generating a Free-Form Surface Using Integral Equation, Computer Aided Design, Vol. 17, (2000), pp. 233-245.

(11) 桜井明, Cによるスプライン関数, 東京電機大学出版局, (1993).

(12) 森口, 宇田川, 市松, 岩波数学公式 I, (1990), p. 101, 岩波.